Рамазанов А.-Р. К., Рагимханов Р.К̇., Рагимханов В. Р.

Аддитивные функции множества и смежные вопросы

Махачкала
2019

Издается по решению РИС ДГУ

Рамазанов А.-Р. К., Рагимханов Р. К., Рагимханов В. Р. Аддитивные функции множества и смежные вопросы — Махачкала, Издательство ДГУ, 2019. — 197с.

В настоящем учебном пособии изложены основы теории меры и предназначена студентам, магистрам и аспирантам физико-математического направления. Пособие содержит широкий набора задач и упражнений по всем разделам, многие из которых снабжены указаниями и решениями.

Рецензенты: Вагабов А. И. — зав. кафедрой высшей алгебры и геометрии ДГУ, доктор физико-математических наук, профессор;

Оглавление

Введение

Книга является учебным пособием по основам теории меры и предназначена студентам, магистрам и аспирантам физико-математического направления.

В ней дано развернутое изложение основных классов множеств, общей теории конечно аддитивной и счетно аддитивной функций множества, включая вопросы продолжения функций множества, а также свойств функций ограниченной вариации и их применений в построениях теории меры. Многие из рассмотренных вопросов как по содержанию, так и по форме его изложения не всегда можно найти в доступных студентам источниках. Такое системное изложение материала, на наш взгляд, поможет читателю выяснить общую картину построения теории меры.

Пособие содержит достаточно широкий набора задач и упражнений по всем разделам; многие из них снабжены указаниями и решениями. Предлагаемые задачи использоваться как при самостоятельной работе студентов, так и на семинарских занятиях.

Глава I

Основные классы множеств

В этой главе: X — непустое множество, которое часто будет называться пространством; 2^X — совокупность всех подмножеств пространства X, включая пустое множество $\varnothing$ и X; класс (= система) в X — непустое множество $H \subseteq 2^X$, состоящее из множеств пространства X, а множество $E = \bigcup\limits_{A \in H} A$ называется единицей системы H.

§ 1. Определения и свойства основных классов множеств

Определение 1.1. Класс множеств $H \subseteq 2^X$ называется *полукольцом*, если

(i) $\{A, B\} \subset H \implies (A \cap B) \in H$;

(ii) $\forall \{A, B\} \subset H \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists \{C_1, \ldots, C_n\} \subset H, \ C_i \cap C_j = \varnothing, \ i \neq j$:

$$A \setminus B = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_n$$

или, равносильно,

(ii)′ $\forall \big(\{A, B\} \subset H, B \subset A\big) \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists \{C_1, \ldots, C_n\} \subset H, \ C_i \cap C_j = \varnothing,$ $i \neq j$:

$$A = B \sqcup C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_n.$$

Класс H называется *полуалгеброй*, если H — полукольцо и его *единица* $E \in H$.

Ясно, что если H — полукольцо, то $\varnothing \in H$, поскольку $A \setminus A = \varnothing$ для любого A; оно замкнуто относительно операции пересечения любого конечного числа множеств из H, но может быть незамкнутым относительно операции объединения и разности. Например, этим свойством обладает полукольцо, состоящее из всех промежутков $(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ множества действительных чисел.

Примером полукольца служит класс всех промежутков числовой прямой (множества $(-\infty, \infty), (-\infty, a), (b, \infty), (-\infty, a], [b, \infty), (a, a) = \varnothing$ также считаются промежутками).

Определение 1.2. Класс множеств $H \subseteq 2^X$ называется *кольцом*, если

(i) $\{A, B\} \subset H \implies (A \cup B) \in H$,

(ii) $\{A, B\} \subset H \implies (A \setminus B) \in H$.

Класс H называется *алгеброй*, если H — кольцо и его единица $E \in H$.

Так как для любых $A, B \in 2^X$ выполняются равенства

$$A \setminus B = A \vartriangle (A \cap B),$$

$$A \cup B = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \cap B),$$

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \vartriangle B),$$

(здесь $A \vartriangle B \doteqdot (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симметрическая разность множеств A и B), то условия (i) и (ii), определяющие кольцо, равносильны условиям:

(i)′ $\{A, B\} \subset H \implies (A \vartriangle B) \in H$;

(ii)′ $\{A, B\} \subset H \implies (A \cap B) \in H$.

Следовательно, кольцо замкнуто относительно операций разности, конечных объединений и конечных пересечений и, очевидно, что оно является полукольцом (выполнение второго требования определения полукольца очевидно).

Определение алгебры можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Алгеброй множеств в пространстве X называется непустая система H, удовлетворяющая одновременно следующим условиям:

(i)″ $\varnothing \in H$;

(ii)″ $\forall A \in H\colon E \setminus A \in H$, где E — единица системы H;

(iii)″ $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \{A_1, \ldots, A_n\} \subset H\colon \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in H$.

Это следует из формул

$$A \cap B = E \setminus \big[(E \setminus A) \cup (E \setminus B)\big],$$
$$A \setminus B = A \cap (E \setminus B)$$

и из определения 1.2.

Так как из правил двойственности вытекает, что

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = E \setminus \big\{(E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2) \cup \cdots \cup (E \setminus A_n)\big\},$$

то ясно, что алгебра множеств содержит и пересечение любого конечного числа своих элементов.

Примером кольца служит класс всех конечных объединений промежутков $|a, b|$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а $|a, b|$ означает любой промежуток вида $[a, b]\,, [a, b)\,, (a, b]$ и (a, b) $(a \leqslant b)$. Совокупность всех конечных объединений конечных и бесконечных промежутков $|a, b|$ является алгеброй с единицей $(-\infty, +\infty)$.

Определение 1.3. Класс множеств $H \subset 2^X$ называется *σ-кольцом*, если

(i) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset H \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in H,$

(ii) $\{A, B\} \subset H \implies (A \setminus B) \in H.$

Класс H называется *σ-алгеброй*, если H есть *σ-кольцо* и $E \in H$, где E — единица системы H.

Таким образом, *σ-кольцо* (соответственно *σ-алгебра*) — кольцо (соответственно алгебра), замкнутое (соответственно замкнутая) относительно операции образования счетных объединений.

Определение 1.4. Класс H называется *δ-кольцом*, если H — кольцо и

$$\forall\ (A_n)_{n=1}^{\infty} \subset H\colon\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in H.$$

δ-алгеброй называется кольцо, которое одновременно является алгеброй и δ-кольцом.

Отметим, что если H — σ-кольцо, то оно является δ-кольцом, так как

$$\forall\ (A_n)_{n=1}^{\infty} \subset H\colon\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right) \in H.$$

Однако не всякое δ-кольцо является σ-кольцом; так, например, пусть $H \subset 2^{\mathbb{R}}$ — система всех ограниченных подмножеств $\mathbb{R}$; тогда H — δ-кольцо, но так как $A_n = [n, n+1) \in H$ при $n \geqslant 0$ и $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = [0, +\infty) \notin H$, то H не является σ-кольцом.

Понятия σ-алгебры и δ-алгебры совпадают. В самом деле, только что показано, что σ-алгебра является δ-алгеброй. Обратно, пусть H — δ-алгебра и E — единица H. Тогда

$$\forall\ (A_n)_{n=1}^{\infty} \subset H\colon\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty}(E \setminus A_n) \in H.$$

т. е. H — σ-алгебра.

Введем вспомогательные понятия, необходимые для определения следующего класса множеств.

Определение 1.5$'$. Пусть $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$. *Нижним пределом* и *верхним пределом* последовательности $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ соответственно называются множества

$$\underline{\operatorname{Lim}}_{n}\, E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \quad \text{и} \quad \overline{\operatorname{Lim}}_{n}\, E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m.$$

Если $\underline{\operatorname{Lim}}_{n}\, E_n = \overline{\operatorname{Lim}}_{n}\, E_n$, то последовательность $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *сходящейся* и общее значение ее нижнего и верхнего пределов обозначается через $\operatorname{Lim}_{n} E_n$.

Последовательность $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *монотонно возрастающей* (соотв. *монотонно убывающей*), если $E_n \subset E_{n+1}$ (соотв. $E_n \supset E_{n+1}$), $n \geqslant 1$; при этом ясно, что

$$\operatorname{Lim}_{n} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad (\text{соотв.} \quad \operatorname{Lim}_{n} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n).$$

Последовательности, монотонно возрастающие или монотонно убывающие, называются *монотонными*.

Определение 1.5. Класс множеств $H \subset 2^X$ называется *монотонным классом*, если для любой монотонной последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ множество $\operatorname*{Lim}_n A_n$ принадлежит H.

Примером монотонного класса служит σ-кольцо.

Лемма 1.1. *Для последовательности множеств $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ пространства X положим ($n \in \mathbb{N}$)*

$$A_n \doteq \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \ B_n \doteq \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k, \ C_n \doteq \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k,$$

$$D_n \doteq \bigcap_{k=1}^{n} E_k, \ K_n \doteq E_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k, \quad (E_0 \doteq \varnothing).$$

Тогда в пространстве X:

1) $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ — возрастающие последовательности множеств;

2) $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ — убывающие последовательности множеств;

3) $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств.

Кроме того,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

и

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Определение 1.6. (Классы множеств, порождаемые любой непустой системой множеств конечным или счетным числом операций).

Пусть H — некоторая непустая система множеств пространства X.

Определим следующие классы (обозначения заимствованы из [1]):

$$\sigma(H) \doteqdot \left\{ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in H \right\};$$

$$\delta(H) \doteqdot \left\{ B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \mid B_n \in H \right\};$$

$$\sigma_{\uparrow}(H) \doteqdot \left\{ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in H,\ A_n \subseteq A_{n+1} \right\};$$

$$\delta_{\downarrow}(H) \doteqdot \left\{ B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \mid B_n \in H,\ B_n \supseteq B_{n+1} \right\};$$

$$\sigma_{+}(H) \doteqdot \left\{ C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n \mid C_n \in H,\ C_n \cap C_m = \varnothing,\ n \neq m \right\}.$$

Отметим, что система H входит в каждый из этих классов.

Определение 1.7. Класс множеств H называется *нормальным*, если $\sigma_{+}(H) = \delta_{\downarrow}(H) = H$.

Предложение 1.1. *Если система H — кольцо, то*

$$\sigma(H) = \sigma_{+}(H) = \sigma_{\uparrow}(H) \quad \text{и} \quad \delta(H) = \delta_{\downarrow}(H).$$

◀ Справедливость утверждения следует из леммы 1.1 и определения 1.6 соответствующих классов. ▶

Предложение 1.2. *Если система H — кольцо, то все классы $\sigma(H)\,,\delta\,(H)\,,\sigma_{\uparrow}(H)\,,\delta_{\downarrow}(H)\,,\sigma_{+}(H)$ замкнуты относительно операций объединения и пересечения.*

◀ Замкнутость классов $\sigma(H)$ и $\delta\,(H)$ относительно операций объединения и пересечения вытекает из закона дистрибутивности. Поэтому в силу предложения 1.1 классы $\sigma_{\uparrow}(H)\,,\delta_{\downarrow}(H)$ и $\sigma_{+}(H)$ также будут замкнуты относительно операций объединения и пересечения. ▶

Определение 1.8. Если некоторая система множеств H такова, что $\sigma(H)=H$, т. е. если H замкнута относительно операции счетного объединения (соотв. $\delta_{\downarrow}(H)=H$, т. е. система H замкнута относительно операции счетного пересечения), то система H называется σ-замкнутой (соотв. δ-замкнутой).

Из этого определения и определений 1.3,1.4 вытекает, что σ-кольцо (соотв. σ-алгебра) — это σ-замкнутое кольцо (соотв. σ-замкнутое алгебра), а δ-кольцо (соотв. δ-алгебра) — это δ-замкнутое кольцо (соотв. δ-замкнутая алгебра).

Предложение 1.3. *Каждое σ-кольцо множеств H является δ-кольцом, а каждая δ-алгебра является σ-алгеброй.*

◀ Это предложение фактически получено выше. Пусть множество $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ есть пересечение счетного числа множеств $B_n\in H$. Тогда, полагая $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$, получим $B=A\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A\setminus B_n)$. Поэтому, если система H является σ-кольцом, то $B\in H$ и первое утверждение доказано. Второе утверждение получается из закона двойственности. ▶

Упражнения

1. Докажите следующие утверждения.
   1) Множество всех интервалов $(a, b) \subset \mathbb{R}$, включая пустое множество $\varnothing$, не являются полукольцом.
   2) Множество всех отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$ не являются полукольцом.
   3) Совокупность всех открытых множеств в $\mathbb{R}$ не является полукольцом.

   (Здесь, как обычно, $\mathbb{R}$ означает множество всех действительных чисел).

2. Докажите, что система

   $$H = \{\, [a, b) \subset \mathbb{R} \mid -\infty < a < b < +\infty \,\} \cup \{\varnothing\}$$

   является полукольцом, но не является кольцом.

3. Докажите, что при фиксированных a и b из $\mathbb{R}$ множество полуинтервалов вида $[\alpha, \beta) \subseteq [a, b)$, включая пустой полуинтервал $[\alpha, \alpha)$, является полуалгеброй с единицей $E = [a, b)$.

4. *Прямоугольником* (= *n-мерным прямоугольником*) Π в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ назовем множество всех точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ таких, что $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, или же множество точек, определяемое указанными неравенствами, в которых некоторые (или все) знаки $\leqslant$ заменены на $<$; возможность равенства $a_i = b_i$ при каком-нибудь значении i не исключается; в частности, пустое множество — тоже прямоугольник.

Доказать, что множество $P = \{\Pi\}$ всех прямоугольников является полукольцом, но не является кольцом.

5. Пусть H — система подмножеств множества X. Доказать следующие утверждения.
   1) Если H — система всех конечных подмножеств множества X, то H является кольцом и H будет алгеброй тогда и только тогда, когда X конечно.
   2) Если X — бесконечное множество, а H — система всех не более чем счетных его подмножеств, то
      a) H является σ-кольцом;
      b) H является σ-алгеброй тогда и только тогда, когда X — счетное множество.

6. Пусть H — полукольцо (соотв. кольцо) и $A \in H$. Доказать, что система
$$H \cap A \doteqdot \{\, A \cap B \,|\, B \in H \,\}$$
является полуалгеброй (соотв. алгеброй).

7. Доказать, что класс всех конечных объединений прямоугольников евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ (включая прямоугольники с бесконечными сторонами) представляет собой алгебру.

8. Привести пример последовательности множеств $(E_n)_{n=1}^{\infty}$, для которой
$$\underline{\operatorname{Lim}}_{n} E_n \neq \overline{\operatorname{Lim}}_{n} E_n.$$

Указание. Для последовательности $(E_n)_{n=1}^{\infty} = (A, B, A, B, \dots)$ имеем $\overline{\operatorname{Lim}}_n E_n = A \cup B$ и $\underline{\operatorname{Lim}}_n E_n = A \cap B$. ▶

9. Пусть X — множество и $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность множеств таких, что $E_n \subset X$ для любого n. Доказать, что
$$X \setminus \overline{\operatorname{Lim}}_n E_n = \underline{\operatorname{Lim}}_n (X \setminus E_n).$$

10. Пусть $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность множеств и $(\chi_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность их характеристических функций. Доказать, что:
   1) характеристической функцией множества $\overline{\operatorname{Lim}}_n E_n$ является функция $\limsup\limits_{n\to\infty} \chi_n$, а характеристической функцией множества $\underline{\operatorname{Lim}}_n E_n$ является функция $\liminf\limits_{n\to\infty} \chi_n$;
   2) $\left(\exists \operatorname{Lim}_n E_n\right) \iff \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \chi_n\right)$.

11. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение, где X и Y — данные множества, а T — система множеств в Y и
$$f^{-1}(T) \doteqdot \{\, f^{-1}(A) \mid A \in T \,\}.$$
Доказать, что:
   1) $f^{-1}(T)$ — полукольцо (соотв. кольцо), если T — полукольцо (соотв. кольцо);
   2) $f^{-1}(T)$ — σ-алгебра, если T — σ-алгебра.

§ 2. Порожденные классы множеств

Определение 2.1. *Кольцом, порожденным системой подмножеств* H пространства X, или *минимальным кольцом, содержащим систему* H, называется следующий класс множеств:

$$\mathbf{r}(H) \doteqdot \bigcap_{\substack{K \text{ – кольцо}, \\ K \supset H}} K.$$

Замечание 2.1. Кольца, содержащие систему H, существуют; например, 2^X — кольцо и $2^X \supset H$. Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пересечение произвольного семейства колец есть кольцо (возможно, состоящее лишь из пустого множества).*

◀ Пусть $\{\, K_\alpha \,|\, \alpha \in \Lambda \,\}$ — семейство колец. Тогда

$$\{A, B\} \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha \Rightarrow \forall\, \alpha \in \Lambda \colon \{A, B\} \subset K_\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall\, \alpha \in \Lambda \colon \{A \cup B, A \setminus B\} \subset K_\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{A \cup B, A \setminus B\} \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha.$$

Таким образом, $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$ есть кольцо. ▶

Отметим, что из леммы 2.1 следует, что класс $\mathbf{r}(H)$ из определения 2.1 есть кольцо и оно определено однозначно и зависит только от системы множеств H.

Замечание 2.2. Утверждение леммы 2.1 справедливо для: а) алгебр, б) σ-колец, в) σ-алгебр, г) монотонных классов.

Приведем несколько утверждений о свойствах операций в полукольце множеств.

