5. Определение и примеры тригонометрических рядов Фурье

В случае основной тригонометрической системы

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots,$$

ортогональной на любом отрезке длины 2π, тригонометрической ряд Фурье определяется для 2π–периодической функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на отрезке длины периода, например, $[-\pi, \pi]$.

Напомним, что функция $g(x)$ называется абсолютно интегрируемой на данном отрезке $[a, b]$, если существуют точки $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ такие, что:

1) на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, функция $g(x)$ является интегрируемой в собственном смысле Римана;

2) каждый интеграл $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|dx$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ сходится.

Например, если функция $g(x) = 1$ во всех рациональных точках и $g(x) = -1$ во всех иррациональных точках, то $g(x)$ не является абсолютно интегрируемой на отрезке $[a, b]$ (при $a < b$), так как она не является интегрируемой в собственном смысле ни на каком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ при $\alpha < \beta$.

Заметим, что в этом случае, очевидно, существует собственный интеграл $\int\limits_a^b |g(x)|dx$.

Пусть теперь данная функция $f(x)$ является 2π–периодической и абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда в силу непрерывности каждой функции из основной тригонометрической системы существуют интегралы

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \ (n = 0, 1, \dots), \ \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тригонометрический ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{1}$$

называется **рядом Фурье** функции $f(x)$, если эта функция связана с коэффициентами ряда (1) с помощью следующих равенств:

$$\begin{aligned} a_n&=\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx\ (n=0,1,\dots),\\ b_n&=\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx\quad (n=1,2,\dots). \end{aligned} \tag{2}$$

Аналогично, система функций

$$1,\cos\frac{\pi x}{\ell},\sin\frac{\pi x}{\ell},cos\frac{2\pi x}{\ell},\sin\frac{2\pi x}{\ell},\dots,\cos\frac{\pi nx}{\ell},\sin\frac{\pi nx}{\ell},\dots,$$

ортогональна на любом отрезке длины 2ℓ.

Поэтому рядом Фурье 2ℓ–периодической функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на отрезке длины периода $[-\ell,\ell]$, называется тригонометрический ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell}+b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell}, \tag{3}$$

если эта функция связана с коэффициентами ряда (3) с помощью следующих равенств:

$$\begin{aligned} a_n&=\tfrac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\tfrac{\pi nx}{\ell}dx\ (n=0,1,\dots),\\ b_n&=\tfrac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\tfrac{\pi nx}{\ell}dx\ (n=1,2,\dots). \end{aligned} \tag{4}$$

Коэффициенты a_n и b_n, вычисленные по формулам (2) и (4), называются **коэффициентами Фурье** для функции $f(x)$.

Заметим, что в формулах (2) интегрируются функции периода 2π. Поэтому отрезок интегрирования $[-\pi,\pi]$ может быть заменен любым другим отрезком длины периода 2π. Другими словами, для коэффициентов ряда Фурье (при любом действительном числе a) получаем формулы вида

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,\dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,\dots). \end{aligned} \tag{5}$$

Вполне аналогично обстоит дело в случае 2ℓ–периодических функций.

Ряд Фурье данной 2π–периодической функции функции $f(x)$ принято обозначать так:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

пока не решен вопрос сходимости этого ряда Фурье к самой функции.

Такая запись означает, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье, написанный справа. Знак равенства можно поставить, когда уже доказана сходимость ряда к функции $f(x)$.

Пусть для функции $f(x)$ периода 2π имеет место равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{6}$$

причем ряд справа сходится равномерно на отрезке длины периода $[-\pi, \pi]$.

Постоянное слагаемое здесь обозначено через $\frac{a_0}{2}$ для симметрии формул (2).

Найдем коэффициенты a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \dots$, зная функцию $f(x)$. В силу равномерной сходимости ряда (6) его можно почленно интегрировать в пределах от $-\pi$ до π. Тогда получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right).$$

Так как основная тригонометрическая система функций ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$, все интегралы под знаком суммы равны нулю.

Поэтому

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 \text{ или } a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Умножим обе части равенства (6) на $\cos kx$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π. Получим:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx\right).$$

В силу ортогональности тригонометрической системы функций, все интегралы справа равны нулю, кроме одного:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi.$$

Отсюда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Аналогично найдем, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = b_n \pi \text{ или } b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Значит, для коэффициентов Фурье a_n и b_n функции $f(x)$ получены требуемые формулы (2). Другими словами, доказана

Теорема 0.1. *Если для функции $f(x)$ периода 2π имеет место разложение в некоторый равномерно сходящийся на отрезке периода тригонометрический ряд, то этот ряд и есть ряд Фурье для $f(x)$.*

Фактически справедливо более общее утверждение, которое приведем без доказательства.

