11. Лемма Римана и принцип локализации

Речь идет о следующей основной лемме Римана.

Лемма. Если $g(t)$ является абсолютно интегрируемой на отрезке $[a,b]$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^b g(t)\cos\lambda t dt = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^b g(t)\sin\lambda t dt = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Если функция $g(t)$ является непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$, то лемма вытекает из формулы интегрирования по частям.

По определению абсолютной интегрируемости по Риману функция $g(t)$ может быть неограниченной в окрестности конечного числа точек из $[a,b]$. В силу линейности интегралов достаточно считать, что $g(t)$ может быть неограниченной лишь в окрестностях точек a и b.

По произвольному $\varepsilon > 0$ найдем сначала $\delta > 0$ такое, что

$$\int\limits_a^{a+\delta} |g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int\limits_{b-\delta}^{b} |g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Остается показать, что интегралы по отрезку $[a+\delta, b-\delta]$ при фиксированном $\delta > 0$ можно сделать сколь угодно малыми по модулю. Покажем это для случая $\cos\lambda t$.

$$\left|\int\limits_a^b g(t)\cos\lambda t dt\right| \leqslant \int\limits_a^{a+\delta} |g(t)\cos\lambda t|dt + \int\limits_{b-\delta}^{b} |g(t)\cos\lambda t|dt + \left|\int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} g(t)\cos\lambda t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^{a+\delta} |g(t)|dt + \int\limits_{b-\delta}^{b} |g(t)|dt + \left|\int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} g(t)\cos\lambda t\right|.$$

Оценим последний интеграл. Отрезок $[a+\delta, b-\delta]$ разобъем следующим образом: $a+\delta = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b-\delta$ и пусть $m_i = \inf\limits_{t\in[x_{i-1},x_i]} g(t)$

($g(t)$ интегрируема в собственном смысле, следовательно, ограничена). Тогда

$$\int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} g(t)\cos\lambda t dt = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}[g(t)-m_i]\cos\lambda t dt + \sum_{i=1}^{n} m_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda t dt = S_1 + S_2. \tag{3}$$

Разбиение (в силу интегрируемости в собственном смысле) можно выбрать так, чтобы колебания $\omega_i(g) = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} g(t) - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} g(t)$ удовлетворяли неравенству $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{6}$.

Тогда первую сумму S_1 из (3) можно оценить так:

$$|S_1| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}|g(t)-m_i||\cos\lambda t|dt \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{4}$$

Оценим вторую сумму S_2 из (3). Имеем:

$$|S_2| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|m_i|\left|\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda t dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[a+\delta,b-\delta]}|g(t)|\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{\lambda}(\sin\lambda x_i - \sin\lambda x_{i-1})\right| \leqslant M_g\cdot 2n\frac{1}{|\lambda|},$$

где $M_g = \sup\limits_{t\in[a+\delta,b-\delta]}|g(t)|$.

У нас λ пока не зависит ни от δ, ни от n.

Выберем λ_0 так, чтобы для $\forall\,|\lambda| > |\lambda_0|$ выполнялось неравенство $M_g\cdot 2n\cdot\dfrac{1}{|\lambda|} < \dfrac{\varepsilon}{6}$ (это возможно, так как λ не зависит от δ и n).

Отсюда и из (2)–(4) следует, что для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$ и $\exists\,\lambda_0\big|\ \forall\,|\lambda| > |\lambda_0| \Rightarrow$

$$\left|\int\limits_{a}^{b} g(t)\cos\lambda t dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon.$$

Первое из равенств (1) доказано, второе доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Пусть теперь 2π–периодическая функция $f(x)$ является абсолютно интегрируемой на $[-\pi, \pi]$. Тогда с использованием интеграла Дирихле при любом $\delta \in (0, \pi)$ имеем

$$s_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x+t)\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}tdt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}tdt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

При $\lambda = \frac{2n+1}{2} \to \infty$ два первых слагаемых правой части стремятся к нулю при любом фиксированном $\delta > 0$ (см. лемму выше). Поэтому существование и значение $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x,f)$ в точке x зависят лишь от значений принимаемых функций f окрестности $(x-\delta, x+\delta)$ (при сколь угодно малом $\delta > 0$).

Это утверждение называется **принципом локализации** для рядов Фурье.

Другим следствием леммы Римана является стремление к нулю коэффициентов Фурье: $a_n = a_n(f) \to 0$ и $b_n = b_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$ для любой 2π–периодической функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на отрезке длины периода 2π.