3. Системы ортогональных функций. Норма функции

Две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на данном отрезке $[a, b]$, называются ортогональными на этом отрезке, если выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

(при этом из определения не исключаются функции, эквивалентные нулю; как известно, в случае векторов ортогональность определяется для ненулевых векторов).

Рассмотрим бесконечную систему действительных функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{1}$$

на отрезке $[a, b]$. Будем считать эти функции интегрируемыми в собственном смысле на отрезке $[a, b]$. Тогда существует интеграл по отрезку $[a, b]$ от произведения любых двух функций из этой системы.

Говорят, что система функций (1) **ортогональна** на отрезке $[a, b]$, если для любых двух разных функций этой системы выполняется равенство

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0. \tag{2}$$

Будем также предполагать (чтобы исключить эквивалентную нулю функцию) всегда, что

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Из условия (3) вытекает, что никакая из функций этой системы не равна тождественно нулю.

Система функций (1) называется **нормированной**, если

$$\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{4}$$

Система функций (1) называется **ортонормированной** на отрезке $[a, b]$, если все функции нормированы и взаимно ортогональны на этом отрезке.

Всякую ортогональную систему функций можно нормировать, то есть можно подобрать постоянные $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$, так, чтобы система функций

$$\mu_0\varphi_0(x), \mu_1\varphi_1(x), \mu_2\varphi_2(x), \dots,$$

которая по-прежнему ортогональна, была и нормированной.

Действительно, из условия

$$\int\limits_a^b \mu_n^2\varphi_n^2(x)dx = \mu_n^2\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

следует, что $\mu_n = \dfrac{1}{\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}}$.

Величину

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

будем называть **нормой функции** $\varphi_n(x)$.

Если система функций (1) нормирована, то, очевидно, $\|\varphi_n\| = 1$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$.