12. Достаточные условия (признаки)сходимости ряда Фурье в данной точке

Такие условия получаются также с использованием основной леммы Римана. Функцию $f(x)$ считаем 2π–периодической и абсолютной интегрируемой на отрезке периода длины 2π.

Педварительно преобразуем интеграл Дирихле

$$s_n(x) = s_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Имеем

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x+t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Тогда (с помощью замены $t \to -t$)

$$\int\limits_{-\pi}^{0} f(x+t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt = -\int\limits_{\pi}^{0} f(x-t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Значит,

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)]\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \qquad (1)$$

Ясно, что для $f(x) \equiv 1$ имеем $s_n(x) \equiv 1$, поэтому из (1) получаем равенство

$$1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} 2\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \qquad (2)$$

Пусть данная функция f имеет конечные пределы справа и слева в данной точке x.

Обозначим $s_0 = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$. Ясно, что $s_0 = f(x)$, если x–точка непрерывности функции f.

Тогда из (1) и (2) следует

$$s_n(x) - s_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x+t) + f(x-t) - 2s_0]\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x+t) - f(x+0) + f(x-t) - f(x-0)]\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Для краткости обозначим

$$\varphi(x,t) = f(x+t) - f(x+0) + f(x-t) - f(x-0).$$

Тогда предыдущее равенство можно представить в виде ($\forall\delta \in (0,\pi]$)

$$s_n(x) - s_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \varphi(x,t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi \varphi(x,t)\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(2n+1)\frac{t}{2}dt. \tag{3}$$

По основной лемме Римана второе слагаемой в правой части стремится к нулю при $n \to \infty$ (при $\forall\delta \in (0,\pi]$). Поэтому $s_n(x) - s_0 \to 0$ при $n \to \infty$, если первое слагаемое стремится к нулю при $\delta \to +0$.

Из (3) получим признак Дини сходимости ряда Фурье.

Признак Дини. Если отношение $\dfrac{\varphi(x,t)}{t}$ является абсолютно интегрируемой функцией в интервале $(0,\delta)$ при каком-нибудь $\delta > 0$, то ряд Фурье в точке x сходится к значению $s_0 = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Действительно, первое слагаемое в правой части равенства (3) можно представить в виде

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{\varphi(x,t)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}t dt,$$

где $\dfrac{\varphi(x,t)}{t}\cdot\dfrac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$ является абсолютно интегируемой на $[0,\delta]$. Поэтому стремится к нулю при $\lambda = \frac{2n+1}{2} \to \infty$ (по лемме Римана).

Признак Липшица. Если при некотором $0 < \alpha \leqslant 1$ и $M = const > 0$

$$|f(x+t) - f(x+0)| \leqslant Mt^\alpha, \quad |f(x-t) - f(x-0)| \leqslant Mt^\alpha \quad \forall t \in (0, \delta],$$

то ряд Фурье в точках x сходится к значению $s_0 = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

Действительно, в этом случае

$$\frac{|\varphi(x,t)|}{t} \leqslant \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} + \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{t^{\alpha-1}} + \frac{M}{t^{\alpha-1}} = \frac{2M}{t^{\alpha-1}};$$

$1 - \alpha \geqslant 0$, поэтому $\dfrac{\varphi(x,t)}{t}$ является абсолютно интегрируемой на $(0, \delta]$.

Остается применить признак Дини.

Признак Дирихле. Если существуют конечные $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$, то ряд Фурье сходится к значению $s_0 = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

Действительно, в этом случае

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{t} = f'(x \pm 0) \Rightarrow |f(x \pm t) - f(x \pm 0)| \leqslant M \cdot t$$

для $\forall M > |f'(x \pm 0)|$.

Остается применить признак Липшица.