14. Функции периода 2ℓ

Если нужно разложить в тригонометрический ряд функцию $f(x)$ периода 2ℓ, то (делая замену переменной $x = \frac{\ell t}{\pi}$, затем обратную замену $t = \frac{\pi x}{\ell}$) получаем:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Коэффициенты и здесь называются коэффициентами Фурье для $f(x)$, а ряд – рядом Фурье для $f(x)$.

В частности, вместо функции $f(x)$ периода 2ℓ можно рассматривать функцию, заданную на отрезке $[-\ell, \ell]$ (или на каком-нибудь другом отрезке длины 2ℓ), причем ряд Фурье для такой функции тождественен с рядом Фурье ее периодического продолжения на всю ось Ox.

В случае четной функции $f(x)$ для коэффициентов Фурье получаем:

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В случае же нечетной функции $f(x)$ получаем:

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx, \quad (n = 1, 2, \dots).$$