8. Квадратичное уклонение и минимальное свойство коэффициентов Фурье

Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и интегрируема с квадратом.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ ортогональную систему функций с интегрируемым квадратом

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

Составим многочлен n–го порядка по этой системе:

$$\sigma_n(x) = \gamma_0\varphi_0(x) + \gamma_1\varphi_1(x) + \dots + \gamma_n\varphi_n(x), \tag{1}$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ – числовые коэффициенты.

Все функции $\varphi_n(x)$ являются функциями с интегрируемым квадратом, поэтому и многочлен $\sigma_n(x)$, и разности $f(x) - \sigma_n(x)$ $(n = 0, 1, \dots, n)$ являются функциями с интегрируемым квадратом.

Рассмотрим величину

$$\delta_n = \int\limits_a^b (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx, \tag{2}$$

которую будем называть **квадратичным уклонением** многочлена $\sigma_n(x)$ от функции $f(x)$.

Данная мера уклонения многочлена $\sigma_n(x)$ от функции позволяет исследовать сходимость рядов Фурье в среднеквадратичном.

Рассмотрим задачу: приданном n выбрать коэффициенты $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ так, чтобы квадратичное уклонение σ_n было наименьшим.

Из (2) следует:

$$\delta_n = \int\limits_a^b f^2(x)dx - 2\int\limits_a^b f(x)\sigma_n(x)dx + \int\limits_a^b \sigma_n^2(x)dx. \tag{3}$$

В силу (1)

$$\int\limits_a^b f(x)\sigma_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)\sum_{k=0}^n \gamma_k\varphi_k(x)dx = \sum_{k=0}^n \gamma_k \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx.$$

Но согласно формулам для коэффициентов Фурье по системе $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = c_k \int\limits_a^b \varphi_k^2(x)dx = c_k\|\varphi_k\|^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где c_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, и поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)\sigma_n(x)dx = \sum_{k=0}^n \gamma_k c_k\|\varphi_k\|^2. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_a^b \sigma_n^2(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=0}^n \gamma_k\varphi_k(x)\right)^2 dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\sum_{k=0}^n \gamma_k^2\varphi_k^2(x) + \sum_{p\neq q} \gamma_p\gamma_q\varphi_p(x)\varphi_q(x)\right) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^n \gamma_k^2 \int\limits_a^b \varphi_k^2(x)dx + \sum_{p\neq q} \gamma_p\gamma_q \int\limits_a^b \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx.$$

В силу ортогональности системы $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ последняя сумма равна нулю. Таким образом,

$$\int\limits_a^b \sigma_n^2(x)dx = \sum_{k=0}^n \gamma_k^2\|\varphi_k\|^2. \tag{5}$$

(4) и (5) подставляем в (3). Получим:

$$\delta_n = \int\limits_a^2 f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^n \gamma_k c_k\|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=0}^n \gamma_k^2\|\varphi_k\|^2 =$$

$$= \int\limits_a^2 f^2(x)dx + \sum_{k=0}^{n}(c_k - \gamma_k)^2\|\varphi_k\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\|\varphi_k\|^2.$$

Здесь $\int\limits_a^b f^2(x)dx = const$ (так как $f(x)$ – функция с интегрируемым квадратом), $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2\|\varphi_k\|^2 = const$ (не зависят от $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$), поэтому величина σ_n будет минимальной тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{n}(c_k - \gamma_k)^2\|\varphi_k\|^2 = 0.$$

А это равенство равносильно условиям

$$\gamma_k = c_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Итак, *квадратичное уклонение будет минимальным в том случае, когда коэффициенты многочлена $\sigma_n(x)$ являются коэффициентами Фурье.* (Поэтому вместо многочлена $\sigma_n(x)$ в (2) можно взять частичную сумму ряда Фурье по данной ортогональной системе. В этом случае получается минимальное квадратичное уклонение Δ_n.)

Обозначим минимальное уклонение

$$\Delta_n = \int\limits_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\|\varphi_k\|^2. \quad (6)$$

Таким образом, с ростом n частичные суммы ряда Фурье дают более точное приближение функции $f(x)$ среди всех обобщенных полиномов по данной ортогональной системе функций (за меру погрешности принято квадратичное уклонение).

Получим теперь важное для исследования общих рядов Фурье неравенство Бесселя.

Так как $\Delta_n \geqslant 0$, то из (6) следует, что

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx \geqslant \sum_{k=0}^{n} c_k^2\|\varphi_k\|^2.$$

в этом неравенство n – произвольно. Сумма справа с ростом n может только возрастать. Так как интеграл слева равен конечному числу, то эта сумма огранична и при $n \to \infty$ имеет конечный предел. Получаем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

сходится и

$$\int_a^b f^2(x)dx \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2. \tag{7}$$

Полученное неравенство называется **неравенством Бесселя.**

Так как ряд справа сходится, то (выполняется необходимое условие сходимости)

$$\lim_{n\to\infty} c_n \|\varphi_n\| = 0. \tag{8}$$

Если система $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ была нормированной, то $\|\varphi_n\| = 1$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. В этом случае неравенство Бесселя принимает вид

$$\int_a^b f^2(x)dx \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

Следовательно, ряд из квадратов коэффициентов Фурье оказывается сходящимся и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, т.е. коэффициенты Фурье стремятся к нулю при $n \to \infty$.