7. Функции с интегрируемым квадратом (на конечном промежутке)

Тригонометрические ряды Фурье определяются для абсолютно интегрируемых на конечных промежутках длины периода функций. Среди них можно выделить широкий подкласс так называемых функций с интегрируемым квадратом, ряды Фурье для которых обладают некоторыми замечательными свойствами.

Будем говорить, что функция $g(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, есть функция с интегрируемым квадратом, если существуют точки $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ такие, что:

1) на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, функция $g(x)$ является интегрируемой в собственном смысле Римана;

2) каждый интеграл $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g^2(x)dx$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ сходится.

Всякая ограниченная интегрируемая в собственном смысле функция является функцией с интегрируемым квадратом. А для неограниченных функций это не всегда так. Например, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ уже расходится.

Далее важную роль будет играть так называемое **неравенство Коши-Буняковского**, верное для любых двух интегрируемых с квадратом на данном отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$. Речь идет о следующем неравенстве:

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)dx}.$$

Действительно, при любом $x \in [a, b]$ для любых двух действительных чисел $|f(x)|$ и $|g(x)|$ выполняется неравенство $|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x))$.

Отсюда следует, что функция $|f(x)g(x)|$ интегрируема на $[a,b]$. (Если итнеграл $\int_a^b |f(x)g(x)|dx$ – несобственный, то это следует из признака сравнения сходимости несобственных интегралов, если же интеграл определеленный, то – из свойств определенного интеграла.)

Пусть λ – произвольная постоянная. Тогда

$$\int\limits_a^b (|f(x)|+\lambda|g(x)|)^2dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx+2\lambda\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx+\lambda^2\int\limits_a^b g^2(x)dx \geqslant 0.$$

Обозначим $\int\limits_a^b f^2(x)dx = A$, $\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx = B$, $\int\limits_a^b g^2(x)dx = C$.

Получим неравенство $A + 2B\lambda + C\lambda^2 \geqslant 0$ при любом λ.

Значит, квадратный трехчлен $A+2B\lambda+C\lambda^2$ не может иметь различных действительных корней. Поэтому его дискриминант $D = B^2-AC \leqslant 0$ или $B^2 \leqslant AC$.

Подставив вместо A, B, C свои значения, получим требуемое неравенство Коши-Буняковского.

Заметим, что из неравенства Коши-Буняковского имеем: сумма любого конечного числа функций с интегрируемым квадратом является функцией с интегрируемым квадратом.