2. Виды сходимости функциональных рядов

Рассмотрим теперь функциональный ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in E.$$

Он называется **сходящимся** в данной точке $x_0 \in E$, если для его частичных сумм

$$s_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x_0) = s(x_0)$. Величина $s(x_0)$ называется тогда **суммой** ряда в точке x_0.

Если такая сходимость имеет место в каждой точке множества E, то говорим, что **функциональный ряд сходится на множестве** E. Это означает **поточечную сходимость** на множестве E последовательности частичных сумм $s_n(x)$ к функции $s(x)$ при $n \to \infty$.

Таким образом, сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на множестве E означает, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ является суммой ряда, т.е. в каждой точке $x \in E$ выполняется равенство

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = s(x).$$

Обозначим остаток ряда через $r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$. Тогда в случае сходимости ряда выполняется равенство $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$, т.е. $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$.

Функциональный ряд называется **равномерно сходящимся на множестве** E, если последовательность частичных $s_n(x)$ равномерно сходится к функции $s(x)$ на множестве E или остаток $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю на E.

Критерий равномерной сходимости функционального ряда. Для того чтобы функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|r_n(x)| = 0.$$

Заметим, что необходимым условием равномерной сходимости ряда на множестве E является равномерная сходимость к нулю на этом множестве общего члена ряда $f_n(x)$.

Если для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ существует числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ такой, что $|f_n(x)| \leqslant c_n$, $n = 1, 2, \ldots$, для любого $x \in E$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ называется **мажорантным рядом** для данного функционального ряда.

Признак Вейерштрасса (достаточный признак равномерной сходимости). Если для функционального ряда, определенного на множестве E, существует сходящийся мажорантный ряд, то функциональный ряд равномерно сходится на множестве E.

Замечание. Если мажорантный ряд расходится, то нельзя сказать, что функциональный ряд расходится.

Будем говорить, что для интегрируемых в собственном смысле функций ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **сходится в среднем квадратичном** на отрезке $[a, b]$ к сумме $s(x)$, если последовательность частичных сумм этого ряда сходится в среднем квадратичном к предельной функции $s(x)$ на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b (s_n(x) - s(x))^2 dx = 0.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 0.1. *1. Если члены функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *и ряд сходится* **равномерно** *на этом отрезке,то*

а) сумма $s(x)$ *ряда является непрерывной функцией на отрезке* $[a, b]$, *б) ряд можно интегрировать почленно, т.е.*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

2. Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится, его члены дифференцируемы и ряд из производных* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ **равномерно** *сходится на* $[a, b]$, *то сам ряд можно почленно дифференцировать, т.е.*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Периодические функции.

Функция $f(x)$ называется **периодической**, если существует постоянное число $T > 0$, для которого $f(x \pm T) = f(x)$ для любого x из области определения функции. При этом число T называется **периодом** функции.

Периодические функции встречаются во многих приложениях математики к задачам физики и техники.

Сумма, разность, произведение и частное функций периода T всегда дают функции того же периода.

Если T – период функции $f(x)$, то числа $2T, 3T, \ldots$ также будут периодами этой же функции.

Напомним основное свойство периодической функции:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$$

для любых чисел a и b.

Гармоники.

Функция вида $y = A\sin(\omega x+\varphi)$, где A, ω, φ – постоянные, постоянные, называют **гармоникой** с амплитудой $|A|$, частотой ω и начальной фазой φ.

Гармоника имеет период $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Всякую гармонику можно представить в виде:

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) = A(\cos\omega x \sin\varphi + \sin\omega x \cos\varphi) =$$

$$= A\sin\varphi\cos\omega x + A cos\varphi \sin\omega x = a\cos\omega x + b\sin\omega x,$$

где $a = A sin\varphi$, $b = A\cos\varphi$.

Можно также сказать, что всякая функция вида $a\cos\omega x + b\sin\omega x$ есть гармоника, где $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $sin\varphi = \dfrac{a}{A} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $cos\varphi = \dfrac{b}{A} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Возьмем период $T = 2\ell$. Тогда $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, откуда $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\ell} = \dfrac{\pi}{\ell}$.

Значит, гармоника с периодом $T = 2\ell$ может быть записана в виде:

$$a\cos\frac{\pi x}{\ell} + b\sin\frac{\pi x}{\ell}.$$

Тригонометрические многочлены и ряды.

Рассмотрим период $T = 2\ell$ и рассмотрим гармоники

$$a_k\cos\frac{\pi k x}{\ell} + b_k\sin\frac{\pi k x}{\ell} \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

с частотами $\omega_k = \dfrac{\pi k}{\ell}$ и периодами $T_k = \dfrac{2\pi}{\omega_k} = \dfrac{2\ell}{k}$. Отсюда $kT_k = 2\ell = T$ и, значит, $T = 2\ell$ является периодом для всех гармоник вида (1).

Поэтому сумма вида

$$s_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{\pi k x}{\ell} + b_k\sin\frac{\pi k x}{\ell}\right),$$

где A – постоянная, будучи суммой функций периода 2ℓ, есть функция того же периода.

Функцию $s_n(x)$ будем называть **тригонометрическим многочленом** порядка n (периода 2ℓ).

Сумма тригонометрического ряда

$$A + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{\ell} + b_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} \right)$$

(если он сходится) является также функцией периода 2ℓ.

Поэтому возникает **вопрос:** нельзя ли всякую заданную функцию $f(x)$ периода $T = 2\ell$ представить в виде тригонометрического ряда?

Такое представление возможно для достаточно широкого класса функций.

Если

$$f(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{\ell} + b_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} \right),$$

то, положив $t = \dfrac{\pi x}{\ell}$, найдем

$$\varphi(t) = f\left(\frac{t\ell}{\pi}\right) = A + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right).$$

Гармоники этого ряда имеют общий период 2π. Поэтому достаточно уметь решать задачу разложения в тригонометрический ряд для функций периода 2π.