§3. Метод регуляризации.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Az = u. \tag{3.1}$$

Предположим, что обратный оператор A^{-1} не является непрерывным на множестве AF и множество возможных решений F не образует компакт [6].

Пусть z_T - точное решение уравнения (3.1) с точной правой частью, т.е. $Az_T = u_T$. В прикладных задачах часто вместо u_T приходится иметь дело с приближением u_δ так что

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \le \delta, \tag{3.2}$$

где $\delta > 0$.

Фактически, вместо точных исходных данных (u_T, A) нам даны приближенные исходные данные (u_δ, A) и оценка их погрешности δ. Соответствующее приближенное решение z_δ уравнения (3.1) должно обладать свойством устойчивости к малым колебаниям u_δ. Очевидно, в качестве z_δ нельзя брать точное решение уравнения (3.1) с правой частью u_δ, т.е. элемент z_δ, определяемый по формуле

$$z_\delta = A^{-1}u_\delta,$$

поскольку оно существует не для всякого элемента $u \in U$ и не обладает свойством устойчивости к малым возмущениям правой части u.

Параметр δ характеризует погрешность правой части уравнения (3.1) и в этой связи представляется логичным определить z_δ посредством оператора, зависящего от параметра, значения которого должны быть согласованы с погрешностью δ исходных данных u_δ. Эта согласованность должна быть такой, чтобы при $\delta \to 0$ приближенное решение z_δ по метрике пространства F стремилось бы к точному решению z_T уравнения $Az = u_T$.

В частности, в [1] приводится определение *регуляризующего оператора* $R(u, \alpha)$, $R: U \to F$ для уравнения (3.1). Здесь α – числовой параметр, относительно которого предполагается выполнение ряда условий, входящие в определение регуляризующего оператора. Параметр α называется *параметром регуляризации*. При выполнении требования (3.2), согласно [4,5] в качестве приближенного решения уравнения (3.1) с приближенно известной правой частью u_δ можно брать элемент $z_\alpha = R(u_\delta, \alpha)$, полученный с помощью регуляризующего оператора $R(u, \alpha)$, где $\alpha = \alpha(u_\delta) = \alpha_1(\delta)$ согласовано с погрешностью исходных данных u_δ. Это решение называется *регуляризованным решением* уравнения (3.1). Опираясь на вышеприведенные рассуждения и определение регуляризующего оператора, вполне оправдано предположение выбора в качестве приближенного решения уравнения (3.1) регуляризованного решения.

Таким образом, задача нахождения приближенного решения уравнения (3.1), обладающего устойчивостью к малым возмущениям правой части, сводится:

a) к нахождению регуляризующих операторов;

b) к определению параметра регуляризации α.

Вышеприведенный метод построения приближенных решений называется *методом регуляризации*.

Так, например, рассмотренная в первом параграфе задача дифференцирования, может быть решена с помощью следующего оператора

$$R(u,\alpha) = \frac{u(x+\alpha)-u(x)}{\alpha}\,.$$

Действительно, пусть вместо точной функции $u(x)$ мы имеем ее приближение $u_\delta(x) = u(x) + v(x)$, где $|v(x)| \leq \delta$ для любого x. Тогда

$$R(u_\delta,\alpha) = \frac{u(x+\alpha)-u(x)}{\alpha} + \frac{v(x+\alpha)-v(x)}{\alpha}.$$

При $\alpha \to 0$ первое слагаемое стремится к du/dx. Что касается второй дроби, имеем

$$\left|\frac{v(x+\alpha)-v(x)}{\alpha}\right| \leq \frac{2\delta}{\alpha}.$$

Взяв $\alpha = \delta/\eta(\delta)$, где $\eta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, получим $\frac{2\delta}{\alpha} = 2\eta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и, следовательно, при $\alpha = \alpha_1(\delta) = \frac{\delta}{\eta(\delta)}$

$$R(u_\delta, \alpha_1(\delta)) \to \frac{du}{dx}.$$