

4. Важные примеры ортогональных систем

Основной тригонометрической системой называется система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (1)$$

Все эти функции имеют общий период 2π (хотя некоторые $\sin nx$ и $\cos nx$ имеют и меньший период $\frac{2\pi}{n}$).

При $n \neq 0$ рассмотрим следующие интегралы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi. \quad (3)$$

Для любых целых m и n , $m \neq n$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0. \quad (4)$$

Для любых целых m и n имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0. \quad (5)$$

Отсюда видно, что интеграл от произведения двух любых различных функций равен нулю. Значит, система основных тригонометрических функций (1) ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Так как для периодической функции интеграл по любому отрезку длины, равной периоду, имеет равные значения, формулы (2)–(5) справедливы и для любого отрезка $[a, a + 2\pi]$. Значит, система (1) ортогональна на любом таком отрезке.

Аналогично можно показать, что общая тригонометрическая система функций

$$1, \cos \frac{\pi x}{\ell}, \sin \frac{\pi x}{\ell}, \dots, \cos \frac{\pi n x}{\ell}, \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \dots \quad (6)$$

с общим периодом 2ℓ ортогональна на всяком отрезке длины 2ℓ .

Теперь рассмотрим тригонометрические системы.

I. Система

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$$

ортогональна на отрезке $[0, \pi]$.

Ортогональность доказать самостоятельно!

II. Система

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$$

ортогональна на отрезке $[0, \pi]$.

Ортогональность доказать самостоятельно!

III. Система

$$1, \cos \frac{\pi x}{\ell}, \cos \frac{2\pi x}{\ell}, \dots, \cos \frac{\pi n x}{\ell}, \dots,$$

ортогональна на отрезке $[0, \ell]$.

Ортогональность доказать самостоятельно!

IV. Система

$$\sin \frac{\pi x}{\ell}, \sin \frac{2\pi x}{\ell}, \dots, \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \dots,$$

ортогональна на отрезке $[0, \ell]$.

Ортогональность доказать самостоятельно!