Предложение 2.1. *Для любых элементов A, B_i $(i = 1, \ldots, n)$ полукольца H найдутся такие $C_j \in H$, что*

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} C_j.$$

◀ При $n = 1$ это утверждение вытекает из определения полукольца. Далее рассуждаем по индукции. Поэтому предположим, что для числа n утверждение верно и докажем его для случая $n+1$. По определению полукольца

$$C_j \setminus B_{n+1} = \bigsqcup_{k=1}^{m_j} C_{jk}, \quad \text{где} \quad C_{jk} \in H.$$

Отсюда мы имеем

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \cup B_{n+1} \right) = \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) \setminus B_{n+1} =$$

$$= \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} C_j \right) \setminus B_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^{m} (C_j \setminus B_{n+1}) = \bigsqcup_{j=1}^{m} \bigsqcup_{k=1}^{m_j} C_{j,k}.$$

Таким образом, утверждение доказано для случая $n+1$. ▶

Следствие 2.1. *Пусть H — полукольцо множеств, множества $A, B_1, \ldots, B_n \in H$, $B_1, \ldots, B_n \subset A$ и $B_1, \ldots, B_n$ попарно не пересекаются. Тогда найдутся такие множества $B_{n+1}, \ldots, B_m \in H$, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} B_i$.*

Предложение 2.2. *Если H — полукольцо, то*

$$\sigma(H) = \sigma_+(H) = \sigma_\uparrow(H) \quad \textit{и} \quad \delta(H) = \delta_\downarrow(H).$$

◀ Ясно, что $\sigma_+(H) \subset \sigma(H)$. Покажем, что $\sigma(H) \subset \sigma_+(H)$. Если $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in H$, то A можно представить в виде $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, где множества $B_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$ попарно не пересекаются. Кроме того, по предложению 2.1 мы имеем $B_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m_n} C_{ni}$, где множества $C_{ni} \in H$ также попарно не пересекаются. Поэтому $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigsqcup\limits_{i=1}^{m_n} C_{ni}$ и, следовательно, $\sigma(H) \subset \sigma_+(H)$. Итак, $\sigma(H) = \sigma_+(H)$.

Остальные равенства получаются точно так же, как при доказательстве предложения 1.1. ▶

Теорема 2.1. *Если система множеств H является полукольцом, то минимальное кольцо $\mathbf{k} = \mathbf{r}(H)$ состоит из всех конечных объединений $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ элементов $A_I \in H$ этого полукольца.*

◀ Все множества вида $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in H$, принадлежат минимальному кольцу $\mathbf{k}$. Поэтому достаточно показать, что класс всех таких множеств $\mathfrak{A}$ является кольцом. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}$ и $B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j \in \mathfrak{A}$, где $A_i, B_j \in H$. Тогда, применяя предложение 2.1, мы получим

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n}\Big(A_i \setminus \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j\Big) = \bigsqcup_{i=1}^{n}\bigsqcup_{k=1}^{m_i} C_{ik},$$

где $C_{ik} \in H$. Поэтому $A \setminus B \in \mathfrak{A}$. Так как $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$, то $A \cup B \in \mathfrak{A}$. Таким образом, этот класс множеств $\mathfrak{A}$ является кольцом, следовательно, в силу минимальности $\mathbf{k} = \mathfrak{A}$. ▶

Определение 2.2. Пусть H — некоторая система множеств в пространстве X. Пересечение всех σ-колец $\mathfrak{K} \subset 2^X$, содержащих систему H, т. е. класс

$$\mathbf{r}_\sigma(H) \doteqdot \bigcap_{\substack{\mathfrak{K} \text{ -- } \sigma\text{-кольцо}, \\ \mathfrak{K} \supset H}} \mathfrak{K}.$$

называется *минимальным σ-кольцом, порожденным системой H*.

Ясно, что $\mathbf{r}_\sigma(H)$ определено однозначно и зависит только от системы H и оно является σ-кольцом (см. замечание 2.2).

Так как каждое σ-кольцо является кольцом, то, очевидно,

$$\mathbf{r}(H) \subseteq \mathbf{r}_\sigma(H)\,.$$

Определение 2.3. Пусть $H \subset 2^X$ — некоторая система множеств в пространстве X. Пересечение всех монотонных (соотв. нормальных) классов, содержащих систему H, т. е. класс

$$\mathbf{m}_\sigma(H) \doteqdot \bigcap_{\substack{\mathfrak{S} \text{ -- монот. класс}, \\ H \subset \mathfrak{S}}} \mathfrak{S}$$

$$\left(\text{соотв.}\quad \mathbf{n}_\sigma(H) \doteqdot \bigcap_{\substack{\mathfrak{S} \text{ -- норм. класс}, \\ H \subset \mathfrak{S}}} \mathfrak{S}\right)$$

называется *минимальным монотонным* (соотв. *минимальным нормальным*) *классом множеств, содержащим систему H*.

Лемма 2.2. *Пусть H — некоторая система множеств пространства X. Тогда*

$$\mathbf{m}_\sigma(H) \subseteq \mathbf{r}_\sigma(H) \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_\sigma(H) \subseteq \mathbf{r}_\sigma(H)\,.$$

◀ Справедливость леммы следует из того, что σ-кольцо множеств одновременно является монотонным и нормальным классом (см. предложение 1.1). ▶

Теорема 2.2 (Сакс). *Пусть H — полукольцо множеств пространства X. Тогда*

$$\mathbf{r}_\sigma(H) = \mathbf{n}_\sigma(H)\,.$$

◀ Вначале покажем, что класс $\mathbf{n}_\sigma(H)$ замкнут относительно операции пересечения. Обозначим через P_A систему всех таких множеств $B \in \mathbf{n}_\sigma(H)$, что $A \cap B \in \mathbf{n}_\sigma(H)$. Если $A \in H$, то $H \subseteq P_A$. Кроме того, легко видеть, что $\delta_\downarrow(P_A) = P_A$ и $\sigma_+(P_A) = P_A$. Следовательно,P_A — нормальный класс, содержащий полукольцо H. В силу минимальности $P_A = \mathbf{n}_\sigma(H)$ при всех $A \in H$. Пусть теперь $A \in \mathbf{n}_\sigma(H)$, тогда по доказанному $H \subseteq P_A$. Рассуждая так же, как и выше, получим $P_A = \mathbf{n}_\sigma(H)$ при всех $A \in \mathbf{n}_\sigma(H)$. Таким образом, класс множеств $\mathbf{n}_\sigma(H)$ замкнут относительно операции пересечения. Отсюда вытекает δ-замкнутость класса $\mathbf{n}_\sigma(H)$.

Докажем замкнутость класса $\mathbf{n}_\sigma(H)$ относительно операции разности. Обозначим через Q_A систему всех таких множеств $B \in \mathbf{n}_\sigma(H)$, что $A \setminus B \in \mathbf{n}_\sigma(H)$ и $B \setminus A \in \mathbf{n}_\sigma(H)$. Если $A \in H$, то $B \in Q_A$. Пусть

$B = \bigcap B_n$ и $C = \bigsqcup C_n$, где $B_n, C_n \in Q_A$ и $B_{n+1} \subseteq B_n$. Тогда

$$A \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \setminus B_n) = (A \setminus B_1) \sqcup \bigsqcup_{n=2}^{\infty} (A \setminus B_n) \cap B_{n-1},$$

$$B \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A), \; A \setminus C = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus C_n), \; C \setminus A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus A).$$

Значит, $B, C \in Q_A$, а также, $\delta_{\downarrow}(Q_A) = Q_A$ и $\sigma_{+}(Q_A) = Q_A$. Поэтому Q_A — нормальный класс, содержащий полукольцо H. В силу минимальности $Q_A = \mathbf{n}_\sigma(H)$ при всех $A \in H$. Применяя аналогичные рассуждения, нетрудно установить это равенство для всех $A \in \mathbf{n}_\sigma(H)$. Отсюда класс $\mathbf{n}_\sigma(H)$ замкнут относительно операции разности.

Так как $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$, то класс $\mathbf{n}_\sigma(H)$ будет замкнутым относительно операции объединения. Значит, этот класс является кольцом множеств. Поэтому в силу предложения 1.1 класс $\mathbf{n}_\sigma(H)$ является σ-кольцом. Таким образом, имеет место равенство $\mathbf{n}_\sigma(H) = \mathbf{r}_\sigma(H)$. ▶

Следствие 2.2. *Если H — кольцо, то $\mathbf{r}_\sigma(H) = \mathbf{m}_\sigma(H)$.*

◀ Так как каждое кольцо множеств является полукольцом, то в силу предложения 1.1 в этом случае имеют место равенства

$$\mathbf{m}_\sigma(H) = \mathbf{n}_\sigma(H) = \mathbf{r}_\sigma(H)\,.$$

Следствие доказано. ▶

Поскольку мы часто будем иметь дело с некоторыми свойствами алгебры и σ-алгебры множеств, кратко остановимся на них. Ниже через Σ обозначаются алгебры множеств пространства X.

Множество всех алгебр (соотв. σ-алгебр) данного пространства можно частично упорядочить, приняв, что алгебра (соотв. σ-алгебра) Σ_1 меньше алгебры (соотв. σ-алгебры) Σ_2, если Σ_1 полностью содержится в Σ_2, т. е. $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$.

Определение 2.4. *Минимальная алгебра* (соотв. *минимальная σ-алгебра*), содержащая данную систему множеств H, называется *алгеброй* (соотв. *σ-алгеброй*), *порожденной системой множеств H*, и мы обозначаем ее символом $\Sigma(H)$ (соотв. $\Sigma_\sigma(H)$). Таким образом,

$$\Sigma(H) = \bigcap_{\substack{\Sigma - \text{алгебра}, \\ H \subset \Sigma}} \Sigma, \qquad \Sigma_\sigma(H) = \bigcap_{\substack{\Sigma - \sigma\text{-алгебра}, \\ H \subset \Sigma}} \Sigma$$

(сравните с определением 2.1).

Очевидно, что пересечение любого множества σ-алгебр данного пространства тоже является σ-алгеброй, так как если множества A_k, $(k = 1, 2, \dots)$ принадлежат одновременно всем σ-алгебрам Σ_α, то по определению σ-алгебры и их объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ принадлежит всем σ-алгебрам Σ_α, т. е. из $A_k \in \bigcap\limits_{\alpha} \Sigma_\alpha$ следует $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \bigcap\limits_{\alpha} \Sigma_\alpha$.

Это, очевидно, справедливо и для алгебр множеств: пересечение любого множества алгебр данного пространства тоже является алгеброй.

Предложение 2.3. *Для любого класса множеств H существует порожденная им σ-алгебра $\Sigma_\sigma(H)$.*

◀ Всегда существует σ-алгебра, содержащая данный класс множеств H, например, σ-алгебра всех множеств данного пространства. Пересечение всех σ-алгебр, содержащих H, и будет минимальной σ-алгеброй $\Sigma_\sigma(H)$, содержащей H. ▶

Очевидно, что это предложение справедливо и для алгебр: для любого класса множеств H существует порожденная им алгебра $\Sigma(H)$.

Лемма 2.3. *Любое счетное объединение множеств полуалгебры H можно представить в виде счетного объединения попарно непересекающихся множеств полуалгебры H.*

◀ Пусть $(A_n)_{n=1}^\infty$ — любая последовательность множеств полуалгебры H (с единицей E). Очевидно, что

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n = A_1 \sqcup A_2\overline{A}_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_{n-1} \sqcup \cdots = \bigsqcup_{n=1}^\infty \Big(A_n \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A}_k\Big),$$

где $\overline{A}_i = E \setminus A_i$, $AB \doteqdot A \cap B$; по определению полуалгебры

$$\overline{A}_k = \bigsqcup_{l=1}^{N_k} A_{kl}.$$

Следовательно,

$$\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A}_k = \bigsqcup_{l_1=1}^{N_1} \cdots \bigsqcup_{l_{n-1}=1}^{N_{n-1}} A_{1l_1} \ldots A_{n-1,l_{n-1}}$$

и

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{l_1=1}^{N_1} \cdots \bigsqcup_{l_{n-1}=1}^{N_{n-1}} A_n A_{1l_1} \ldots A_{n-1,l_{n-1}}.$$

Так как по определению полуалгебры $A_n A_{1l_1} \ldots A_{n-1,l_{n-1}} \in H$ и множества $A_n A_{1l_1} \ldots A_{n-1,l_{n-1}}$ и $A_n A_{1h_1} \ldots A_{n-1,h_{n-1}}$ не пересекаются, если хотя бы один из индексов $h_1, \ldots, h_{n-1}$ не совпадает с соответствующим индексом $l_1, \ldots, l_{n-1}$, то последнее равенство доказывает лемму. ▶

Легко установить, что алгебра $\Sigma(H)$, порожденная полуалгеброй H, представляет собой множество всех конечных объединений множеств полуалгебры H.

Предложение 2.4. *Всякая σ-алгебра представляет собой монотонный класс.*

◀ Так как σ-алгебра содержит пределы монотонных последовательностей входящих в нее множеств как счетные объединения и пересечения, то любая σ-алгебра является монотонным классом. ▶

Предложение 2.5. *Если монотонный класс M является алгеброй, то он представляет собой σ-алгебру.*

◀ Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — любая последовательность множеств из M, $A_n \in M$. Из того, что M — алгебра, следует $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in M$; при этом множества B_n образуют монотонно возрастающую последовательность. А так как M — монотонный класс, то он содержит и предел последовательности B_n,

$$\operatorname*{Lim}_n B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in M.$$

Следовательно, все счетные объединения множеств из M принадлежат M, т. е. M — σ-алгебра. ▶

Предложение 2.6. *Монотонный класс $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$, порожденный алгеброй множеств Σ, совпадает с σ-алгеброй $\Sigma_\sigma(\Sigma)$, порожденной той же алгеброй Σ, т. е. $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma) = \Sigma_\sigma(\Sigma)$.*

◀ Так как σ-алгебра является монотонным классом, а $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ — минимальный монотонный класс, содержащий алгебру Σ, то $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma) \subset \Sigma_\sigma(\Sigma)$. Если мы докажем, что $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ представляет собой алгебру, то по предложению 2.4 $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ будет σ-алгеброй, и из того, что $\Sigma_\sigma(\Sigma)$ — минимальная σ-алгебра, содержащая Σ, будет следовать $\Sigma_\sigma(\Sigma) \subset \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$. Из полученных двух включений будет следовать нужный результат $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma) = \Sigma_\sigma(\Sigma)$. Таким образом, остается доказать, что $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ — алгебра.

Так как $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ содержит алгебру Σ, то $\varnothing \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\,, X \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$, где X — единица алгебры Σ, и остается доказать, что из $A \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ вытекает $\overline{A} \doteqdot X \setminus A \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ и из $A, B \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ следует, что $AB \doteqdot A \cap B \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$.

Положим

$$\Big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\Big)' \doteqdot \left\{\, A \mid A \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\,,\ \overline{A} \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma) \,\right\}.$$

Очевидно, что $\Sigma \subset \big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)'$. Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — любая монотонная последовательность множеств класса $\big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)'$. Так как $\big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)' \subset \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$, то $A_n \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ и $A = \operatorname*{Lim}_n A_n \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$. Но при этом $\overline{A}_n \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ и последовательность множеств $(\overline{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ также монотонная. Следовательно, $\overline{A} = \operatorname*{Lim}_n \overline{A}_n \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ и $A = \operatorname*{Lim}_n A_n \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$, т. е. $A \in \big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)'$. Таким образом, $\big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)'$ — монотонный класс, содержащий алгебру Σ. А так как $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ — минимальный монотонный класс, содержащий Σ, то $\big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)' = \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$, т. е. $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ замкнут относительно операции дополнения.

Чтобы доказать замкнутость $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ относительно конечных пересечений, определим для любого множества $A \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ класс множеств

$$\big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_A \doteqdot \{\, B \mid B \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\,,\ AB \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma) \,\}\,.$$

Совершенно так же, как в случае $\big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)'$, доказывается, что $\big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_A$ — монотонный класс. Очевидно, что если $B \in \big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_A$, то $A \in \big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_B$. Но для любого $A \in \Sigma$ имеем $\Sigma \subset \big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_A$. Следовательно, $\big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_A = \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$, так как $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ — минимальный монотонный класс, содержащий Σ. Поэтому любое множество $B \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ принадлежит и классу $\big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_A$, $B \in \big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_A$, если $A \in \Sigma$. А так как при этом $A \in \big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_B$, то $\Sigma \subset \big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_B$ и, следовательно, $\big(\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)\big)_B = \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ для любого множества $B \in \mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$. Таким образом, $\mathbf{m}_\sigma(\Sigma)$ замкнут относительно операций дополнения и конечных пересечений и содержит $\varnothing$ и X, т. е. представляет собой алгебру. ▶

Упражнения

1. Доказать, что утверждения замечания 2.2 верны.

2. Пусть $H_!$ и H_2 — две системы множеств пространства X. Доказать, что:

   1) $H_1 \subset H_2 \subset \Sigma\,(H_1) \implies \Sigma\,(H_1) = \Sigma\,(H_2)$,

   2) $H_1 \subset H_2 \subset \Sigma_\sigma(H_1) \implies \Sigma_\sigma(H_1) = \Sigma_\sigma(H_2)$.

3. Пусть H — некоторая система множеств пространства X и $B \subset X$. Доказать, что
$$\mathbf{r}_\sigma(H \cap B) = \mathbf{r}_\sigma(H) \cap B.$$
   Здесь для класса множеств M $\;M \cup B \doteqdot \{\, A \cap B \mid A \in M \,\}$.

4. Проверить, что $\Sigma_\sigma(\Sigma_\sigma(H)) = \Sigma_\sigma(H)$.

5. Пусть $H = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — конечная система подмножеств множества X. Доказать, что:

   1) $\Sigma\,(H)$ содержит не более 2^{2^n} множеств;

   2) $\Sigma\,(H) = \Sigma_\sigma(H)$.

