# 15. Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке длины $2\pi$

В приложения очень часто возникает задача о разложении в тригонометрический ряд функции $f(x)$, заданной только на отрезке $[-\pi, \pi]$. В этом случае функцию $f(x)$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ периодически продолжаем на всю ось $Ox$. При этом получаем периодическую функцию, совпадающую с $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, для которой ряд Фурье будет тождественным с рядом Фурье для $f(x)$.

Таким образом, говорить о ряде Фурье для $f(x)$, заданной на $[-\pi, \pi]$, – это все равно, что говорить о ряде Фурье для функции, получающейся из $f(x)$ периодическим продолжением на ось $Ox$.

Если при этом $f(-\pi) = f(\pi)$, то периодическое продолжение будет непрерывным на всей оси $Ox$ и никаких затруднений не возникает.

Если же $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то периодическое продолжение $f(x)$ на всю ось $Ox$ будет иметь разрывы во всех точках вида $x = (2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, как бы мы не изменяли значения функции при $x = \pi$ и $x = -\pi$.

**Признак сходимости ряда Фурье.** *Ряд Фурье кусочно-гладкой (непрерывной или разрывной) функции $f(x)$ периода $2\pi$ сходится для всех значений $x$, причем его сумма равна $f(x)$ в каждой точке непрерывности и равна числу $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ в каждой точке разрыва.*

*Если $f(x)$ всюду непрерывна, то ряд сходится абсолютно и равномерно.*

Что же будет происходить на концах отрезка $[-\pi, \pi]$?

Возможны два случая:

1) $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда периодическое продолжение приводит к непрерывной функции. В силу нашего признака и в концах отрезка ряд будет сходится к $f(x)$.

2) $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Тогда периодическое продолжение будет иметь разрывы в точках $-\pi$ и $\pi$, а также во всех точках вида $x = (2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. При этом $f(-\pi - 0) = f(\pi)$, $f(-\pi + 0) = f(-\pi)$, $f(\pi + 0) = f(-\pi)$, $f(\pi - 0) = f(\pi)$. Значит, при $x = -\pi$ и $x = \pi$ ряд будет сходиться к значениям

$$\frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(-\pi-0)) = \frac{1}{2}(f(\pi+0) + f(\pi-0)) = \frac{1}{2}(f(-\pi) + f(\pi)).$$

Таким образом, для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и непрерывной при $x = -\pi$ и $x = \pi$ ряд Фурье ведет себя в этих точках, как и в других точках непрерывности при условии $f(-\pi) = f(\pi)$.

Если же $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то ряд не может сходиться к $f(x)$ при $x = -\pi$ и $x = \pi$, поэтому задачу о разложении $f(x)$ в ряд Фурье имеет смысл ставить для $x \in (-\pi, \pi)$.

## 16. Случай функции, четной или нечетной относительно точки, отличной от нуля

Пусть $f(x)$ задана на некотором отрезке оси $Ox$, симметричном относительно точки $x = \ell$, или же задана на всей оси $Ox$.

Скажем, что $f(x)$ четная относительно $x = \ell$, если для каждого $h$ выполняется равенство $f(\ell - h) = f(\ell + h)$. Это означает, что график функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = \ell$.

Для такой функции, очевидно, $\int\limits_{\ell-a}^{\ell+a} f(x)dx = 2\int\limits_{\ell-a}^{\ell} f(x)dx$. В частности, при $a = \ell$ имеем $\int\limits_{0}^{2\ell} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\ell} f(x)dx$.

Скажем, что $f(x)$ нечетная относительно $x = \ell$, если для каждого $h$ выполняется равенство $f(\ell - h) = -f(\ell + h)$. Это означает, что график функции $f(x)$ симметричен относительно точки $(\ell, 0)$.

Для нечетной относительно $x = \ell$ функции имеем $\int\limits_{\ell-a}^{\ell+a} f(x)dx = 0$. В частности, при $a = \ell$ имеем $\int\limits_0^{2\ell} f(x)dx = 0$.