10. Вопросы сходимости тригонометрического ряда Фурье. Сингулярный интеграл Дирихле

Для исследования сходимости ряда Фурье используется представление сумм Фурье в виде интеграла Дирихле.

Пусть 2π–периодическая функция $f(x)$ является абсолютно интегрируемой на отрезке длины периода. Тогда

$$s_n(x) = s_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Действительно, пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt,\ n = 0,1,2,\ldots;\ b_n = \frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt,\ n = 1,2,\ldots \tag{2}$$

Тогда

$$s_n(x) = s_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\cos nx dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt \sin nx dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt = \{\text{ замена } t - x = \tau\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(\tau + x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\tau d\tau \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t + x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right) dt.$$

Преобразуем теперь выражение

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \Bigg| \cdot 2 \sin \frac{t}{2};$$

$$2 \sin \frac{t}{2} D_n(t) = \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{t}{2} \cos kt =$$

$$= \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\sin \left(\frac{t}{2} + kt \right) + \sin \left(\frac{t}{2} - kt \right) \right] =$$

$$= \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\sin(2k+1)\frac{t}{2} + \sin(2k-1)\frac{t}{2} \right] = \sin(2n+1)\frac{t}{2}.$$

Значит,

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Тогда получим

$$s_n(x) = s_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t + x) \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \tag{3}$$

Это равенство дает представление сумм Фурье в виде интеграла Дирихле, который называется **сингулярным интегралом Дирихле**.

Значит, для выяснения сходимости ряда Фурье можно исследовать поведение сингулярного интеграла Дирихле. В этом существенную роль играет лемма Римана.