§4. О решении вырожденных и плохо обусловленных СЛАУ.

При решении плохо обусловленных [2] систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) часто сталкиваются с тем, что малым изменениям правых частей таких систем могут отвечать большие (выходящие за допустимые пределы) изменения решения.

Рассмотрим матричную систему уравнений

$$Az = u. \tag{4.1}$$

Система (4.1) называется *вырожденной* [7], если определитель системы равен нулю, $detA = 0$. В этом случае матрица A имеет равные нулю собственные значения. Для плохо обусловленных систем такого типа матрица A имеет близкие к нулю собственные значения.

Когда вычисления производятся с конечной точностью, не всегда возможно проверить является ли исследуемая система уравнений вырожденной или плохо обусловленной. Складывается ситуация, когда в пределах заданной точности, плохо обусловленные и вырожденные системы, могут быть практически неразличимы. Очевидно, это возможно, если матрица A имеет достаточно близки к нулю собственные значения матрицы A.

Любой вектор $\tilde{z}$, минимизирующий невязку $\|Az - u\|$, называется *псведорешением* системы (4.1). В случае совместной системы минимум невязки достигается на любом ее решении и равен нулю, вследствие чего псевдорешения системы представляют собой решения системы.

Для нахождения псевдорешения системы (4.1) необходимо составить *нормальную систему* $A^T A z = A^T u$ и найти все ее решения. Подчеркнем, что система (4.1) имеет единственное псевдорешение тогда и только тогда, когда у матрицы A столбцы линейно независимы.

В том случае, когда система (4.1) имеет много псевдорешений, среди них выделяют то, которое имеет минимальную норму. Такое решение единственно и называется *нормальным решением (псевдорешением)*.

Можно показать, что задача нахождения нормального решения системы (4.1) является неустойчивой и следовательно некорректно поставленной. Ниже приводится схема нахождения нормального решения системы (4.1), устойчивого к малым возмущениям правой части u и матрицы A, основанного на методе регуляризации.

В практических задачах часто правая часть u и элементы матрицы A, т.е. коэффициенты системы (4.1) известны приближенно. Поэтому на самом деле мы имеем дело с несколько другой системой

$$A_\mu z = u_\delta, \tag{4.2}$$

где $\|A - A_\mu\| \leq \mu, \quad \|u - u_\delta\| \leq \delta.$

Пусть z^0 - нормальное решение системы (4.2). Требуется найти векторы z_γ, $\gamma = (\delta, \mu)$, такие, что $\lim_{\gamma \to 0} \|z_\gamma - z^0\| = 0$. Вектора z_γ условимся называть *приближениями к нормальному решению* z^0 уравнения (4.2) или *приближенными нормальными решениями*. Их поиск сводится к минимизации сглаживающего функционала

$$M^{\alpha}[z, u_{\delta}, A_{\mu}] = \|A_{\mu} z - u_{\delta}\|^2 + \alpha \|z\|^2, \tag{4.3}$$

где α – достаточно малый положительный стабилизирующий параметр - параметр регуляризации. Для функционала (4.3) справедлива

Теорема 1. Для любых u_{δ}, A_{μ} и $\alpha > 0$ существует единственный вектор z^{α}, минимизирующий функционал (4.3).

Таким образом, решение задачи z^{α} минимизации функционала (4.3) можно рассматривать как результат применения регуляризующего оператора, зависящего от параметра α $z^{\alpha} = R(u_{\delta}, A_{\mu}, \alpha)$.

Задача минимизации функционала (4.3) эквивалентна [1] решению следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$(A_{\mu}^{T} A_{\mu} + \alpha E) z = A_{\mu}^{T} u_{\delta}. \tag{4.4}$$

Матричное уравнение (4.4) называется *регуляризующим уравнением Тихонова*, а его решение называется *регуляризованным*.

Заключительным шагом регуляризации является выбор оптимального параметра регуляризации α. В частности, можно подобрать норму невязки и соответственно, параметр α, сопоставимую априорной оценке суммарных уровней погрешностей исходных данных: матрицы A и вектора u, т.е. величине $\mu + \delta$.