   Указание. 1) Рассмотреть все множества вида
$$\hat{A}_1 \cap \hat{A}_2 \cap \cdots \cap \hat{A}_n,$$
   где при каждом $i = 1, \ldots, n$ множество $\hat{A}_i$ равно A_i или $X \setminus A_i$. ▶

6. Покажите, что алгебру множеств можно определить как класс множеств, содержащий дополнения и попарные пересечения принадлежащих ему множеств.

§ 3. σ-алгебры борелевских множеств. Произведение систем множеств

Пусть (X, τ) — хаусдорфово топологическое пространство, в частности, метрическое пространство (X, ρ). Все подмножества пространства (X, τ) можно разделить на три семейства: семейство замкнутых множеств, семейство открытых множеств и семейство всех оставшихся множеств. Кроме того, мы знаем, что пересечение счетного множества открытых множеств не обязательно открыто, так же как и объединение счетного числа замкнутых не обязательно замкнуто. Все подмножества пространства (X, τ), которые могут быть получены из открытых, а также из замкнутых подмножеств пространства X с помощью взятия счетных объединений, пересечений и дополнения, особенно важны с топологической точки зрения, и семейство таких подмножеств заслуживает особого внимания, например, в теории меры и, следовательно, в теории интегрирования.

Определение 3.1. *Семейством борелевских множеств* в топологическом пространстве (X, τ) называется наименьшее семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств пространства (X, τ), удовлетворяющее следующим условиям:

(i) семейство $\mathfrak{B}$ содержит все открытые подмножества пространства (X, τ), т. е. $\tau \subset \mathfrak{B}$;

(ii) если $A \in \mathfrak{B}$, то $X \setminus A \in \mathfrak{B}$;

(iii) если $A_i \in \mathfrak{B}$ для $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}$.

Существование наименьшего семейства $\mathfrak{B}$, удовлетворяющего сформулированным условиям, следует из того простого соображения, что семейство всех подмножеств пространства X удовлетворяет условиям (i) – (iii) и что для любой совокупности семейств, удовлетворяющих (i) – (iii), общая часть всех семейств в данной совокупности есть семейство, удовлетворяющее указанным условиям. Следовательно, семейство борелевских множеств в X можно было бы определить как общую часть всех семейств $\mathfrak{J}$, удовлетворяющих условиям (i) – (iii).

Заметим, что в определении борелевских множеств условие (i) может быть заменено условием

(i)$'$ семейство $\mathfrak{B}$ содержит все замкнутые подмножества пространства X,

а условие (iii) может быть заменено условием

(iii)$'$ если $A_i \in \mathfrak{B}$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{B}$.

В самом деле, объединение условий (i)$'$ и (ii) эквивалентно объединению условий (i) и (ii), а объединение условий (ii) и (iii)$'$ эквивалентно объединению условий (ii) и (iii).

Итак, семейством борелевских множеств $\mathfrak{B}$ топологического пространства (X, τ) называется наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые (или, эквивалентно, все замкнутые) подмножества данного топологического пространства (X, τ), а множества из $\mathfrak{B}$ называются *борелевскими множествами* пространства (X, τ).

Отметим также, что $\forall\, A, B \in \mathfrak{B}\colon A \setminus B \in \mathfrak{B}$, ибо $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$. Отсюда видно, что условие (ii) в определении 3.1 эквивалентно условию (ii)$'$: $\forall\, A, B \in \mathfrak{B}\colon A \setminus B \in \mathfrak{B}$.

Возникает вопрос, существуют ли подмножества пространства X, не являющиеся борелевскими множествами. Очевидно, что ответ зависит от пространства X. Так, например, все подмножества дискретного топологического пространства суть борелевские множества. Однако, вообще говоря, в топологических пространствах существуют множества, не являющиеся борелевскими (см., например, [2]).

Теория борелевских множеств является хорошо разработанной частью общей топологии, но, чтобы получить интересные и глубокие результаты о борелевских множествах, следует ограничить класс рассматриваемых топологических пространств (см., например, [2, 11]).

Определение 3.2. Говорят, что множество $A \subseteq X$ *имеет тип* F_σ (= является F_σ-*множеством*) и пишут $A \in F_\sigma$, если оно представляется в виде счетного объединения $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ замкнутых множеств A_n топологического пространства (X, τ). Говорят, что множество $B \subseteq X$ *имеет тип* G_δ (= является G_δ-*множеством*) и пишут $B \in G_\delta$, если оно представляется в виде счетного пересечения $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ открытых множеств $B_n \in \tau$ топологического пространства (X, τ).

Предложение 3.1. *В произвольном хаусдорфовом топологическом пространстве (X, τ) справедливы следующие утверждения.*

а) Дополнение F_σ-множества является G_δ-множеством, и наоборот.

b) Пересечение двух F_σ-множеств есть опять F_σ-множество, а объединение двух G_δ-множеств есть G_δ-множество.

c) Счетное объединение (соотв. пересечение) F_σ-множеств (соотв. G_δ-множеств) есть F_σ-множество (соотв. G_δ-множество).

◀ a) Если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i, $i = 1, 2, \ldots$ — замкнутые множества (соотв. $B = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, где B_i, $i = 1, 2, \ldots$ — открытые множества), то множество $X \setminus A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$ — G_δ-множество (соотв. $X \setminus B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (X \setminus B_i)$ — F_σ-множество).

b) Пусть A и B — F_σ-множества, т. е. $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, где $A_i, B_j, i, j = 1, 2, \ldots$ — замкнутые множества. Тогда множество

$$A \cap B = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (A_i \cap B_j)$$

является F_σ-множеством. Подобным образом объединение двух G_δ-множеств является G_δ-множеством.

Утверждение c) очевидно. ▶

Множество всех рациональных чисел является F_σ-множеством на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тот факт, что оно не является G_δ-множеством, не столь очевиден (см., например, [2]).

Итак, множества типов F_σ и G_δ входят в систему борелевских множеств $\mathfrak{B}$, а все конечные пересечения и счетные объединения множеств типа F_σ являются множествами типа F_σ. Также все конечные объединения и счетные пересечения множеств типа G_δ являются множествам типа G_δ.

Следующие при предложения мы устанавливаем в случае, когда исходное пространство является метрическим (X, ρ).

Предложение 3.2. *В метрическом пространстве каждое замкнутое множество A является множеством типа G_δ, а каждое открытое множество B является множеством типа F_σ.*

◀ Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Каждое замкнутое множество A может быть представлено в виде пересечения $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ открытых множеств

$$B_n = \left\{ x \in X \mid \rho(x, A) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Отсюда, переходя к дополнениям, сразу получим, что открытое множество B представляется в виде объединения замкнутых множеств. ▶

Определение 3.3. Множества, которые имеют одновременно тип F_σ и G_δ, называются *двусторонними борелевскими множествами.*

Например, такими множествами являются все замкнутые и открытые множества, а также их разности.

Предложение 3.3. *Пусть множество* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *есть объединение множеств* $A_i \in F_\sigma$. *Тогда найдутся такие непересекающиеся множества* $B_i \in F_\sigma$, *что* $B_i \subseteq A_i$ *и* $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

◀ Счетное объединение множеств типа F_σ является множеством типа F_σ, поэтому $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, где C_j замкнуты, при этом каждое множество C_j содержится в некотором A_i. Так как множества $D_k \doteqdot \bigsqcup_{j=1}^{k} C_j$ также замкнуты, то множества $D'_k \doteqdot D_k \setminus D_{k-1}$ будут иметь тип F_σ. Пусть B_i является объединением тех множеств D'_k, которые содержатся в A_i. Поскольку множества D'_k не пересекаются, то множества B_i также не пересекаются и имеют тип F_σ. При этом ясно, что их объединение равно $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. ▶

Предложение 3.4. *Пусть множество* $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ *есть пересечение множеств* $C_i \in G_\delta$. *Тогда найдутся такие множества* $D_i \in G_\delta$, *что* $C_i \subseteq D_i$ *и* $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$.

◀ Применим предложение 3.3 к множествам $A_i \doteqdot X \setminus C_i$ и $A = X \setminus C$. Тогда $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$, где множества $B_i \subseteq A_i$ не пересекаются и имеют тип

F_σ. Поэтому множества $D_i \doteqdot X \setminus B_i$ имеют тип G_δ и при этом

$$C_i = X \setminus A_i \subseteq D_i \quad \text{и} \quad C = X \setminus A = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i. \quad \blacktriangleright$$

Напомним, что если X и Y — какие-нибудь два множества (необязательно подмножества одного пространства), то *декартовым произведением X на Y* называется множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X, y \in Y$; оно обозначается символом $X \times Y$. Таким образом,

$$X \times Y \doteqdot \{ (x, y) \,|\, x \in X, y \in Y \} .$$

Простейшим примером декартова произведения служит координатная плоскость, которую можно рассматривать как произведение координатных осей.

Определение 3.4. Пусть $A \subseteq X$ и $B \subset Y$. Произведение

$$A \times B \doteqdot \{ (x, y) \,|\, x \in A, y \in B \}$$

называется *прямоугольником* в $X \times Y$, а сами множества A и B — *сторонами* этого прямоугольника. (Заметим, что в случае плоскости мы отклоняемся от классической терминологии, согласно которой $A \times B$ будет называться прямоугольником только в том случае, когда A и B представляют собой промежутки).

Лемма 3.1 (Свойство прямоугольников).

$$a)\ \big(A\times B=\varnothing\big)\iff\big(A=\varnothing\ \ \textit{или}\ \ B=\varnothing\big).$$

$$b)\ \big(A_1\times B_1\subseteq A_2\times B_2\big)\iff\big(A_1\subseteq A_2\ \ \textit{и}\ \ B_1\subseteq B_2\big).$$

$$c)\ \big(A_1\times B_1=A_2\times B_2\big)\iff\big(A_1=A_2\ \ \textit{и}\ \ B_1=B_2\big).$$

◀ Доказательство очевидно. ▶

Предположим, что в пространстве X задана система множеств $\mathfrak{S}$, а в пространстве Y задана система множеств $\mathfrak{D}$.

Определение 3.5. Произведением $\mathfrak{S}\times\mathfrak{D}$ систем множеств $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{D}$ называется совокупность всех прямоугольников $A\times B$ в пространстве $X\times Y$, у которых $A\in\mathfrak{S}$ и $B\in\mathfrak{D}$. Таким образом,

$$\mathfrak{S}\times\mathfrak{D}\doteqdot\{\,A\times B\,|\,A\in\mathfrak{S},B\in\mathfrak{D}\,\}\,.$$

Обозначим через $\mathfrak{S}\otimes\mathfrak{D}=\mathbf{r}(\mathfrak{S}\times\mathfrak{D})$ минимальное кольцо, порожденное системой $\mathfrak{S}\times\mathfrak{D}$, и через $\mathfrak{S}*\mathfrak{D}=\mathbf{r}_\sigma(\mathfrak{S}\times\mathfrak{D})$ минимальное σ-кольцо, порожденное системой $\mathfrak{S}\times\mathfrak{D}$.

Теорема 3.1. *Если системы множеств $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{D}$ являются полукольцами соответственно в пространствах X и Y, то их произведение $\mathfrak{S}\times\mathfrak{D}$ будет полукольцом в пространстве $X\times Y$.*

◀ Для доказательства замкнутости произведения $\mathfrak{S}\times\mathfrak{D}$ относительно операции пересечения множеств достаточно проверить следующее простое равенство:

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2).$$

Из этого равенства вытекает также, что пересечение конечного числа прямоугольников из $\mathfrak{S} \times \mathfrak{D}$ принадлежит $\mathfrak{S} \times \mathfrak{D}$.

Разность двух прямоугольников может быть представлено в виде

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = (A_1 \setminus A_2) \times B_1 \sqcup (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2).$$

Так как по свойству полукольца разность элементов равна

$$A_1 \setminus A_2 = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i, \quad B_1 \setminus B_2 = \bigsqcup_{j=1}^{m} D_j,$$

где $C_i \in \mathfrak{S}$ и $D_j \in \mathfrak{D}$, то отсюда получим равенство

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i \times B_1 \sqcup \bigcap_{j=1}^{m} (A_1 \cap A_2) \times D_j.$$

Таким образом, разность двух прямоугольников является суммой непересекающихся прямоугольников. ►

Следствие 3.1. *Если $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{D}$ — полукольца, то σ-кольцо $\mathfrak{S} * \mathfrak{D}$ совпадает с минимальным нормальным классом, порожденным системой $\mathfrak{S} \times \mathfrak{D}$.*

◄ Так как система $\mathfrak{S} \times \mathfrak{D}$ является полукольцом множеств, то по теореме Сакса (стр. 23) мы получим равенство

$$\mathfrak{S} \otimes \mathfrak{D} = \mathbf{r}_\sigma(\mathfrak{S} \times \mathfrak{D}) = \mathbf{n}_\sigma(\mathfrak{S} \times \mathfrak{D}),$$

которое и доказывает следствие. ►

Теперь остановимся на расширении множества вещественных чисел.

Как известно, к множеству действительных чисел $\mathbb{R}$ обычно добавляют бесконечные числа $\pm\infty$. Основной причиной введения бесконечных чисел было желание обеспечить существование верхней и нижней граней у каждого множества действительных чисел, а также существование предельной точки у каждого бесконечного множества действительных чисел. Далее через

$$\overline{\mathbb{R}} \doteqdot [-\infty, +\infty] = \{\, x \mid -\infty \leqslant x \leqslant \infty \,\}$$

будем обозначать расширенную совокупность всех действительных чисел, включая бесконечные числа $\pm\infty$. При этом предполагается, что вычисления с бесконечными числами производятся согласно следующим правилам арифметических действий:

$$x \pm \infty = \pm\infty + x = \begin{cases} \pm\infty & \text{при } -\infty < x < +\infty, \\ \pm\infty & \text{при } x = \pm\infty, \end{cases}$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty & \text{при } 0 < x < +\infty, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ \mp\infty & \text{при } -\infty \leqslant x < 0, \end{cases}$$

$$x : \infty = x / \pm\infty = \begin{cases} \pm\infty, & \text{при } 0 < x < +\infty, \\ \mp\infty, & \text{при } -\infty < x < 0. \end{cases}$$

Определим для бесконечных чисел модуль $|\pm\infty| = \infty$ и степени:

$$(\pm\infty)^0 = 1; \quad (\pm\infty)^x = \pm\infty \ \text{ и } \ (\pm\infty)^{-x} = 0 \ \text{ при } \ 0 < x < +\infty.$$

Множество $\overline{\mathbb{R}}$ является компактным метрическим пространством относительно метрики

$$\overline{\rho}(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|, \quad \operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\pi/2.$$

Система всех борелевских множеств метрического пространства $\overline{\mathbb{R}}$ обозначается через $\overline{\mathfrak{B}}$. По определению система $\overline{\mathfrak{B}}$ есть минимальная σ-алгебра, порожденная открытыми или замкнутыми множествами из $\overline{\mathbb{R}}$. Система множеств $\overline{\mathfrak{B}}$ содержит все интервалы (a, b), отрезки $[a, b]$, полуинтервалы $(a, b]$ и $[a, b)$. Поэтому в систему борелевских множеств включаются любые промежутки, а также их конечные или счетные объединения и пересечения.

Определение 3.6. Если Σ есть σ-алгебра с единицей X, то пара (X, Σ) называется *измеримым пространством*, а множества из Σ называются Σ-*измеримыми* или просто *измеримыми*.

Измеримое пространство (X, Σ), где X — топологическое пространство, а Σ — σ-алгебра всех борелевских множеств пространства X, часто обозначается через $\mathfrak{B}(X)$. Так, например, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \doteqdot (\mathbb{R}, \Sigma)$ (соотв. $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) \doteqdot (\overline{\mathbb{R}}, \Sigma)$), где Σ — σ-алгебра всех борелевских множеств пространства $\mathbb{R}$ (соотв. $\overline{\mathbb{R}}$).

Упражнения

1. Докажите лемму 3.1.

2. Докажите, что если H_1 — некоторое кольцо подмножеств множества X_1, а H_2 — некоторое кольцо подмножеств множества X_2, то класс H всевозможных конечных объединений непересекающихся прямоугольников вида $A \times B$, где $A \in H_1, B \in H_2$, представляет собой кольцо.

3. Докажите, что
$$\mathfrak{B} = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} - \sigma\text{-алгебра}, \\ \mathcal{A} \supset \tau}} \mathcal{A},$$
где $\mathfrak{B}$ — семейство борелевских множеств топологического пространства (X, τ).

4. Докажите, что подмножества дискретного топологического пространства являются борелевскими.

5. Пусть $E_1 = A_1 \times B_1, E_2 = A_2 \times B_2, E = A \times B$ — непустые прямоугольники. Докажите, что E_1 и E_2 не пересекаются и объединение их равно E тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: либо $A_1 \cup A_2 = A,\ A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $B_1 = B_2 = B$, либо $B_1 \cup B_2 = B,\ B_1 \cap B_2 = \varnothing$ и $A_1 = A_2 = A$.

Глава II

Элементы общей теории конечно аддитивной и счетно аддитивной функции множества

Пусть X $(\neq \varnothing)$ — некоторое множество, $H \subset 2^X$ — некоторый класс (= семейство) множеств, а Y — либо банахово пространство, которое может быть полем скаляров $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$, либо расширенная прямая $\overline{\mathbb{R}}$ $(\doteqdot [-\infty, +\infty])$.

Объектом изучения в этой главе являются функции множества (сокращенно ф. м.) вида

$$\mu\colon H \to Y,$$

удовлетворяющие некоторым специальным требованиям. Реальными примерами таких функций являются объем, определенный для некоторых классов множеств в пространстве $X = \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, заряд частей пространства в электрическом поле и т.д. Специальные требования, предъявляемые к функциям множества μ, вызваны как с переносом в абстрактную ситуацию свойств реальных функций множества, так и с математическими потребностями.

В случае, когда $\mu\colon H \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}}$ не является векторным пространством, так как сумма $+\infty + (-\infty)$ не определена), мы условимся считать, что μ содержит самое большее одно из несобственных значений: $+\infty$ или $-\infty$.

