1. Виды сходимости функциональных последовательностей

Пусть все функции последовательности $f_n(x)$ определены на данном множестве E (и принимают конечные значения). И пусть функция $f(x)$ также определена на этом множестве E.

Говорят, что последовательность $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ в точке $x_0 \in E$, если выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

Если равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ выполняется для всех точек $x \in E$, то говорят, что последовательность $f_n(x)$ **поточечно сходится** на множестве E к функции $f(x)$.

Говорят, что множество E на числовой прямой имеет **нулевую меру**, если для любого $\delta > 0$ существует система интервалов (α_1, β_1), $(\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_n, \beta_n), \ldots$ такая, что:

1) эта система покрывает все множество E;

2) сумма длин всех интервалов меньше δ.

Говорят, что последовательность $f_n(x)$ **сходится почти всюду** на некотором промежутке (отрезке, интервале или полуинтервале), если она сходится к $f(x)$ на этом промежутке, исключая, быть может, некоторое множество меры нуль из этого промежутка.

Последовательность $f_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** к функции $f(x)$ на множестве E, если $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть каждая функция последовательности $f_n(x)$ и функция $f(x)$ являются интегрируемыми в собственном смысле на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $(f_n(x) - f(x))^2$ также является интегрируемой на отрезке $[a, b]$. (Это следует из свойств определенного интеграла.)

Будем говорить, что в этом случае последовательность функций $f_n(x)$ сходится в среднем квадратичном на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$, если существует равный нулю предел

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b (f_n(x)-f(x))^2dx=0.$$

Замечание.

Если в данном случае последовательность $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на отрезке $[a,b]$, то эта последовательность сходится к $f(x)$ и в среднем квадратичном на $[a,b]$.

Действительно, выполняется неравенство

$$\int\limits_a^b (f_n(x)-f(x))^2dx \leqslant \int\limits_a^b \sup_{[a,b]}(f_n(x)-f(x))^2dx \leqslant (b-a)(\sup_{[a,b]}(f_n(x)-f(x)))^2.$$