9. Тождество Бесселя и приложения для основной тригонометрической системы функций

Пусть 2π–периодическая функция $f(x)$ является интегрируемой с квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Заметим, что в общей тригонометрической системе функций в качестве первой функции вместо единицы можно взять $\frac{1}{2}$. Тогда она примет вид

$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$

Ряд Фурье по этой системе имеет тот же вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right], \qquad (1)$$

где

$$s_n(x) = s_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \qquad (2)$$

– частичные суммы ряда Фурье

Действительно, с использованием (2) и ортогональности любых двух функций из данной системы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] dx +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right]^2 dx =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\left[\frac{a_0}{2}\cdot\pi a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\pi a_k + b_k\pi b_k)\right] + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0^2}{4}dx +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_k^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx + b_k^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\right]dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

(Здесь использовали ортогональность системы и $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$.)

Равенство (1) называется **тождеством Бесселя** для общей тригонометрической системы (оно верно относительно любого n).

Из (1) следует неравенство Бесселя в случае тригонометрической системы

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k)^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < +\infty; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда, переходя к пределу в левой части при $n \to \infty$ (в силу монотонности предел существует), получим сходимость ряда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k)^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

В том случае, когда это неравенство переходит в равенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k)^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx, \tag{3}$$

говорят, что выполняется **равенство Парсеваля** или уравнение замкнутости.

Как следует из тождества Бесселя (1), равенство Парсеваля (3) имеет место только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x) - s_n(x)]^2dx = 0. \tag{4}$$

Если выполняется раввенство (4), то говорят, что **ряд Фурье сходится** к самой функции $f(x)$ **в среднеквадратичном**.

(Дело в том, что величина $d(f,g) = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ обладает свойствами расстояния: 1) $d(f,g) \geqslant 0$; 2) $d(f,g) \leqslant d(f,\varphi) + d(\varphi,g)$;...)