§ 1. Конечно аддитивные функции множества (сокращенно а. ф. м.)

Функции множества, встречающиеся в геометрии и физике, обладают одним характерным свойством: при объединении конечного числа попарно непересекающихся множеств их значения суммируются. Это свойство функций множества называется *аддитивностью*. Поэтому естественно при изучении функций множества ограничиться функциями, обладающими этим свойством. Но для этого необходимо ограничить класс возможных пространств значений функций множества линейными (= векторными) пространствами.

Определение 1.1. Пусть Y — либо линейное пространство, либо $(-\infty, +\infty]$ или $[-\infty, +\infty)$, а $H \subset 2^X$ — некоторый класс множеств. Ф. м. $\mu\colon H \to Y$ называется *конечно аддитивной* или просто *аддитивной* (сокращенно а. ф. м.), если $\mu(\varnothing) = 0$ при условии $\varnothing \in H$ и

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_n\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_n)$$

для каждой конечной системы $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset H$ дизъюнктных множеств, объединение которых принадлежит H.

Простейшими примерами а. ф. м. являются функции

$$\mu(J) \doteqdot b - a, \quad \text{где} \quad J \in H \doteqdot \{\, [a, b) \mid 0 \leqslant a < b < 1 \,\}$$

и

$$\mu(A) \doteqdot \chi_A(x), \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n \ (n \in \mathbb{N})$$

— фиксированная точка, а $A \in 2^{\mathbb{R}^n}$ или $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Ф.м. $\chi_A(x)$ называется *мерой Дирака*, сосредоточенной в точке x, и обозначается символом $\delta_x(A)$.

Интеграл Римана

$$\mu(A) = \int\limits_A f\,dx,$$

распространенный на измеримые по Жордану множества $A \subset \mathbb{R}^n$, является а. ф. м.

Определение 1.2. Пусть μ — ф. м., определенная на алгебре $\Sigma \subset 2^X$ с единицей $S \subseteq X$ и принимающая значения из линейного нормированного пространства Y или из $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда для каждого $E \in \Sigma$ *полная вариация* μ *на* E, обозначаемая через $v(\mu, E)$, по определению, равна

$$v(\mu, E) \doteqdot \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|,$$

где верхняя грань берется по всем конечным системам $\{E_i\}$ попарно непересекающихся множеств из Σ таких, что $E_i \subseteq E$.

Итак,

$$v(\mu, E) \doteqdot \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| : \ \bigsqcup_{i=1}^{n} E_i \subset E, \ E_i \in \Sigma \right\}.$$

(Здесь $|\mu(A)|$ означает норму элемента $\mu(A) \in Y$, если Y — линейное нормированное пространство. Если $\mu(A) = \pm\infty$, то $|\mu(A)| = +\infty$).

Определение 1.3. Ф. м. μ называется *функцией ограниченной вариации*, если $v(\mu, S) < \infty$, и *ограниченной вариации на множестве* E, если $v(\mu, E) < \infty$.

Очевидно, что $v(\nu, S) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$ на Σ. Далее, если $\mu \colon \Sigma \to [0, +\infty]$ и μ — а. ф. м., то

$$\forall\, E \in \Sigma \colon v(\mu, E) = \mu(E).$$

Лемма 1.1. *Если а. ф. м. $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$, где Σ — алгебра множеств с единицей S, ограничена, т. е.*

$$\sup_{E\in\Sigma} |\mu(E)| < \infty,$$

то она является функцией ограниченной вариации, причем

$$v\,(\mu, S) < 4 \sup_{E\in\Sigma} |\mu(E)|.$$

◀ По условию

$$\exists\, M > 0\,\forall\, E \in \Sigma\colon |\mu(E)| \leqslant M.$$

Если μ — вещественная функция, то для каждой конечной системы $\{E_1, \ldots, E_n\}$ дизъюнктных множеств из Σ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| = \sum{}^{+} \mu(E_i) - \sum{}^{-} \mu(E_i) = \mu\left(\bigsqcup{}^{+} E_i\right) - \mu\left(\bigsqcup{}^{-} E_i\right),$$

где $\sum^{+}$ и $\bigsqcup^{+}$ ($\sum^{-}$ и $\bigsqcup^{-}$) относятся к тем i, для которых $\mu(E_i) \geqslant 0$ $(\mu(E_i) \leqslant 0)$.

Таким образом,

$$v\,(\mu, S) = \sup_{A,B\in\Sigma} \{\mu(A) - \mu(B)\} \leqslant 2M.$$

Если μ — комплексная функция, то ее вещественная $\mu_1 = \operatorname{Re}\mu$ и мнимая $\mu_2 = \operatorname{Im}\mu$ части являются вещественными а. ф. м. на Σ, абсолютные значения которых не превосходят M. Поэтому

$$v\,(\mu, S) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| = \sup \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|\mu_1(E_i)|^2 + |\mu_2(E_i)|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu_1(E_i)| + \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu_2(E_i)| \leqslant 4M. \quad \blacktriangleright$$

Лемма 1.2. *Полная вариация а. ф. м. $\mu\colon \Sigma \to Y$ (или $\overline{\mathbb{R}}_+$), где Σ — алгебра подмножеств с единицей $S \subseteq X$, также аддитивна на Σ.*

◀ Пусть $E, F \in \Sigma$, $E \cap F = \varnothing$. Пусть, далее, $\{A_i\}$ — такая конечная система попарно непересекающихся множеств из Σ, что $A_i \subseteq E \sqcup F$. Положим $E_i = EA_i$, $F_i = FA_i$. Тогда, учитывая аддитивность μ и определение полной вариации μ на множестве, получим

$$\sum |\mu(A_i)| = \sum |\mu(E_i \sqcup F_i)| \leqslant \sum \left(|\mu(E_i)| + |\mu(F_i)|\right) =$$
$$= \sum |\mu(E_i)| + \sum |\mu(F_i)| \leqslant v\,(\mu, E) + v\,(\mu, F)$$

и, следовательно,

$$v\,(\mu, E \sqcup F) \leqslant v\,(\mu, E) + v\,(\mu, F)\,. \qquad (*)$$

Отсюда ясно, что если $v(\mu, E \sqcup F) = \infty$, то

$$v(\mu, E \sqcup F) = v(\mu, E) + v(\mu, F).$$

Далее, если $v(\mu, E \sqcup F) < \infty$, то в силу того, что $v(\mu, E)$ и $v(\mu, F)$ не превосходят $v(\mu, E \sqcup F)$, имеем $v(\mu, E) < \infty$ и $v(\mu, F) < \infty$. Поэтому существуют такие конечные системы $\{E_j\}$ и $\{F_j\}$ дизъюнктных множеств из Σ, что $E_j \subseteq E$, $F_j \subseteq F$ и

$$v(\mu, E) \leqslant \sum |\mu(E_j)| + \varepsilon,$$
$$v(\mu, E) \leqslant \sum |\mu(F_j)| + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$v(\mu, E) + v(\mu, F) \leqslant v(\mu, E \sqcup F) + 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ $v(\mu, E) + v(\mu, F) \leqslant v(\mu, E \sqcup F)$. Отсюда и из неравенства $(*)$ вытекает аддитивность относительно $E \in \Sigma$ функции $v(\mu, E)$. ▶

Итак, согласно леммам 1.1 и 1.2 имеем: 1) по произвольно заданной функции множества $\mu\colon \Sigma \to Y$ (или $\overline{\mathbb{R}}_+$), где Σ — алгебра подмножеств с единицей $S \subseteq X$, а Y — линейное нормированное пространство, можно определить (= построить) неотрицательную функцию множества $v(\mu, \cdot)$ (т. е. полную вариацию функции μ) на Σ; 2) $v(\mu, \cdot)$ равна μ, если μ сама неотрицательна и аддитивна; 3) $v(\mu, \cdot)$ аддитивна, если аддитивна μ; 4) $v(\mu, \cdot)$ ограничена, если ограничена и аддитивна μ.

Отметим, что полная вариация $v(\mu, \cdot)$ важна тем, что она мажорирует μ в том смысле, что $v(\mu, E) \geqslant |\mu(E)|$. Также нетрудно видеть, что $v(\mu, \cdot)$ является наименьшей из неотрицательных а. ф. м. λ, удовлетворяющих неравенству $\lambda(E) \geqslant |\mu(E)|$ для всех $E \in \Sigma$.

Ограниченную аддитивную вещественную функцию множества μ можно разложить на «положительную» и «отрицательную» части по аналогии с представлением функции $f(\cdot)$ в виде двух неотрицательных функций: если $f^+(\cdot) = \frac{1}{2}\big(|f(\cdot)| + f(\cdot)\big)$ и $f^-(\cdot) = \frac{1}{2}\big(|f(\cdot)| - f(\cdot)\big)$, то f^+ и f^- неотрицательны и $f = f^+ - f^-$. Сначала введем следующее определение.

Определение 1.4. Пусть μ — ограниченная аддитивная вещественная функция множества, определенная на алгебре Σ с единицей $S \subseteq X$. *Верхней* (= *положительной*) *вариацией* μ^+ и *нижней* (= *отрицательной*) *вариацией* μ^- функции μ называются функции множества, определенные на Σ равенствами

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}\{v(\mu, E) + \mu(E)\},$$
$$\mu^-(E) = \frac{1}{2}\{v(\mu, E) - \mu(E)\}.$$

Теорема 1.1 (разложение в смысле Жордана). *Если μ — ограниченная аддитивная вещественная функция множества, определенная на некоторой алгебре Σ с единицей $S \subseteq X$, то для каждого $E \in \Sigma$*

$$\mu^+(E) = \sup_{F \subseteq E} \mu(F), \quad \mu^-(E) = -\inf_{F \subseteq E} \mu(F), \quad F \in \Sigma.$$

Функции множества μ^+ *и* μ^- *аддитивны, неотрицательны и для каждого* $E \in \Sigma$

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E), \quad v(\mu, E) = \mu^+(E) + \mu^-(E).$$

◀ Если $F \subseteq E$, $E, F \in \Sigma$, то $E = (E \setminus F) \sqcup F$ и, следовательно,

$$2\mu(F) = \mu(F) + \mu(E) - \mu(E \setminus F) \leqslant \mu(E) + |\mu(F)| + |\mu(E \setminus F)| \leqslant \\ \leqslant \mu(E) + v(\mu, E) = 2\mu^+(E).$$

Таким образом,

$$\sup_{F \subseteq E} \mu(F) \leqslant \mu^+(E). \tag{1.1}$$

С другой стороны, пусть $\varepsilon > 0$ и $E_1, \ldots, E_n$ — попарно непересекающиеся множества из Σ такие, что

$$\bigsqcup E_i = E \quad \text{и} \quad \sum |\mu(E_i)| > v(\mu, E) - \varepsilon.$$

Тогда в обозначениях леммы 1.1

$$2\mu^+(E) - \varepsilon = v(\mu, E) + \mu(E) - \varepsilon \leqslant \sum |\mu(E_i)| + \mu(E) = \\ = \mu\Big(\bigsqcup\nolimits^+ E_i\Big) - \mu\Big(\bigsqcup\nolimits^- E_i\Big) + \Big[\mu\Big(\bigsqcup\nolimits^+ E_i\Big) + \mu\Big(\bigsqcup\nolimits^- E_i\Big)\Big] = \\ = 2\mu\Big(\bigsqcup\nolimits^+ E_i\Big) \leqslant 2 \sup_{F \subseteq E} \mu(F).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\mu^+(E) \leqslant \sup_{F \subseteq E} \mu(F),$$

откуда и из неравенства (1.1) получим $\mu^+(E) = \sup\limits_{F \subseteq E} \mu(F)$.

Так как

$$\mu^- = (-\mu)^+,$$

то

$$\mu^-(E) = -\inf_{F \subseteq E} \mu(F).$$

Остальные утверждения теоремы легко вытекают из определений. ▶

Следствие 1.1. *Любая комплексная ограниченная аддитивная функция множества μ может быть выражена через неотрицательные аддитивные функции множества следующим равенством, справедливым для произвольного $E \in \Sigma$:*

$$\mu(E) = (\operatorname{Re}\mu)^+(E) - (\operatorname{Re}\mu)^-(E) + i\Big[(\operatorname{Im}\mu)^+(E) - (\operatorname{Im}\mu)^-(E)\Big].$$

◀ Очевидно, что

$$\forall\, E \in \Sigma\colon\ \mu(E) = (\operatorname{Re}\mu)(E) + i\,(\operatorname{Im}\mu)(E),$$

а функции $\operatorname{Re}\mu$ и $\operatorname{Im}\mu$ ограничены и аддитивны. Применив к $\operatorname{Re}\mu$ и $\operatorname{Im}\mu$ теорему Жордана, получим справедливость утверждения следствия. ▶

Лемма 1.3. (Простейшие свойства неотрицательной а. ф. м.). *Пусть* $\mu\colon H \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *— а. ф. м., H — некоторая система множеств пространства X. Справедливы следующие утверждения.*

1) *Если H — полукольцо или полуалгебра, то* $\mu(\varnothing) = 0$.

2) *Если H — полукольцо или полуалгебра, то*

$$\forall\big(\{A, B\} \subset H,\ A \subset B\big)\colon \mu(A) \leqslant \mu(B)$$

(свойство монотонности μ).

3) *Если H — кольцо или алгебра, то*

$$\forall\big(\{A, B\} \subset H,\ A \subset B,\ \mu(A) < \infty\big)\colon \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

4) *Если H — кольцо или алгебра, а $\{A, B\} \subset H$ и по крайней мере одно из значений $\mu(A), \mu(B)$ конечно, то*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

5) *Если H — кольцо или алгебра, а $\{A, B_1, \ldots, B_n\} \subset H$ и $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, то*

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$$

(свойство полуаддитивности μ).

◀ 1) Так как функции множества, принимающие значение $+\infty$ на каждом множестве из H, не рассматриваются, то существует $A \in H$ такое, что $\mu(A) < +\infty$. Отсюда и из аддитивности μ получим

$$\mu(A) = \mu(A \sqcup \varnothing) = \mu(A) + \mu(\varnothing),$$

т. е. $\mu(\varnothing) = 0$.

2) Рассмотрим случай, когда H — полуалгебра с единицей X (случай, когда H — полукольцо рассматривается аналогично). Так как $B = A \sqcup \big[(X \setminus A) \cap B\big]$ и $X \setminus A$ представляет собой конечное объединение попарно непересекающихся множеств $C_1, \ldots, C_N \in H$, $X \setminus A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{N} C_k$, то $B = A \sqcup (B \cap C_1) \sqcup \cdots \sqcup (B \cap C_N)$. А так как по определению полуалгебры $B \cap C_1, \ldots, B \cap C_N \in H$, то в силу аддитивности μ на H

$$\mu(B) = \mu(A) + \sum_{k=1}^{N} \mu(B \cap C_k) \geqslant \mu(A).$$

3) Так как $B \setminus A \in H$ и $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, то $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

4) Если $\mu(A) < +\infty$ или $\mu(B) < +\infty$, то согласно утверждению 2) данной леммы

$$\mu(A \cap B) < +\infty.$$

Кроме того,

$$A \cap B = \big[A \setminus (A \cap B)\big] \sqcup B,$$

откуда с помощью аддитивности μ и утверждения 3) данной леммы получим

$$\mu(A \cup B) = \mu\big[A \setminus (A \cap B)\big] + \mu(B) =$$
$$= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B).$$

5) С помощью утверждения 2) данной леммы и аддитивности имеем

$$\mu(A) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \mu\Big(B_1 \sqcup (B_2 \setminus B_1) \sqcup \dots \sqcup \big(B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\big)\Big) =$$
$$= \mu(B_1) + \mu(B_2 \setminus B_1) + \dots + \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k).$$

▶

Замечание 1.1. Утверждения 1), 3) и 4) леммы справедливы и для а. ф. м. $\mu\colon H \to Y$, где Y — линейное пространство.

Лемма 1.4. *Пусть $\mu\colon H \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — конечно аддитивная функция множества, а H полукольцо или полуалгебра. Тогда μ счетно монотонна, т. е.*

$$\text{если} \quad \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A, \quad \text{где} \quad A, A_i \in H, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \mu(A).$$

◀ Положим

$$A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j,$$

где $B_j \in H$ (см. предложение I. 2.1). Тогда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{m} B_j$$

и в силу свойства конечной аддитивности и неотрицательности μ мы получим неравенство

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{m} \mu(B_j) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Так как это неравенство справедливо для всех конечных n, то оно верно и при $n = \infty$. ▶

Определение 1.5. Пусть μ — положительная а. ф. м. со значениями из расширенной области вещественных чисел, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S. Для произвольного подмножества $E \subset S$ число $\mu^*(E)$, по определению, полагается равным

$$\mu^*(E) \doteqdot \inf \{ \mu(F) \,|\, F \in \Sigma,\ F \supseteq E \}.$$

Лемма 1.5 (о свойствах ф. м. μ^*). *Пусть μ — положительная а. ф. м., определенная на алгебре Σ подмножеств множества S и принимающая значения из расширенной области вещественных чисел. Тогда*

(a) $\mu^*(E) = \mu(E), \quad E \in \Sigma;$

(b) $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B), \quad A, B \in \Sigma;$

(c) $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B), \quad A \subseteq B \subseteq S.$

◀ Если $E \in \Sigma$, $F \in \Sigma$ и $F \supseteq E$, то $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$, так что $\mu(F) \geqslant \mu(E)$. Следовательно, $\mu^*(E) \geqslant \mu(E)$. С другой стороны, так как $E \supseteq E$, то $\mu(E) \geqslant \mu^*(E)$, откуда вытекает (a). Чтобы доказать (b), возьмем $\varepsilon > 0$, и пусть $A_1, B_1 \in \Sigma$, причем $A_1 \supseteq A$, $B_1 \supseteq B$ и

$$\mu(A_1) \leqslant \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu(B_1) \leqslant \mu^*(B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $A_1 \cup B_1 \supseteq A \cup B$ и

$$\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu(A_1 \cup B_1) + \mu(A_1 \setminus B_1) \leqslant \mu(A_1) + \mu(B_1) \leqslant \\ \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то отсюда вытекает (b). Утверждение (c) непосредственно следует из определения μ^*. ▶

Определение 1.6. Пусть μ — а. ф. м., определенная на некоторой алгебре подмножеств множества S. Подмножество N множества S называется *нуль-множеством* относительно функции μ, если $v^*(\mu, N) = 0$, где v^* — введенное в определении 1.5 продолжение полной вариации v функции μ.