Теорема 0.2. *Если абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ периода 2π разлагается в некоторый тригонометрический ряд, сходящийся к ней всюду за исключением, быть может, конечного числа значений (для одного периода), то этот ряд и есть ряд Фурье для $f(x)$.*

В заключение приведем ряды Фурье и формулы коэффициентов Фурье для других часто применяемых тригонометрических рядов Фурье.

1) Для системы

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots,$$

ортогональной на отрезке $[0, \pi]$, ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots,$$

где

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\int_0^\pi f(x)dx}{\int_0^\pi 1dx} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{\int_0^\pi f(x) \cos nxdx}{\int_0^\pi \cos^2 nxdx} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x) \cos nxdx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Получили те же формулы, что и для ряда Фурье по косинусам.

2) Для системы

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots,$$

ортогональной на отрезке $[0, \pi]$, ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx + \dots,$$

где

$$b_n = \frac{\int_0^\pi f(x) \sin nxdx}{\int_0^\pi \sin^2 nxdx} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Получили те же формулы, что и для ряда Фурье по синусам.

3) Для системы

$$1, \cos\frac{\pi x}{\ell}, \cos\frac{2\pi x}{\ell}, \dots, \cos\frac{\pi n x}{\ell}, \dots,$$

ортогональной на отрезке $[0, \ell]$, ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{\ell},$$

где

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\int_0^\ell f(x)dx}{\int_0^\ell 1dx} = \frac{1}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{\int_0^\ell f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx}{\int_0^\ell \cos^2\frac{\pi n x}{\ell}dx} = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

4) Для системы

$$\sin\frac{\pi x}{\ell}, \sin\frac{2\pi x}{\ell}, \dots, \sin\frac{\pi n x}{\ell}, \dots,$$

ортогональной на отрезке $[0, \ell]$, ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{\ell},$$

где

$$b_n = \frac{\int_0^\ell f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx}{\int_0^\ell \sin^2\frac{\pi n x}{\ell}dx} = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

5) Рассмотрим систему

$$\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \dots, \sin(2n+1)x, \dots,$$

которая ортогональна на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ряд Фурье по этой системе имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(2n+1)x,$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n+1)xdx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2n+1)xdx} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Так как $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2n+1)xdx = \frac{\pi}{4}$, получаем

$$c_n = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n+1)xdx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Пусть теперь $f(x)$ определена на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$. Продолжим ее на отрезок $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ четным образом. Получим определенную на $[0, \pi]$ функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$. Функцию $g(x)$ разложим в ряд по синусам (что равносильно нечетному продолжению $g(x)$ на отрезок $[-\pi, 0]$).

Получим

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} g(x)\sin nxdx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Заметим теперь, что функции системы V четны относительно $x = \frac{\pi}{2}$, т.е. для них $\varphi_n(\frac{\pi}{2} - h) = \varphi_n(\frac{\pi}{2} + h)$. Действительно, для $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\sin(2n+1)(\frac{\pi}{2}-h) = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\cos(2n+1)h - \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\sin(2n+1)h =$$

$$= \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\cos(2n+1)h + \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\sin(2n+1)h = \sin(2n+1)(\frac{\pi}{2}+h),$$

так как $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$.

Поэтому из четности относительно $x = \frac{\pi}{2}$ функций $g(x)$ и $\sin(2n+1)x$ следует

$$b_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} g(x)\sin(2n+1)xdx = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n+1)xdx \, (n = 0, 1, 2, \dots).$$

С другой стороны, функции $\sin 2nx$ $(n = 1, 2, \dots)$ нечетные относительно $x = \frac{\pi}{2}$ $(\varphi_n(\frac{\pi}{2} - h) = -\varphi_n(\frac{\pi}{2} + h))$, так как

$$\sin 2n(\frac{\pi}{2} - h) = \sin \pi n \cos 2nh - \cos \pi n \sin 2nh =$$

$$= -(\sin \pi n \cos 2nh + \cos \pi n \sin 2nh) = -\sin 2n(\frac{\pi}{2} + h).$$

Поэтому произведения $g(x) \sin 2nx$ $(n = 1, 2, \dots)$ являются нечетными относительно $x = \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} g(x) \sin 2nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, функция $g(x)$, а значит и $f(x)$, оказывается разложенной в ряд по синусам, все четные коэффициенты которого равны нулю. Нечетные же коэффициенты даются формулами

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} g(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

совпадающими с формулами

$$c_n = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2n+1) x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Этот пример показывает, что свойства коэффициентов Фурье, справедливые для функций периода 2π, имеют место и в случае функций, получающихся из $f(x)$ сначала четным продолжением на отрезок $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, затем – нечетным продолжением полученной функции на отрезок $[-\pi, 0]$, и наконец, периодическим продолжением результата (с периодом 2π) на всю ось Ox.