§1. Понятие корректно поставленных и некорректно поставленных задач.

Решение любой количественной задачи, как правило, состоит в нахождении решения z по заданным исходным данным u, $z = R(u)$. Пусть F и U метрические пространства соответственно с метриками $\rho_F(z_1, z_2)$ и $\rho_U(u_1, u_2)$, $z_1, z_2 \in F$, $u_1, u_2 \in U$. Выбор метрики определяется постановкой задачи.

Предположим каждому элементу $u \in U$ соответствует единственное решение $z = R(u)$, $z \in F$. Приведем некоторые определения [1].

Задача определения решения $z = R(u)$ из пространства F по исходным данным $u \in U$ называется *устойчивой* на пространствах (F, U), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_U(u_1, u_2) \leq \delta(\varepsilon)$ следует $\rho_F(z_1, z_2) \leq \varepsilon$, где

$$z_1 = R(u_1), \qquad z_2 = R(u_2); \qquad u_1, u_2 \in U, \quad z_1, z_2 \in F.$$

Задача определения решения z из пространства F по «исходным данным» u из пространства U называется *корректной поставленной на паре метрических пространств* (F, U), если удовлетворяются требования (условия):

1) для всякого элемента $u \in U$ существует решение z из пространства F;
2) решение определяется однозначно;
3) задача устойчива на пространствах (F, U).

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются *некорректно поставленными*.

Рассмотрим пример некорректно поставленной задачи. Пусть $z_1(t)$ - производная функции $u_1(t)$. Возьмем функцию $u_2(t) = u_1(t) + N sin\omega t$. В метрике пространства C она отличается от $u_1(t)$ на величину $\rho_C(u_1, u_2) = |N|$ при любых значениях ω. В то же время производная $z_2(t) = u'_2(t)$ разнится от $z_1(t)$ в метрике C на величину $|N\omega|$, которая может быть сколь угодно большой за счет выбора больших значений $|\omega|$.

Заметим, что при других метриках множеств F и U выше рассмотренная задача дифференцирования, может быть и корректно поставленной на паре метрических пространств (F, U).

Возьмем в качестве U пространство $C^1[a, b]$, а в роли F пространство $C[a, b]$. Тогда, как известно [6],

$$\rho_U(u_1, u_2) = \sum_{k=0}^{1} \max_{[a,b]} \left| u_1^{(k)}(t) - u_2^{(k)}(t) \right|,$$

$$\rho_F(z_1, z_2) = \max_{[a,b]} |u_1(t) - u_2(t)|.$$

Очевидно, задача дифференцирования на такой паре метрических пространств (F, U) будет корректно поставленной.