Отметим, что из леммы 1.5 непосредственно вытекают следующие утверждения:

1) Каждое подмножество нуль-множества есть нуль-множество.

2) Каждое конечное объединение нуль-множеств есть нуль-множество.

Замечание 1.2. Множество, на котором μ равна нулю, не обязательно является нуль-множеством, так как μ не обязана быть неотрицательной. С другой стороны, μ только конечно аддитивна, следовательно, она не обязательно σ-аддитивна (см. § 2). В тех случаях, когда $\mu \geqslant 0$ и σ-аддитивна, наряду с термином «нуль-множество» применяется также термин «множество нулевой меры» (см. § 3).

Приведем некоторые понятия, связанные с понятием нуль-множества.

Говорят, что некоторое утверждение относительно точек из S *выполняется почти всюду относительно* μ, или, для краткости, просто *почти всюду* (сокращенно, п.в.), или *для почти всех* $s \in S$, если оно справедливо для всех s, за исключением, возможно точек, принадлежащих некоторому нуль-множеству. Таким образом, если $\lim\limits_n f_n(s) = f(s)$, $s \in S \setminus N$, где N — нуль-множество, то мы говорим, что последовательность (f_n) сходится к f *почти всюду* на S.

Кроме выражения «почти всюду относительно μ», существуют другие выражения, связанные с понятием нуль-множества и используемые для функций f, определенных на S и таких, для которых особый интерес представляет их области значений. Именно, если существует нуль-множество N такое, что сужение функции f на множество $S \setminus N$ ограничено, то f называется *существенно ограниченной относительно* μ или, просто, *существенно ограниченной*. Величина

$$\inf_N \sup_{s \in S \setminus N} |f(s)|,$$

где N пробегает совокупность всех нуль-множеств из S, называется *существенной верхней гранью* для $|f(\cdot)|$ относительно μ и обозначается

$$\operatorname*{Vraisup}_{\mu} |f(s)|.$$

Если для некоторого нуль-множества N область значений сужения f на множество $S \setminus N$ сепарабельна, то функция f называется *почти сепарабельной*. Понятие компактной с точностью до нуль-множества функции определяется аналогично.

В приведенном выше примере, где Σ порождается промежутками $J = [a, b)$, $0 \leqslant a < b < 1$, и $\mu(J) = b - a$, мы видим, что каждое конечное множество точек, а также каждая сходящаяся последовательность точек, принадлежащих $[0, 1]$, является нуль-множеством.

Упражнения

1. Построить пример полукольца H и такой функции $\mu\colon H \to [0, +\infty)$, что для любых $A, B \in H$ и $C = A \sqcup B \in H$ выполнено равенство $\mu(C) = \mu(A) + \mu(B)$, но μ — не конечно аддитивная функция на H.

   Указание. Положив $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, а

   $$H \doteqdot \{\varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_1, a_2\}, X\}$$

   и $\mu(\varnothing) = 0, \mu(a_i) = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\mu(\{a_1, a_2\}) = 2$ и $\mu(X) = 5$, получим $\mu(X) = 5 \neq \sum\limits_{i=1}^{4} \mu(a_i) = 4$. ►

2. Пусть $\mu\colon H \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — а. ф. м., где H — полукольцо. Доказать следующие утверждения.

   a) Если $A, B, A \triangle B \in H$ и $\mu(A \triangle B) = 0$, то $\mu(A) = \mu(B)$.

   b) $H_1 \doteqdot \{ A \in H \mid \mu(A) = 0 \}$ — полукольцо.

   Указание. a) Используя соотношения

$$A \setminus B = (A \triangle B) \cap A \in H \quad \text{и} \quad A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$$

   и монотонность μ, получить $\mu(A \setminus B) \leqslant \mu(A \triangle B) = 0$ и $\mu(A) = \mu(A \cap B)$. Аналогично, $\mu(B) = \mu(A \cap B)$.

   b) Из $\mu(\varnothing) = 0 \Rightarrow \varnothing \in H_1$, а из $A, B \in H_1$ и монотонности μ следует $\mu(A \cap B) \leqslant \mu(A) = 0$; это влечет $A \cap B \in H_1$. Если A и A_1 из H и $A_1 \subset A$, то

$$A = A_1 \sqcup \Big(\bigsqcup_{j=2}^{n} A_j \Big),$$

   где $A_j \in H$ для $j = 2, 3, \ldots, n$. Отсюда и из монотонности μ получаем $\mu(A_j) \leqslant \mu(A) = 0$, $j = 2, \ldots, n$, поэтому все множества A_j принадлежат H. ►

3. Пусть H — кольцо и $\mu\colon H \to [0, +\infty]$ — а. ф. м. и $H_1 \doteqdot \{ A \in H \mid \mu(A) = 0 \}$. Доказать, что H_1 — кольцо.

4. Построить пример такой алгебры Σ с а. ф. м. $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$, что система

$$\Sigma_1 = \{ A \in \Sigma \mid \mu(A) = 0 \}$$

   не является алгеброй.

Решение. Пусть H — полуалгебра всех промежутков $|a,b| \subseteq [0,1]$, включая пустой, и

$$\Sigma \doteqdot \left\{ A = \bigsqcup_{i=1}^{n} J_i \colon J_i = |a_i, b_i| \in H \right\}$$

— минимальная алгебра, содержащая H, с а. ф. м.

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Тогда для любого $a \in [0,1]$ отрезок $[a,a] \in \Sigma_1$. Следовательно, если мы предположим, что Σ_1 имеет единицу E, то $E = [0,1]$. Но $\mu([0,1]) = 1$, поэтому $[0,1] \notin \Sigma_1$, и мы пришли к противоречию. ▶

5. Пусть $\mu\colon H \to [0,+\infty)$ — а. ф. м., где $H \subset 2^X$ — кольцо. Доказать, что для любых A_1, A_2, A_3 из H справедливо равенство

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) -$$
$$- \mu(A_1 \cap A_2) - \mu(A_1 \cap A_3) - \mu(A_2 \cap A_3) +$$
$$+ \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

6. Пусть $\mu\colon \Sigma \to [0,+\infty)$ — а. ф. м., где $\Sigma \subset 2^X$ — алгебра с единицей X, причем $\mu(X) = 1$. Доказать утверждение: если $\{A_1, \dots, A_n\} \subset H$ и

$$\mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) > n - 1,$$

то

$$\mu\Bigl(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Bigr) > 0.$$

Указание. Предположим, что $\mu\Bigl(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\Bigr) = 0$. Тогда

$$\mu\Bigl(X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} A_k\Bigr) = 1 = \mu\Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)\Bigr) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(X \setminus A_k) =$$

$$= n - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Получаем противоречие. ►

7. Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и H — полуалгебра всех n-мерных промежутков (= прямоугольников) замкнутых, открытых и полуоткрытых, содержащихся в прямоугольнике

$$A \doteqdot [\,a, b] \doteqdot [\,a_1, b_1] \times \cdots \times [\,a_n, b_n],$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = \overline{1, n}$. Пусть, далее,

$$|\alpha, \beta| \doteqdot |\alpha_1, \beta_1| \times \cdots \times |\alpha_n, \beta_n| \subseteq A,$$

где $|\alpha_i, \beta_i|$ $(i = 1, \ldots, n)$ — один из промежутков вида $[c, d]\,, [c, d)\,, (c, d]$ или (c, d) из $\mathbb{R}$. Доказать, что функция

$$\mu(|\alpha, \beta|) \doteqdot \prod_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i)$$

— а. ф. м. $\mu\colon H \to [0, +\infty)$.

8. Пусть Σ — алгебра некоторых подмножеств множества X и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ — фиксированное конечное множество, причем для любого $i = 1, \ldots, n$ существует такое множество $A_i \in \Sigma$, что $x_i \in A_i$, $x_j \notin A_i$ при $i \neq j$. Пусть, далее, каждой точке x_i $(i = 1, \ldots, n)$ сопоставлено число $m_i \in \mathbb{R}$, $m_i \neq 0$. Определим $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, полагая

$$\forall\, A \in \Sigma\colon \mu(A) \doteqdot \sum_{i\colon x_i \in A} m_i,$$

где суммирование распространяется на все те i, при которых $x_i \in A$. Доказать, что

a) μ — ограниченная а. ф. м.;

b) полная, верхняя и нижняя вариация μ задаются равенствами:

$$v\,(\mu, A) = \sum_{i\colon x_i \in A} |m_i|,$$

$$\mu^+(A) = \sum_{i\colon x_i \in A} m_i^+, \mu^-(A) = \sum_{i\colon x_i \in A} m_i^-,$$

где

$$m_i^+ \doteqdot \begin{cases} m_i, & \text{если } m_i > 0; \\ 0, & \text{если } m_i < 0, \end{cases} \qquad m_i^- \doteqdot \begin{cases} 0, & \text{если } m_i > 0; \\ |m_i|, & \text{если } m_i < 0, \end{cases}$$

9. Пусть $H \subset 2^{\mathbb{R}}$ — полукольцо всех конечных промежутков $|a, b| \subset \mathbb{R}$ и $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция. Определим ф. м. $\nu_f\colon H \to \mathbb{R}_+$, полагая

$$\mu_f\big([a, b)\big) = f(b-0) - f(a-0),$$
$$\mu_f\big((a, b]\big) = f(b+0) - f(a+0),$$
$$\mu_f\big((a, b)\big) = f(b-0) - f(a+0),$$
$$\mu_f\big([a, b]\big) = f(b+0) - f(a-0).$$

Доказать, что μ_f — а. ф. м., которая не зависит от значений $f(t)$ в точках разрыва функции f, она ограничена, если ограничена f на $\mathbb{R}$, а при $f(t) = t$ на $\mathbb{R}$ $\mu \doteqdot \mu_t$ не ограничена на H и $\mu\big(\{\alpha\}\big) = \mu\big([\alpha, \alpha]\big) = 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

10. Пусть H — полукольцо, состоящее из всех полуинтервалов вида $[a, b)$ из $\mathbb{R}$. Пусть, далее, K — множество всех вещественных неотрицательных а. ф. м. на H, а M — множество всех неубывающих функций на $\mathbb{R}$ и

$$M_1 = \{\, f \in M \mid f(0) = 0 \,\}.$$

Доказать следующие утверждения.

a) Для каждой функции $f \in M$ функция $\mu_f \colon H \to \overline{\mathbb{R}}_+$, где

$$\forall\ [a, b) \in H \colon \mu_f\big([a, b)\big) \doteqdot f(b) - f(a),$$

принадлежит K.

b) Для каждой а. ф. м. $\mu \in K$ функция

$$f_\mu(t) = \begin{cases} \mu\big([0, t)\big) & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t = 0; \\ -\mu\big([t, 0)\big) & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

принадлежит K.

c) Между множествами K и M_1 существует взаимно однозначное соответствие.

11. Интеграл Римана

$$\mu(A) \doteqdot \int\limits_A f\,dt,$$

распространенный на промежутки A числовой оси или на измеримые по Жордану области A конечномерного пространства, является а. ф. м.

§ 2. Счетно аддитивные функции множества

Основным понятием, рассматриваемым в настоящем параграфе, является счетно аддитивная функция множества (сокращенно σ-а. ф. м.), определенная на некотором классе подмножеств основного множества. Это понятие применимо только к таким ф. м., в пространствах значений которых определена сходимость; мы будем рассматривать ф. м. со значениями в (B)-пространствах и в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение 2.1. Пусть μ — а. ф. м., определенная на алгебре Σ подмножеств множества S, векторная, комплексная или со значениями из расширенной области вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда μ называется *счетно аддитивной* (= σ-а. ф. м.), если

$$\mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \qquad (*)$$

для любых попарно непересекающихся множеств $E_1, E_2, \ldots$ из Σ, объединение которых принадлежит Σ.

Комментарий к определению 2.1. Пусть $\mu\colon \Sigma \to Y$, где Y — (B)-пространство. Число $\mu\Big(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\Big)$ не меняется при любой перестановке множеств E_i в объединении $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ и, следовательно, не должна меняться сумма ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ в правой части $(*)$ при любой перестановке ее членов. Это возможно, если пространство значений μ является является (B)-пространством и ряд сходится абсолютно, т. е. если $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|\mu(E_i)\| < \infty$, что для $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ означает $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)| < +\infty$; если $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\mu(E_{i_0}) = +\infty$ хотя бы для одного $i_0 \in \mathbb{N}$, то $\mu\Big(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\Big) = +\infty$.

Отметим, что если $\mu\colon \Sigma \to (-\infty, +\infty]$ и $\mu\Big(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\Big) < +\infty$, то абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ можно доказать непосредственно. В самом деле, пусть

$$E_i^+ = \begin{cases} E_i & \text{при } \mu(E_i) \geqslant 0, \\ \varnothing & \text{при } \mu(E_i) < 0, \end{cases} \qquad E_i^- = \begin{cases} E_i & \text{при } \mu(E_i) < 0, \\ \varnothing & \text{при } \mu(E_i) \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big) = \mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty}E_i^+\Big) + \mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty}E_i^-\Big) < +\infty$$

и, так как μ не может принимать значение $-\infty$,

$$-\infty < \mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty}E_i^-\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i^-) \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i^+\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i^+) < +\infty.$$

Из этих неравенств следует сходимость рядов с неотрицательными членами $\sum |\mu(E_i^-)|$ и $\sum \mu(E_i^+)$, что доказывает наше утверждение.

Определение 2.2. *Мерой* называется σ-а. ф. м., комплексная или со значениями из расширенной области вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}}$, определенная на некоторой σ-алгебре.

Отметим, что часто мерой называют σ-а. ф. м. $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$, говоря о σ-а. ф. м. $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ (или $\overline{\mathbb{R}}$) как *обобщенной мере* (= *заряде*). Мы будем придерживаться определения 2.2.

Определение 2.3. Тройка (S, Σ, μ), состоящая из множества S, некоторой σ-алгебры Σ его подмножеств и меры μ, определенной на Σ, называется *пространством с мерой*. Множества, принадлежащие Σ, называются *Σ-измеримыми* (или просто *измеримыми*).

Пространство (S, Σ, μ) называется *пространством с конечной мерой*, если μ не принимает значения $+\infty$ или $-\infty$, и пространством с *положительной мерой*, если μ не принимает отрицательных значений.

В настоящем параграфе предполагается, что (S, Σ, μ) является пространством с мерой.

Определение 2.4. Пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества S, а μ — определенная на Σ функция, принимающая значения из расширенной области вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда μ называется *σ-конечной на* Σ, если S есть объединение последовательности $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ таких множеств из Σ, что

$$v(\mu, E_n) < \infty, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Определение 2.5. Пространство (S, Σ, μ) называется *пространством с σ-конечной мерой*, если μ σ-конечна на Σ.

Лемма 2.1. *Если (S, Σ, μ) — пространство с мерой, причем $\mu\colon \Sigma \to [-\infty, +\infty)$, то*

$$\sup_{E \in \Sigma} \mu(E) < \infty,$$

т. е. μ ограничена сверху на Σ.

◀ Предположим, что функция μ не ограничена сверху. Множество $E_1 \in \Sigma$ назовем *неограниченным*, если

$$\sup_{E \in \Sigma} \mu(EE_1) = +\infty \qquad (AB \doteqdot A \cap B),$$

и *ограниченным* — в противном случае. Тогда либо

(a) каждое неограниченное множество содержит неограниченное подмножество сколь угодно большой меры, либо

(b) существует такое неограниченное множество $F \in \Sigma$ и такое натуральное число N, что F не содержит неограниченное подмножество, мера которого превосходит N.

Ясно, что в случае (a), применив индукцию, мы можем найти убывающую последовательность неограниченных множеств, для которых $\mu(E_n) \geqslant n$. Тогда

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) + \sum_{i=n}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i+1}) = \mu(E_n), \qquad (*)$$

так как

$$E_n = \Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \sqcup \Big(\bigcup_{i=n}^{\infty} (E_i \setminus E_{i+1})\Big)$$

и последовательность $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ — убывающая. Поскольку $\mu(E_i) \neq +\infty$ (по условию), то ряд в левой части $(*)$ имеет конечную сумму и

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \lim_{n} \mu(E_n) = +\infty,$$

что противоречит тому, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$ и мера на Σ не обращается в $+\infty$ по условию.

