13. Ряды по косинусам и ряды по синусам

Пусть $f(x)$ – четная функция, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$ (или же четная периодическая функция).

Так как $\cos nx$ четная функция, то произведение $f(x)\cos nx$ также будет четной. Так как $\sin nx$ нечетная функция, то произведение $f(x)\sin nx$ будет нечетной.

Тогда для коэффициентов Фурье четной функции $f(x)$ получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, для четной функции ряд Фурье содержит только косинусы, т.е.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Пусть теперь $f(x)$ – нечетная функция, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$ (или же нечетная периодическая функция).

Так как $\cos nx$ четная функция, то произведение $f(x)\cos nx$ также будет нечетной. Так как $\sin nx$ нечетная функция, то произведение $f(x)\sin nx$ будет четной.

Тогда для коэффициентов Фурье нечетной функции $f(x)$ получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, для нечетной функции ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Часто возникает задача о разложении в ряд по косинусам или в ряд по синусам функции $f(x)$, заданной и абсолютно интегрируемой на отрезке $[0, \pi]$.

Для разложения функции в ряд по косинусам продолжим $f(x)$ четным образом с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, 0]$. Тогда для продолженной четной функции справедливы все предыдущие рассуждения.

А для разложения функции в ряд по синусам продолжаем $f(x)$ нечетным образом с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, 0]$. Тогда для продолженной нечетной функции снова применяем предыдущие рассуждения.