6. Ряды Фурье по общим ортонормированным системам функций

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[a, b]$ и является суммой равномерно сходящегося ряда по ортогональной системе непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \tag{1}$$

то есть всюду на $[a, b]$ выполняется равенство

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \ldots, \tag{2}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ – постоянные.

Умножим ряд (2) на функцию $\varphi_n(x)$, получим

$$\begin{aligned} &f(x)\varphi_n(x) = c_0\varphi_0(x)\varphi_n(x) + c_1\varphi_1(x)\varphi_n(x) + c_2\varphi_2(x)\varphi_n(x) + \ldots \\ &+c_n\varphi_n^2(x) + c_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\varphi_n(x) + \ldots \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{3}$$

В силу равномерной сходимости ряда (3) его можно почленно интегрировать по отрезку $[a, b]$.

Так как система (1) ортогональна, получим:

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = c_n \int_a^b \varphi_n^2(x)dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(В силу ортогональности системы (1), все остальные слагаемы будут равны нулю.)

Отсюда

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx} = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\|\varphi_n\|^2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Коэффициенты, вычисляемые по формулам (4), называются **коэффициентами Фурье** функции $f(x)$ по системе (1), а соответствующий ряд – ее **рядом Фурье** по этой системе.

Если система функций (1) нормирована, то $\|\varphi_n\|^2 = 1$ и формулы для коэффициентов Фурье приобретают более простой вид:

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{5}$$

До установления сходимости ряда Фурье к рассматриваемой функции $f(x)$ принято писать

$$f(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$$

Из свойства равномерно сходящихся рядов как следствие получим следующее утверждение.

Теорема 0.1. *Если функции системы* (1) *непрерывны и для* $f(x)$ *имеет место равенство* (2)*, причем ряд справа сходится равномерно, то этот ряд есть ряд Фурье для* $f(x)$*.*

Действительно, если функции системы (1) непрерывны и ряд справа в (2) равномерно сходится, то можно легко доказать равномерную сходимость ряда (3), а следовательно и возможность почленного интегрирования ряда (3).