В случае (b) обозначим через F_1 измеримое подмножество F, мера которого $\mu(F_1) > N$. Множество F_1 уже не будет неограниченным, а так как само F неограничено, то неограниченным будет и $F \setminus F_1$. Обозначим через A_1 измеримое подмножество множества $F \setminus F_1$, мера которого $\mu(A_1) \geqslant 1$. Тогда, так как F не содержит неограниченных подмножеств меры, большей N, то $F_2 = F_1 \cup A_1$ — ограниченное

Сайт ДГУ

Тиульный лист

Оглавление

страница 70 из 268

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

множество, а значит, $F \setminus F_2$ — неограниченное множество. Пользуясь индукцией, построим такую последовательность попарно непересекающихся измеримых подмножеств $A_1, A_2, \ldots$, что $\mu(A_k) \geqslant 1$ при всех k. Но тогда $\mu\Big(\coprod_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = +\infty$, что противоречит предположению. ►

Следствие 2.1. *Если $\mu\colon \Sigma \to X$ — σ-а. ф. м., Σ — некоторая алгебра и X — (B)-пространство над полем $\mathbb{C}$, то*

$$\sup_{E \in \Sigma} \|\mu(E)\| < \infty.$$

◄ Пусть X^* — сопряженное пространство к пространству X. Тогда при любом $x^* \in X^*$ функции множества

$$\operatorname{Re} x^*\mu \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} x^*\mu$$

являются мерами на Σ, принимающие значения из $\mathbb{R}$. Поэтому по лемме 2.1

$$\operatorname{Re} x^*\mu(\Sigma) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} x^*\mu(\Sigma)$$

ограничены для каждого $x^* \in X^*$. Отсюда и из принципа равномерной ограниченности (см. [3]) получаем, что множество $\mu(\Sigma)$ ограничено в X. ►

Следствие 2.2. *Если (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, то μ ограничено на Σ.*

Лемма 2.2. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$. Тогда*

1) полная вариация $v(\mu)$ σ-аддитивна и ограничена;

2) если $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, то верхняя и нижняя вариации

$$\mu^+ = \tfrac{1}{2}\big(v(\mu)+\mu\big) \quad \text{и} \quad \mu^- = \tfrac{1}{2}\big(v(\mu)-\mu\big) \qquad (*)$$

σ-аддитивны.

◄ Ограниченность $v(\mu)$ вытекает из леммы 1.1. В силу следствия 2.2 для доказательства утверждения 1) достаточно доказать σ-аддитивность $v(\mu)$. Это же условие достаточно и для доказательства утверждения 2), так как μ^+ и μ^- определяются равенствами $(*)$. Итак, докажем σ-аддитивность $v(\mu)$. Пусть $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ и $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Так как $v(\mu)$ неотрицательна и аддитивна, то

$$v\left(\mu, E\right) \geqslant v\Big(\mu, \bigsqcup_{n=1}^{m} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{m} v\left(\mu, E_n\right) \quad (\forall\, m \in \mathbb{N}),$$

следовательно,

$$v\left(\mu, E\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} v\left(\mu, E_n\right).$$

С другой стороны, если $(F_i)_{i=1}^k$ — конечная последовательность попарно непересекающиеся измеримых множеств, содержащихся в E, то

$$\sum_{i=1}^k |\mu(F_i)| = \sum_{i=1}^k \left|\mu\Big(\bigsqcup_{n=1}^\infty (F_iE_n)\Big)\right| = \sum_{i=1}^k \left|\sum_{n=1}^\infty \mu(F_iE_n)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^k |\mu(F_iE_n)| \leqslant \sum_{n=1}^\infty v\left(\mu, E_n\right),$$

так что

$$v\left(\mu, E\right) \leqslant \sum_{n=1}^\infty v\left(\mu, E_n\right).$$

Следовательно,

$$v\left(\mu, E\right) = \sum_{n=1}^\infty v\left(\mu, E_n\right). \quad \blacktriangleright$$

Отметим, что для любой меры $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ имеет место $v\left(\mu, E\right) = \mu(E)$.

Определение 2.6. Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторый класс множеств и $\varphi\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ (или $\overline{\mathbb{R}}_+$) — функция множества.

Функция φ называется *непрерывной сверху* на $\mathfrak{S}$, если для любой убывающей последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{S}$ имеет место

$$\varphi\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_n \varphi(A_n).$$

Функция φ называется *непрерывной снизу* на $\mathfrak{S}$, если для любой возрастающей последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S}$ такой, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{S}$ имеет место

$$\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_n \varphi(A_n).$$

Функция множества, непрерывная сверху и снизу на $\mathfrak{S}$, называется *непрерывной* на $\mathfrak{S}$.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра и $\mu\colon \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — а. ф. м. Для того чтобы μ была σ-аддитивна, необходимо и достаточно, чтобы μ была непрерывна снизу.*

◄ Необходимость. Пусть $A_n \subseteq A_{n+1}$, $A, A_n \in \mathfrak{A}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Если $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\colon \mu(A_{n_0}) = +\infty$, то в силу монотонности μ на $\mathfrak{A}$

$$\forall\, n \geqslant n_0\colon \mu(A_n) = +\infty, \quad \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = +\infty,$$

следовательно,
$$\mu(A) = \lim_n \mu(A_n).$$
Пусть $\forall\, n \geqslant 1$: $\mu(A_n) < +\infty$. В силу σ-аддитивности μ с учетом утверждения 1 леммы 1.3 имеем
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\big(A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup \dots \sqcup (A_n \setminus A_{n-1}) \sqcup \dots\big) =$$
$$= \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) =$$
$$= \mu(A_1) + \lim_k \sum_{n=2}^{k} \big[\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\big] = \lim_k \mu(A_k).$$
Достаточность. Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ — произвольная последовательность попарно непересекающихся множеств такая, что $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Положим
$$B_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \qquad (n = 1, 2, \dots).$$
Тогда
$$B_n \subseteq B_{n+1} \ \ (n = 1, 2, \dots) \ \text{ и } \ \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Следовательно, в силу непрерывности μ снизу,

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_n \mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\Big),$$

а в силу ее аддитивности

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k),$$

откуда вытекает

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad \blacktriangleright$$

Замечание 2.1. Из доказательства леммы видно, что она верна и для случая, когда $\mathfrak{A}$ — кольцо.

Замечание 2.2. Если в условии леммы считать, что $\mathfrak{A}$ — полукольцо, то из σ-аддитивности μ на $\mathfrak{A}$ следует ее непрерывность снизу, а обратное, вообще говоря, неверно.

В самом деле, в случае если $\mu(A_n) = \infty$ при некотором n, то утверждение непрерывности снизу вытекает из свойства монотонности μ.

Пусть $\mu(A_n) < \infty$ при всех n. Для доказательства в этом случае положим, что $A_0 = \varnothing$ и $A_n \setminus A_{n-1} = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k_n} B_{nj}$, где $B_{nj} \in \mathfrak{A}$ (см. предложение 2.1). Тогда, применяя свойство σ-аддитивности μ, мы получим

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\mu(B_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\right] = \lim_n \mu(A_n).$$

Теперь приведем пример непрерывной снизу (и сверху), но не σ-аддитивной ф. м. на полукольце S подмножеств $[0,1)\cap\mathbb{Q}$:

$$S \doteqdot \left\{S_{a,b} = [a,b)\cap[0,1)\cap\mathbb{Q}\right\}, \quad \mu(S_{a,b}) \doteqdot b-a.$$

Лемма 2.4. *Пусть ти: $\mathfrak{A} \to [0,+\infty)$ — а. ф. м., где $\mathfrak{A}$ — алгебра. Тогда*

$$\Big(\mu - \sigma\text{-а. ф. м. на } \mathfrak{A}\Big) \iff \Big(\mu \text{ непрерывна сверху на } \mathfrak{A}\Big).$$

◀ Доказем импликацию

$$\Big(\mu - \sigma\text{-а. ф. м. на } \mathfrak{A}\Big) \Longrightarrow \Big(\mu \text{ непрерывна сверху на } \mathfrak{A}\Big).$$

Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$, $A_n \supseteq A_{n+1}$ и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Согласно лемме 2.3 имеем

$$\mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_n)\Big) = \lim_n \mu(A_1 \setminus A_n),$$

откуда с учетом условия $\mu(A_1) < +\infty$ и утверждения 3 леммы 1.3 получаем

$$\mu(A_1) - \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_n \big(\mu(A_1) - \mu(A_n)\big).$$

Теперь покажем, что

$$\big(\mu \text{ непрерывна сверху на } \mathfrak{A}\big) \implies \big(\mu - \sigma\text{-а. ф. м. на } \mathfrak{A}\big).$$

Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ — произвольная последовательность попарно непересекающихся множеств и $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$. Положим

$$B_n = \bigsqcup_{i=n}^{\infty} A_i = A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathfrak{A}.$$

Тогда

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \quad \text{и} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing.$$

Поэтому

$$0=\lim_n\mu(B_n)=\lim_n\mu\Big(A\setminus\bigsqcup_{i=1}^{n-1}A_i\Big)=$$

$$=\lim_n\Big(\mu(A)-\sum_{k=1}^{n-1}\mu(A_k)\Big)=\mu(A)-\lim_n\sum_{k=1}^{n-1}\mu(A_k).$$

Но это и означает, что

$$\mu(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).\quad \blacktriangleright$$

Замечание 2.3. Условие конечности а. ф. м. μ, т. е. условие $\mu\colon\mathfrak{A}\to|\,0,\infty|$ в лемме является существенным. Это подтверждается следующим примером. Пусть $\mathfrak{A}=2^{\mathbb{N}}$, μ — σ-а. ф. м. на $\mathfrak{A}$, определенная равенствами: $\mu(\varnothing)=0$, $\mu(\{n\})=1$, $n\in\mathbb{N}$. Положим $A_n=\{n,n+1,\dots\}$, $n\geqslant 1$. Тогда

$$A_n\supset A_{n+1},\ n\geqslant 1;\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing,$$

но

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\neq\lim_n\mu(A_n).$$

Замечание 2.4. Лемма 2.4 остается справедливой, если в ее условии считать $\mathfrak{A}$ кольцом (это доказывается так же, как сама лемма), но не полукольцом или полуалгеброй (см. замечание 2.2).

Лемма 2.5. *Пусть $\mu\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ — а. ф. м., где $\mathfrak{A}$ — алгебра (или кольцо), непрерывна сверху в $\varnothing$, т. е. если $\lim \mu(C_n) = 0$ для любой монотонно убывающей последовательности множеств $(C_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ такой, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$, то μ — σ-аддитивна на $\mathfrak{A}$.*

◀ Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность попарно непересекающихся множеств из $\mathfrak{A}$ такая, что все множества

$$C_n \doteqdot \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \quad (n = 1, 2, \dots) \ \text{ и } \ A \doteqdot \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

принадлежат $\mathfrak{A}$. Очевидно, что множества C_n образуют убывающую последовательность и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$. Поэтому в силу непрерывности μ в точке $\varnothing \in \mathfrak{A}$

$$\lim_n \mu(C_n) = \mu(\varnothing) = 0, \tag{$*$}$$

а в силу ее аддитивности

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \sqcup \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \mu(C_n). \tag{$**$}$$

Из $(*)$ и $(**)$ вытекает сходимость последовательности сумм

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

к $\mu(A)$, т. е. формула $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. ►

Из лемм 2.3, 2.4 и 2.5 видно, что естественной областью определения σ-а. ф. м. является σ-алгебра.

Лемма 2.6. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с мерой* $\mu \colon \Sigma \to [0, +\infty)$. *Тогда*

$$\forall\ (E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma:$$
$$\mu\Big(\varliminf_n E_n\Big) \leqslant \varliminf_n \mu(E_n) \leqslant \varlimsup_n \mu(E_n) \leqslant \mu\Big(\varlimsup_n E_n\Big).$$

◄ Прежде всего заметим, что если $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность с пределом E, то

$$E = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup \dots \quad \text{и} \quad \mu(E) = \lim_n \mu(E_n).$$

Переходя к дополнениям, получаем, что это соотношение остается справедливым также и для невозрастающих последовательностей. В самом деле, пусть $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ и $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ Тогда последовательность

$$(S \setminus E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$$

будет неубывающей и по доказанному

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(S\setminus E_n)\Big)=\lim_n \mu(S\setminus E_n).$$

Отсюда, учитывая

$$S\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}(S\setminus E_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[S\setminus(S\setminus E_n)\right]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$$

и

$$S\setminus(S\setminus E_n)=E_n,$$

получим

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\lim_n \mu(E_n).$$

Пусть теперь $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность. Учитывая, что μ неотрицательна, получим

$$\mu\Big(\underline{\operatorname{Lim}}_n E_n\Big)=\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}E_m\Big)=\lim_n \mu\Big(\bigcap_{m=n}^{\infty}E_m\Big)\leqslant\underline{\lim}_n\,\mu(E_n),$$

$$\mu\Big(\overline{\operatorname{Lim}}_n E_n\Big)=\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m\Big)=\lim_n \mu\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m\Big)\geqslant\overline{\lim}_n\,\mu(E_n).$$

Лемма доказана. ▶

Следствие 2.3. *Если* (S, Σ, μ) — *пространство с конечной мерой, т. е.* $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ *(*$= \mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$*), и* $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ — *сходящаяся последовательность, то*

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu\Big(\operatorname*{Lim}_n E_n\Big).$$

◀ Рассмотрим сначала случай, когда $\mu\colon \Sigma \to [0, +\infty)$. Так как

$$\operatorname*{Lim}_n E_n = \underline{\operatorname*{Lim}}_n E_n = \overline{\operatorname*{Lim}}_n E_n$$

(по условию), то из леммы 2.6 получим

$$\mu\Big(\operatorname*{Lim}_n E_n\Big) = \mu\Big(\underline{\operatorname*{Lim}}_n E_n\Big) \leqslant \varliminf_n \mu(E_n) \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_n \mu(E_n) \leqslant \mu\Big(\overline{\operatorname*{Lim}}_n E_n\Big) = \mu\Big(\operatorname*{Lim}_n E_n\Big),$$

откуда и следует

$$\mu\Big(\operatorname*{Lim}_n E_n\Big) = \lim_n \mu(E_n).$$

В общем случае можно получить доказательство, разложив μ на вещественную и мнимую части и представив затем каждую из них с помощью теоремы 1.1 (Жордана) в виде разности двух положительных мер. После этого ввиду леммы 2.6 все сводится к положительному случаю μ. ▶

Теорема 2.1 (о разложении в смысле Хана). *Для каждой меры μ, принимающей значения из расширенной области вещественных чисел, найдется такое измеримое множество E_0, что μ неотрицательна на измеримых подмножествах из E_0 и неположительна на измеримых подмножествах из $E' \doteqdot S \setminus E_0$.*

◀ Заметим сначала, что по соглашению либо μ, либо $-\mu$ не принимает значение $+\infty$. Можно, следовательно, предположить, что $\mu(E) < \infty$ для всякого E из σ-алгебры Σ, на которой определена μ.

Пусть P состоит из всех таких множеств $E \in \Sigma$, для которых $\mu(AE) \geqslant 0$ при всех $A \in \Sigma$, и $E_n \in P$ — такая последовательность множеств, что

$$\mu(E_n) \to \sup_{E \in P} \mu(E).$$

Так как μ счетно аддитивна, то множество $E_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ принадлежит P и

$$\mu(E_0) = \sup_{E \in P} \mu(E).$$

Теперь методом от противного докажем, что $\mu(E_0' A) \leqslant 0$ для каждого $A \in \Sigma$. Предположим, что

$$A_0 \in \Sigma,\ A_0 \subseteq E_0' \ \text{ и } \ \mu(A_0) > 0.$$

Семейство множеств

$$Q = \{\, E \mid E \in \Sigma,\ E \subseteq A_0,\ \mu(E) \geqslant \mu(A_0)\,\}$$

превратим в частично упорядоченное, считая $E_1 \preccurlyeq E_2$, если либо $E_1 \supset E_2$ и $\mu(E_1) < \mu(E_2)$, либо $E_1 = E_2$. Применим лемму Цорна, чтобы доказать, что Q содержит максимальный элемент. Пусть Q_0 — линейно упорядоченное подмножество Q. Если найдется такое $B_0 \in Q_0$, что

$$\mu(B_0) = \sup_{E \in Q_0} \mu(E),$$

то ясно, что B_0 и будем мажорантой для Q_0. С другой стороны, если для всех $E \in Q_0$

$$\mu(E) < \delta = \sup_{E \in Q_0} \mu(E),$$

то существует такая последовательность множеств $(B_n) \subset Q_0$, что $\mu(B_n) < \mu(B_{n+1}) \to \delta$. Так как Q_0 линейно упорядочено, то $B_n \supset B_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Так как $\mu(B_n) < \mu(B_{n+1}) < \infty$, то все $\mu(B_n)$, $n \geqslant 2$, конечны. Если $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$, то

$$B_n = B_0 \sqcup \bigsqcup_{k=n}^{\infty} C_k, \quad \text{и} \quad B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n,$$

так что

$$\mu(B_n) = \mu(B_0) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(C_k), \quad n \geqslant 2.$$

Таким образом,

$$\lim_n \mu(B_n) = \mu(B_0),$$

и множество $B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ содержится в Q, причем $\delta = \mu(B_0)$. Пусть $E \in Q_0$. Тогда $\mu(E) < \delta = \mu(B_0)$ и найдется такое n, что $\mu(E) < \mu(B_n)$. Но Q_0 линейно упорядочено, поэтому $E \supset B_n \supset B_0$. Таким образом, B_0 является мажорантой для Q_0. Так как каждое линейно упорядоченное подмножество из Q имеет мажоранту, то в Q существует максимальный элемент M. Он принадлежит P, потому что в противном случае существовало бы такое множество $A \in \Sigma$, $A \subseteq M$, что

$$\mu(A) < 0,\ M \setminus A \subseteq A_0,$$
$$\mu(M \setminus A) = \mu(M) - \mu(A) > \mu(M) \geqslant \mu(A_0)$$

и, следовательно, $M \setminus A \succcurlyeq M$.

Так как $M \subseteq E_0'$ и $M \in P$, то

$$\mu(M \cup E_0) = \mu(M) + \mu(E_0) \geqslant \sup_{E \in P} \mu(E).$$

Это противоречие и доказывает, что $\mu(E_0' A) \leqslant 0$ для каждого $A \in \Sigma$. ▶

Теорема о разложении в смысле Хана приводит нас к обобщению понятия положительной и отрицательной вариации для мер, принимающих значения из расширенной области вещественных чисел.

