§2. Об интегральном уравнении Фредгольма первого рода.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad c \le x \le d, \tag{2.1}$$

где $z(s)$ - искомое решение, $z \in C$, $u(x)$ - заданная функция, $u \in L_2$. Предположим, что функция (ядро) $K(x.s)$ непрерывна по x и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial K}{\partial x}$.

В операторном виде уравнение (2.1) можно записать так

$$Az = u,$$

где $A: C \to L_2$ - линейный оператор, определяемый интегралом (2.1). Напомним [6], что метрики пространств C и L_2 определяются соответственно формулами

$$\rho_C(z_1, z_2) = \max\nolimits_{[a,b]}|z_1(s) - z_2(s)|,$$

$$\rho_{L_2}(u_1, u_2) = \sqrt{\int_c^d |u_1(x) - u_2(x)| dx}.$$

Пусть $z_1(s)$ - решение уравнения (2.1) при правой части $u = u_1(x)$. Теперь, допустим, что вместо функции $u_1(x)$ нам известно лишь ее приближение $u_2(x)$, мало отличающееся в смысле метрики L_2 от $u_1(x)$. В частности, правая часть $u_2(x)$ может быть получена в ходе эксперимента и соответственно нельзя исключать существование «угловых» точек, в которых функция $u_2(x)$ не дифференцируема. При такой правой части $u_2(x)$ уравнение (2.1) не имеет классического решения, т.е. решения определяемого формулой $z = A^{-1}u$, где $A^{-1} -$ *оператор,* обратный оператору A. Объясняется это тем, что ядро $K(x, s)$ имеет непрерывную производную по второму аргументу, что соответственно должно повлечь существование непрерывной производной правой части по x.

Таким образом, в качестве приближенного к $z_1(s)$ «решения» уравнения (2.1) нельзя брать точное решение данного уравнения с приближенно известной правой частью $u_2(x) \sim u_1(x)$, так как такого решения может не существовать. Кроме того, классическое решение уравнения (2.1) не обладает свойством устойчивости к малым возмущениям правой части $u(x)$. Следовательно, возникает резонный вопрос: что следует понимать под приближенным «решением» уравнения (2.1) с приближенно известной правой частью? Ответ на этот вопрос и механизм поиска такого решения можно найти в следующем параграфе.