Следствие 2.4. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой, причем μ принимает значения из расширенной области вещественных чисел. Тогда существуют такие неотрицательные меры μ^+ и μ_-,одна из которых конечна, что*

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad v(\mu) = \mu^+ + \mu^-.$$

◀ Если E_0 — множество, существование которого доказано в предыдущей теореме, то функции μ^+ и μ^-, определяемые следующим образом:

$$\mu^+(A) \doteqdot \mu(E_0 A), \quad \mu^-(A) \doteqdot -\mu(E_0' A), \ A \in \Sigma,$$

обладают, очевидно, требуемыми свойствами. ▶

Ясно, что если μ — ограниченная функция, то функции μ^+ и μ^- совпадают с соответствующими компонентами разложения в смысле Жордана. Мы будем продолжать называть их, даже если μ принимает и бесконечное значение, как в в следствии 2.4, *положительной* и *отрицательной вариацией* μ.

Определение 2.7. Пусть Σ — алгебра, $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ (или $\overline{\mathbb{R}}_+$) — а. ф. м. Функция множества $\lambda\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ называется *непрерывной относительно* μ или, короче, *μ-непрерывной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall (A \in \Sigma, \, v(\mu, A) < \delta)\colon |\lambda(A)| < \varepsilon,$$

т. е. если

$$\lim_{v(\mu,A)\to 0} \lambda(A) = 0.$$

При этом очевидно, что если $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$, то $v(\mu, A) = \mu(A)$.

Лемма 2.7. *Пусть λ, μ — скалярные аддитивные функции множества, определенные на алгебре Σ, причем λ — μ-непрерывна на Σ. Тогда полная вариация λ также μ-непрерывна. Если λ — вещественная а. ф. м. и она μ-непрерывна, то μ-непрерывны ее положительная и отрицательная вариации.*

◀ μ-непрерывность полной вариации $v(\lambda)$ следует из неравенства

$$v\,(\lambda, E) \leqslant 4 \sup_{A \subseteq E} |\lambda(A)|$$

(см. лемму 1.1), а остальные утверждения леммы очевидны. ▶

Предложение 2.1. *Пусть Σ — алгебра и $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ — мера. Тогда каждая аддитивная и μ-непрерывная функция $\lambda\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ является σ-аддитивной, т. е. служит мерой.*

◀ Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, как указано в определении 2.7. Если множества $A_i \in \Sigma$ не пересекаются и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$, то сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A).$$

Поэтому существует такое число n, что

$$\mu(B_n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(A_i) < \delta,$$

где множества

$$B_n \div \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma.$$

Отсюда получим

$$\left|\lambda(A) - \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)\right| = \left|\lambda\Big(A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\Big)\right| = |\lambda(B_n)| < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i). \quad \blacktriangleright$$

Определение 2.8. Аддитивная функция множества $\lambda\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ называется *абсолютно μ-непрерывной*, если $\lambda(A) = 0$ для любого множества $A \in \Sigma$ такого, что $v\,(\mu, A) = 0$.

Установим удобный критерий для проверки μ-непрерывности счетно аддитивной функции λ относительно счетно аддитивной меры μ.

Лемма 2.8. *Пусть λ и μ — счетно аддитивные функции множества, комплексные или со значениями в расширенной области вещественных чисел, и определенные на σ-алгебре Σ, причем λ предполагается конечной. Тогда для того, чтобы λ была непрерывной относительно μ, необходимо и достаточно, чтобы из равенства $v\,(\mu, E) = 0$ вытекало равенство $\lambda(E) = 0$, т. е. чтобы λ была абсолютно μ-непрерывной.*

◀ Необходимость этого условия очевидна. Чтобы доказать его достаточность, заметим сперва, что функция множества λ в том и только в том случае удовлетворяет этому условию, если положительная и отрицательная вариации ее вещественной и мнимой частей также ему удовлетворяют. Можно, следовательно, предполагать, что λ неотрицательна. Если λ не является абсолютно μ-непрерывной, то существует такое $\varepsilon > 0$ и такие множества $E_n \in \Sigma$, $n = 1, 2 \ldots$, что $\lambda(E_n) \geqslant \varepsilon$, в то время как $v\,(\mu, E_n) < \frac{1}{2^n}$. Положим $E_0 = \overline{\operatorname{Lim}_n} E_n$. Тогда для каждого $n = 1, 2, \ldots$

$$v\,(\mu, E_0) \leqslant v\Big(\mu, \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\Big) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

откуда следует, что $v\,(\mu, E_0) = 0$ и, значит, $\lambda(E_0) = 0$. С другой стороны, по лемме 2.6,

$$\lambda(E_0) \geqslant \varlimsup_n \lambda(E_n) \geqslant \varepsilon.$$

Это противоречие и доказывает лемму. ▶

Отметим, что из доказанной леммы вытекает, что если каждый член обобщенной последовательности λ_α конечных счетно аддитивных мер абсолютно непрерывны относительно μ и если

$$\lim_\alpha \lambda_\alpha(E) = \lambda(E), \quad E \in \Sigma,$$

где λ тоже конечная счетно аддитивная мера, то и λ абсолютно непрерывна.

Определение 2.9. Пусть задана конечная аддитивная ф. м. $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ (или $\overline{\mathbb{R}}_+$) на некоторой алгебре множеств Σ с единицей S. Функция множества $\lambda\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ называется *μ-сингулярной* на множестве S, если для любого ε существует такое множество $A \in \Sigma$, что $v(\mu, A) < \varepsilon$ и $|\lambda(B)| < \varepsilon$ для любого множества $B \subseteq S \setminus A$, $B \in \Sigma$.

Отметим, что в этом определении $v(\mu, A) = \mu(A)$, если $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$.

Предложение 2.2. *Если аддитивная функция $\lambda\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ одновременно μ-непрерывна и μ-сингулярна, то $\lambda = 0$.*

◀ По условию μ-непрерывности λ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $v(\lambda, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $A \in \Sigma$ таких, что $v(\mu, A) < \delta$. Выберем $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда по условию μ-сингулярности λ существует $A \in \Sigma$, для которого $v(\mu, A) < \delta$ и $|\lambda(B)| < \delta$ для всех $B \subseteq S \setminus A$ таких, что $B \in \Sigma$. Отсюда $|\lambda(C)| < \varepsilon$ для всех $C \in \Sigma$. Следовательно, $\lambda = 0$. ▶

Определение 2.10. Аддитивная функция $\lambda\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ называется *абсолютно μ-сингулярной*, если существует множество $A \in \Sigma$ такое, что $v(\mu, A) = 0$ и $\lambda(B) = 0$ для всех $B \subseteq S \setminus A$, $B \in \Sigma$.

Итак, абсолютная μ-сингулярность аддитивной функции множества λ означает существование такого множества $E_0 \in \Sigma$, что $v(\mu, E_0) = 0$ и $\lambda(E) = \lambda(E_0 E)$ для любого $E \in \Sigma$.

Установим удобный критерий для проверки сингулярности меры λ относительно меры μ.

Лемма 2.9. *Пусть (S, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$. Для того чтобы мера $\lambda\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ была μ-сингулярна на S, необходимо и достаточно, чтобы мера λ была абсолютно μ-сингулярной.*

◀ Достаточность этого условия очевидна. Докажем необходимость. По условию μ-сингулярности существует такая система множеств $A_i \in \Sigma$, что
$$v(\mu, A_i) < \frac{1}{2^{i+1}} \quad \text{и} \quad v(\lambda, S \setminus A_i) < \frac{1}{2^{i+1}}.$$
Положим
$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \text{где} \quad B_n \doteqdot \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i.$$
Тогда $A \in \Sigma$ и при этом для всех n
$$v(\mu, A) \leqslant v(\mu, B_n) = v\Big(\mu, \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} v(\mu, A_i) < \frac{1}{2^n}.$$
Значит, $v(\mu, A) = 0$. С другой стороны, пусть $C_n = S \setminus B_n$, тогда $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ Поскольку полная вариация $v(\lambda)$ σ-аддитивна, она непрерывна снизу. Следовательно, с учетом $S \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, получим
$$v(\lambda, S \setminus A) = \lim_n v(\lambda, C_n) \leqslant \lim_i v(\lambda, S \setminus A_i) = 0.$$
Таким образом,
$$v(\lambda, S \setminus A) = 0.$$
Лемма доказана. ▶

Определение 2.11. Мера $\lambda \colon \Sigma \to \mathbb{K}$ называется *сосредоточенной* на множестве $E_0 \subseteq S$, если $v(\lambda, S \setminus E_0) = 0$. При этом множество E_0 называется *носителем* меры λ.

По лемме 2.9 μ-сингулярная мера λ сосредоточена на множестве $E_0 \in \Sigma$, для которого $v(\mu, E_0) = 0$.

Теорема 2.2 (о разложении в смысле Лебега). *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Тогда каждая определенная на Σ конечная счетно аддитивная мера λ однозначно представима в виде суммы $\lambda = \alpha + \beta$, где α абсолютно непрерывна, а β сингулярна относительно μ.*

◀ Единственность разложения. Предположим, что кроме $\lambda = \alpha + \beta$ существует другое такое разложение $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$. Тогда

$$\forall\, E \in \Sigma\colon\ \alpha(E) - \alpha_1(E) = \beta_1(E) - \beta(E).$$

Левая часть здесь μ-непрерывна, а правая μ-сингулярна. Следовательно, единственность доказана.

Ввиду того что к вещественной и мнимой частям комплексной функции λ можно применить разложение в смысле Жордана, мы можем и будем предполагать, что λ неотрицательна. Совокупность N всех множеств $E \in \Sigma$, для которых $v(\mu, E) = 0$ частично упорядочим, считая, что $A \preccurlyeq B$, если $A \subseteq B$ и $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$. Если N_0 — линейно упорядоченное подмножество из N и

$$\delta = \sup_{E \in N_0} \lambda(E),$$

то либо в самом множестве N_0 существует мажоранта E_0 для N_0, либо в N_0 найдется такая последовательность $(E_n)_{n=1}^{\infty}$, для которой

$$\lambda(E_n) < \lambda(E_{n+1}) \to \delta \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В последнем случае
$$E_n \subset E_{n+1},$$
и $E = \bigcup E_n$, как легко видеть, будет мажорантой для N_0. Из леммы Цорна вытекает, что N содержит максимальный элемент E_0. Функция β, определенная на Σ равенством
$$\beta(E) = \lambda(EE_0),$$
сингулярна относительно μ. Чтобы показать, что функция α, определенная на Σ равенством
$$\alpha(E) = \lambda(E) - \beta(E) = \lambda(EE_0'),$$
абсолютно непрерывна относительно μ, предположим, что
$$E \in N \;\text{ и }\; \lambda(E) = \lambda(EE_0') > 0.$$
Тогда
$$E_0 \subseteq E_0 \sqcup EE_0' \in N,$$
что противоречит максимальности E_0 и доказывает абсолютную непрерывность относительно μ. ▶

Остановимся на одном классе σ-а.ф.м, определенных на некоторой алгебре подмножеств топологического пространства (см. ниже теорему 2.3) и допускающих σ-аддитивное продолжение на σ-алгебру (см. §3). Сначала введем понятие регулярности меры.

Определение 2.12. Аддитивная функция множества μ, определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств топологического пространства S, называется *регулярной*, если для каждого $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$ существуют такое множество $F \in \Sigma$, замыкание которого содержится в E, и такое множество $G \in \Sigma$, внутренность которого содержит E, что для каждого множества $C \in \Sigma$, содержащегося в $G \setminus F$, $|\mu(C)| < \varepsilon$.

В частности, если Σ содержит открытые и замкнутые подмножества из S, то функция μ регулярна, если для любых $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие открытое G и замкнутое F множества, что $F \subset E \subset G$ и $|\mu(G \setminus F)| < \varepsilon$.

Замечание 2.5. Для аддитивной функции множества μ, значения которой либо комплексны, либо принадлежат расширенной области вещественных чисел, лемма 1.1 утверждает, что

$$\sup |\mu(C)| \leqslant v\,(\mu, G \setminus F) \leqslant 4 \sup |\mu(C)|.$$

Следовательно, для таких функций требование

$$\sup |\mu(C)| < \varepsilon$$

в определении регулярности можно заменить эквивалентным ему условием

$$v\,(\mu, G \setminus F) < \varepsilon.$$

Лемма 2.10. *Полная вариация регулярной аддитивной функции множества, определенной на некоторой алгебре, значения которой либо комплексны, либо принадлежат расширенной области вещественных чисел, регулярна.*

Положительная и отрицательная вариации ограниченной регулярной вещественной аддитивной функции множества также регулярны.

◀ Если μ — регулярная а. ф. м., определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств множества S, комплексная или со значениями из расширенной области вещественных чисел, то регулярность $v(\mu)$ непосредственно вытекает из замечания 2.5.

Пусть теперь μ ограничена и принимает вещественные значения и пусть $E \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$, а F и G — такие множества из Σ, что замыкание F содержится в E, E содержится во внутренности G, причем

$$v(\mu, G \setminus F) < \varepsilon.$$

Тогда, так как

$$v(\mu, G \setminus F) = \mu^+(G \setminus F) + \mu^-(G \setminus F),$$

то каждое слагаемое $\mu^+(G \setminus F)$ и $\mu^-(G \setminus F)$ также меньше ε, а следовательно, μ^+ и μ^- регулярны. ▶

Теорема 2.3 (А. Д. Александров). *Ограниченная регулярная комплексная аддитивная функция множества μ, определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств бикомпактного топологического пространства S, счетно аддитивна.*

◀ Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим последовательность $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся множеств из Σ такую, что $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$. Тогда найдется такое множество $F \in \Sigma$, что

$$\overline{F} \subseteq E \quad \text{и} \quad v(\mu, E \setminus F) < \varepsilon.$$

Кроме того, найдется такое множество $G_n \in \Sigma$, что E_n содержится во внутренности $G_n^\circ \doteqdot \operatorname{Int} G_n$ множества G_n, причем

$$v\left(\mu, G_n \setminus F_n\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Так как

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^\circ \supseteq \overline{F},$$

то существует такое натуральное число m, что

$$\bigcup_{n=1}^{m} G_n^\circ \supseteq F.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} v\left(\mu, E_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} v\left(\mu, G_n\right) - \varepsilon \geqslant \sum_{n=1}^{m} v\left(\mu, G_n\right) - \varepsilon \geqslant$$
$$\geqslant v\left(\mu, F\right) - \varepsilon \geqslant v\left(\mu, E\right) - 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} v\left(\mu, E_n\right) \geqslant v\left(\mu, E\right).$$

Так как

$$v\,(\mu,E)\geqslant v\Big(\mu,\bigsqcup_{i=1}^{n}E_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}v\,(\mu,E_i)\,,\quad n=1,2,\dots,$$

то

$$v\,(\mu,E)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}v\,(\mu,E_i)$$

и, следовательно, $v(\mu)$ счетно аддитивна.

Ввиду ограниченности функции μ имеем $v\,(\mu,E)<\infty$ (по лемме 1.1). Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty}v\,(\mu,E_i)<\infty$$

и

$$v\Big(\mu,\bigsqcup_{i=n}^{\infty}E_i\Big)=\sum_{i=n}^{\infty}v\,(\mu,E_i)\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Таким образом,

$$\Big|\mu(E)-\sum_{i=1}^{n-1}\mu(E_i)\Big|=\Big|\mu\Big(\bigsqcup_{i=n}^{\infty}E_i\Big)\Big|\leqslant v\Big(\mu,\bigsqcup_{i=n}^{\infty}E_i\Big)\to 0.$$

при $n\to\infty$. Это значит

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n).\quad\blacktriangleright$$

Лемма 2.11. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой μ, значения которой либо комплексны, либо принадлежат расширенной области вещественных чисел. Для того чтобы подмножество E множества S было нуль-множеством относительно μ (в смысле определения 1.6), необходимо и достаточно, чтобы E являлось подмножеством некоторого множества $F \in \Sigma$ такого, что $v(\mu, F) = 0$. При $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$, очевидно, $v(\mu, F) = \mu(F) = 0$.*

◀ Если E — нуль-множество, то $v^*(\mu, E) = 0$ и существует множество E_n, содержащее E, для которого $v(\mu, E_n) < \frac{1}{n}$. Но тогда множество $F = \bigcap E_n \in \Sigma$, $E \subset F$ и $v(\mu, F) = 0$. ▶

Определение 2.13. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Тогда множество Z называется *μ-нулевым*, если существует такое $A \in \Sigma$, что $Z \subset A$ и $v(\mu, A) = 0$. При $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ имеем $v(\mu, A) = \mu(A) = 0$. В этом случае говорят, что Z является множеством *меры нуль*.

Определение 2.14. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой μ. Мера μ называется *полной*, если любое μ-нулевое множество принадлежит Σ, т. е. из $A \subset B \in \Sigma$, $v(\mu, B) = 0$ следует $A \in \Sigma$ (и, конечно, $v(\mu, A) = 0$). При этом пространство (S, Σ, μ) называется *полным*.

Следующая теорема о продолжении носит элементарный характер и не зависит от теорем подобного рода, приводимых в следующем параграфе. В ней устанавливается общий вид соотношения между мерами Бореля—Стилтьеса и мерами Лебега—Стилтьеса, которые будут определены ниже.

Теорема 2.4. *Пусть μ — счетно аддитивная функция множества, определенная на σ-алгебре Σ, векторная или со значениями из расширенной области вещественных чисел. Обозначим через Σ^* совокупность всех множеств вида $E \cup N$, где $E \in \Sigma$, а N является подмножеством такого множества $M \in \Sigma$, для которого $v(\mu, M) = 0$ (т. е. N — нулевое множество). Тогда Σ^* будет σ-алгеброй, причем, если область определения μ расширить до Σ^*, полагая*

$$\mu(E \cup N) = \mu(E),$$

то продолженная функция будет счетно аддитивна на Σ^*.

◀ Прежде всего мы покажем, что семейство Σ^* является σ-алгеброй. На протяжении этого доказательства через E с индексом или без него, будет обозначаться множество из Σ, а через M, с индексом или без него, будет обозначаться множество из Σ, для которого $v(\mu, M) = 0$, и через N, с индексом или без него, — подмножества M. Для того чтобы показать, что дополнение множества $E \cup N$ из Σ^* также принадлежит Σ^*, рассмотрим M, содержащее N, так что $(E \cup N)' = E'N' \supseteq E'M'$, $E'N' \setminus E'M' = E'(N' \setminus M') \subseteq M$. Таким образом, если

$$N_1 = E'N' \setminus E'M',$$

то

$$N_1' \subseteq M \quad \text{и} \quad (E \cup N') = (E'M') \cup N_1.$$

Следовательно, Σ^* содержит дополнение каждого из своих элементов. Пусть, далее,

$$(E_n \cup N_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma^* \quad \text{и} \quad N_n \subseteq M_n.$$

Тогда, так как

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup N_n) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M,$$

ясно, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup N_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cup N, \tag{2.1}$$

где

$$N = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup N_n)\right) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Таким образом, Σ^* является σ-алгеброй. Далее, пусть

$$E_1 \cup N_1 = E_2 \cup N_2 \text{ и } N_1 \subseteq M_1,\ N_2 \subseteq M_2;$$

положим $M = M_1 \cup M_2$, так что $E_1 \cup M = E_2 \cup M$ и, значит,

$$\mu(E_1) = \mu(E_1 \cup M) = \mu(E_2).$$

Отсюда следует, что μ однозначно определена на Σ^*, а из равенства (2.1) — что μ счетно аддитивна на Σ^*. Приведенная конструкция меры на Σ^* показывает, что эта мера полная. ▶

Определение 2.15. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Множество $E \in \Sigma$ называется *атомом* меры μ, если $\mu(E) \neq 0$ и если из $F \in \Sigma$, $F \subseteq E$, вытекает, что либо $\mu(F) = \mu(E)$, либо $\mu(F) = 0$.

Ясно, что если E_1 и E_2 — атомы, то либо $\mu(E_1E_2) = 0$, либо $\mu(E_1 \bigtriangleup E_2) = 0$. Пространство с конечной положительной мерой может иметь не более чем счетное множество несовпадающих атомов.

Лемма 2.12. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой. Для любого $\varepsilon > 0$ пространство S может быть представлено в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$ таких, что каждое E_i либо является атомом, либо имеет меру $\mu(E_i) \leqslant \varepsilon$.*

◀ Пусть ε — произвольное положительное число. Так как $\mu(S) < \infty$, то имеется самое большее конечное число несовпадающих атомов $\{E_1, \ldots, E_n\}$, мера которых превосходит ε. Тогда множество

$$A = S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

не содержит атомов, мера которых больше ε. Теперь мы покажем, что каждое измеримое подмножество B множества A содержит такое множество F, что $0 < \mu(F) \leqslant \varepsilon$. Допустим, что это не так, т. е. что некоторое множество B не содержит множества из Σ положительной меры, не превосходящей ε. Тогда множество B, так как оно не может быть атомом, содержит такое множество G_1 из Σ, что $0 < \mu(G_1) < \mu(B)$. Множество $B \setminus G_1$ тоже не содержит множества из Σ положительной меры, не превосходящей ε. Существует, следовательно, такое множество $G_2 \in \Sigma$, что $G_2 \subseteq B \setminus G_1$ и $0 < \mu(G_2) < \mu(B \setminus G_1)$. Продолжая это рассуждение по индукции, мы получим последовательность $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся множеств положительной меры.

Так как $\sum \mu(G_n) < \infty$, то для достаточно большого n необходимо будет $\mu(G_n) < \varepsilon$. Это противоречие доказывает существование такого множества $F \subseteq B$, что $0 < \mu(F) \leqslant \varepsilon$. Для каждого множества $E \in \Sigma$ обозначим $\beta(E) = \sup \mu(H)$, где H пробегает все измеримые подмножества из E, для которых $\mu(H) \leqslant \varepsilon$. Тогда, как показывает предшествующее рассуждение, $0 < \beta(G) \leqslant \varepsilon$ для каждого измеримого подмножества G множества A, для которого $\mu(G) > 0$. Определим по индукции такую последовательность $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся измеримых подмножеств множества A, что

$$\frac{1}{2}\beta\Big(A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i\Big) \leqslant \mu(F_{n+1}) \leqslant \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Положим

$$F_0 = A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

так что

$$\beta(F_0) \leqslant \beta\Big(A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i\Big) \leqslant 2\mu(F_{n+1}), \; n = 1, 2, \ldots$$

Однако $\sum \mu(F_n) \leqslant \mu(A) < \infty$ и, значит, $\mu(F_n) = 0$. Последнее неравенство показывает, что $\beta(F_0) = 0$. Следовательно, $\mu(F_0) = 0$. Возьмем теперь такое целое r, что $\sum\limits_{i=r+1}^{\infty} \mu(F_i) < \varepsilon$, и пусть

$$E_{p+1} = F_1, \dots, E_{p+r} = F_r \quad \text{и} \quad E_{p+r+1} = \Bigl(\bigsqcup_{i+r+1}^{\infty} F_i\Bigr) \sqcup F_0.$$

Тогда множества $E_1, \dots, E_n$, где $n = p + r + 1$, удовлетворяют требованиям леммы. ▶

Определение 2.16. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с неотрицательной мерой μ. Оно называется:

a) *дискретным*, если $S = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha \cup N$, где T_α $(\alpha \in \Lambda)$ — атомы, а $\mu(N) = 0$;

b) *неатомическим*, если мера μ не имеет атомов, т. е. для любого множества $E \in \Sigma$ такого, что $\mu(E) > 0$, существует такое множество A, что $0 < \mu(A) < \mu(E)$ и $A \subset E$;

c) *вероятностным*, если μ — вероятностная мера, т. е. $\mu(S) = 1$.

Примером дискретного пространства служит пространство $(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$, где $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$ и $\forall n \in \mathbb{N}\colon \mu(\{n\}) = 1$.

Если $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $\Sigma = 2^X$, $p_i \geqslant 0$, $i \geqslant 1$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ и $\mu(A) \doteqdot \sum\limits_{n\colon x_n\in A} p_n$, $A \in \Sigma$, то, очевидно, (X, Σ, μ) — вероятностное пространство.

Теорема 2.5 (Сакс). *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с мерой,* μ — *конечная положительная и неатомическая мера и* $M \in \Sigma$. *Тогда существует такая функция* $B\colon [0,1] \to \Sigma$, *что*

$$B(\alpha) \subset B(\beta), \text{ если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1, \; B(0) = \varnothing, \; B(1) = M \text{ и}$$
$$\mu\big(B(\alpha)\big) = \alpha\mu(M) \text{ для всех } \alpha \in [0,1].$$

◀ 1. Пусть $\mu(C_0) > 0$. Покажем сначала, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $D \subset C_0$, что $0 < \mu(D) \leqslant \varepsilon$. Это условие будет выполнимо, если существует такая последовательность $(D_j)_{j=1}^{\infty}$ в Σ, что $D_j \subset C_0$, $\mu(D_j) > 0$ и $\lim\limits_j \mu(D_j) = 0$. Действительно, так как μ — неатомическая мера, то существует такое множество $C_1 \subset C_0$, что $0 < \mu(C_1) < \mu(C_0)$. Продолжая рассуждение аналогичным образом, покажем, что существуют такие множества $C_2, C_3, \ldots$, что $C_{j+1} \subset C_j$ и $0 < \mu(C_{j+1}) < \mu(C_j)$. Очевидно, что

$$\big(C_j \setminus C_{j+1}\big) \cap \big(C_k \setminus C_{k+1}\big) = \varnothing \text{ при } k \neq j \text{ и}$$
$$\mu\Big(\bigsqcup_{j=0}^{\infty} \big(C_j \setminus C_{j+1}\big)\Big) \leqslant \mu(S) < \infty.$$

Следовательно,

$$D_j \doteqdot C_j \setminus C_{j+1} \subset C_0, \; \mu(D_j) > 0 \text{ и } \lim_j \mu(D_j) = 0.$$

2. Покажем далее, что если $\mu(C) > 0$ и $\varepsilon > 0$, то существует такое конечное разбиение $C_1, \ldots, C_k$ множества C, что $0 < \mu(C_j) \leqslant \varepsilon$. Для

любого $A \in \Sigma$ положим

$$\Sigma_A \doteqdot \{\, E \in \Sigma \,|\, E \subset A,\ \mu(E) \leqslant \varepsilon \,\}$$

и

$$s(A) \doteqdot \sup \mu\big(\Sigma_A\big).$$

По доказанному в пункте 1, имеем $s(A) > 0$. Значит, мы можем определить такое множество

$$C_1' \subset C, \quad \text{что} \quad s(C)/2 \leqslant \mu(C_1') \leqslant \varepsilon.$$

Выберем теперь последовательно для $j = 1, 2, \ldots$ подмножество C_{j+1}' из $C \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{j} C_i'$, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{1}{2}\, s\Big(C \setminus \bigsqcup_{i=1}^{j} C_i'\Big) \leqslant \mu(C_{i+1}') \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, множества $C_1', C_2', \ldots$ дизъюнктны и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j') \leqslant \mu(C) < \infty.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{j} \mu(C_j') = 0$, а поэтому

$$s\Big(C \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i'\Big) = 0.$$

Следовательно,

$$\mu\Big(C \setminus \bigsqcup_{j=1}^{\infty} C_j'\Big) = 0 \quad \text{и} \quad \mu(C) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j').$$

Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sum_{j=k}^{\infty} \mu(C_j') \leqslant \varepsilon,$$

и положим

$$C_j \doteqdot C_j' \ (j = 1, \ldots, k-1), \quad C_k \doteqdot C \setminus \bigsqcup_{j=1}^{k-1} C_j'.$$

3. Покажем теперь, что для любого множества $A \in \Sigma$ существует такое $A' \subset A$, что $\mu(A') = \frac{1}{2}\,\mu(A)$. Если $\mu(A) = 0$, то для $A' \doteqdot A$ получаем $\mu(A') = \frac{1}{2}\,\mu(A)$. Поэтому предположим, что $\mu(A) > 0$. По доказанному в пункте 2, если $\mu(C) > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, то мы можем определить такое разбиение $C_1^m, \ldots, C_{k(m)}^m$ множества C, что

$$\mu(C_j^m) \leqslant \frac{1}{m}.$$

Тогда множества

$$D^m(j, C) \doteqdot \bigsqcup_{i=1}^{j} C_i^m \subset C$$

принадлежат Σ и обладают таким свойством, что для любой точки $\theta \in [0, \mu(C)]$ существует такое $j(\theta) \in \{0, 1, \dots, k(m)\}$, что

$$\theta - \frac{1}{m} \leqslant \mu\big(D^m(j(\theta), C)\big) \leqslant \theta.$$

Поэтому мы можем определить такое $D_1 \subset A$, что

$$\frac{1}{2}\,\mu(A) - 1 < \mu(D_1) \leqslant \frac{1}{2}\,\mu(A),$$

и для $j = 1, 2, \dots$ определить такие $D_{j+1} \subset A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j} D_i$, что

$$\frac{1}{2}\,\mu(A) - \sum_{i=1}^{j} \mu(D_i) - \frac{1}{j} < \mu(D_{j+1}) \leqslant \frac{1}{2}\,\mu(A) - \sum_{i=1}^{j} \mu(D_i).$$

Отсюда следует, что

$$A' \doteqdot \bigcup_{j=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \mu(A') = \frac{1}{2}\,\mu(A).$$

4. Для завершения доказательства положим $B(0) = \varnothing$ и $B(1) = M$. По доказанному в пункте 3, существует такое $B(\frac{1}{2}) \subset M$, что

$$\mu\big(B(\tfrac{1}{2})\big) = \tfrac{1}{2}\,\mu(M).$$

Предположим теперь для доказательства по индукции, что $k \in \mathbb{N}$ и существует такое Σ-измеримое подмножество $B(j2^{-k})$ из M ($j = 0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1$), что

$$B(j2^{-k}) \subset B\big((j+1)2^{-k}\big) \quad \text{и} \quad \mu\big(B(j2^{-k})\big) = j2^{-k}\mu(M).$$

Из доказанного в пункте 3 следует тогда, что для каждого $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$ существует такое

$$B'_{k,j} \subset B\big((j+1)2^{-k}\big) \setminus B(j2^{-k}),$$

что

$$\mu(B'_{k,j}) = 2^{-k-1}\mu(M).$$

Положим

$$B\big((2l+1)2^{-k-1}\big) \doteqdot B(l2^{-k}) \cup B'_{k,l}.$$

Нетрудно видеть, что

$$B(l2^{-k-1}) \subset B\big((l+1)2^{-k-1}\big) \quad \text{и} \quad \mu\big(B(l2^{-k-1})\big) = l2^{-k-1}\mu(M).$$

для $l = 0, 1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1$.

Таким образом, мы определили $B(j2^{-k})$ ($j = 0, 1, \ldots, 2^k$) для $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для $0 < \alpha < 1$ мы можем построить такую возрастающую последовательность $\big(j_i 2^{-k_i}\big)_{i=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}$, что $\lim\limits_{i} j_i 2^{-k_i} = \alpha$. Положим

$$B(\alpha) \doteqdot B\big(j_1 2^{-k_1}\big) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \Big[B\big(j_{i+1}2^{-k_{i+1}}\big) \setminus B\big(j_i 2^{-k_i}\big)\Big].$$

Нетрудно проверить, что функция $B(\cdot)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. ►

Упражнения

Приводимые ниже упражнения необходимы для усвоения материала следующего параграфа. Сначала напомним, что если даны две функции множества φ и ψ, определенные соответственно на системах множеств $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{R}$ пространства X, то ψ называется *продолжением* φ или φ *сужением* ψ (обозначение: $\varphi = \psi|_{\mathfrak{S}}$), если

$$\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R} \text{ и } \forall A \in \mathfrak{S}\colon \psi(A) = \varphi(A).$$

1. Доказать, что каждая конечно аддитивная функция φ, заданная на полукольце множеств $\mathfrak{S}$, имеет единственное конечно аддитивное продолжение ψ на минимальное кольцо $\mathfrak{R} = \mathbf{r}(\mathfrak{S})$. При этом, если функция φ σ-аддитивна, а ее продолжение ψ ограничено сверху или снизу, то функция ψ также будет σ-аддитивной.

   Решение. Так как каждое множество $A \in \mathfrak{R}$ имеет вид $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} P_i$, где $P_i \in \mathfrak{S}$, то определим продолжение функции φ по формуле

$$\psi(A) \doteq \sum_{i=1}^{n} \varphi(P_i).$$

   Это определение не зависит от представления множества A в виде объединения. В самом деле, пусть

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{k} Q_j, \; Q_j \in \mathfrak{S}.$$

— другое представление для A и $C_{ij} = P_i \cap Q_j$. Тогда

$$P_i = \bigsqcup_{j=1}^{k} C_{ij}, \quad Q_j = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_{ij},$$

и мы получим равенство

$$\psi(A) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(P_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \varphi(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{k} \varphi(Q_j).$$

Конечная аддитивность функции ψ сразу вытекает из ее определения. Единственность такого продолжения в $\mathfrak{R}$ следует из условия аддитивности функции ψ на кольце $\mathfrak{R}$: если λ — аддитивное продолжение φ на $\mathbf{r}(\mathfrak{S})$, то

$$\forall A \in \mathbf{r}(\mathfrak{S}) \ (= \mathfrak{R}):$$

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i, \ C_i \in \mathbf{r}(\mathfrak{S}), \ \lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(C_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(C_i) = \psi(A).$$

Предположим теперь, что функция φ является σ-аддитивной, а ψ ограничена снизу. Пусть

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{где} \quad A, A_n \in \mathfrak{R}.$$

Если $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ и $A_n = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k_n} P_{jn}$, где $P_i, P_{jn} \in \mathfrak{S}$, то, полагая $P_{ijn} = P_i \cap P_{jn}$, в силу условия σ-аддитивности имеем

$$\varphi(P_i) = \sum_{n,j=1}^{\infty,k_n} \varphi(P_{ijn}) = \sum_{n,j=1}^{\infty,k_n}{}^{+} \varphi(P_{ijn}) + \sum_{n,j=1}^{\infty,k_n}{}^{-} \varphi(P_{ijn}),$$

где последние две суммы относятся соответственно к тем индексам, для которых $\varphi(P_{ijn}) \geqslant 0$ или $\varphi(P_{ijn}) < 0$. При этом сумма первого ряда может принимать бесконечное значение $+\infty$, а второй ряд по условию сходится абсолютно. Отсюда (так как абсолютно сходящиеся ряды могут суммироваться в любом порядке) получим равенство

$$\psi(A) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{n,j=1}^{\infty,k_n}{}^{+} \varphi(P_{ijn}) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{n,j=1}^{\infty,k_n}{}^{-} \varphi(P_{ijn}) =$$

$$= \sum_{n,j=1}^{\infty,k_n}{}^{+} \varphi(P_{jn}) + \sum_{n,j=1}^{\infty,k_n}{}^{-} \varphi(P_{jn}) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(A_n).$$

Таким образом, функция ψ является σ-аддитивной. ►

2. Пусть $\varphi\colon \mathfrak{S} \to [0,+\infty]$ — σ-аддитивна, а $\mathfrak{S}$ — полукольцо (полуалгебра). Доказать, что φ единственным образом продолжается до σ-аддитивной неотрицательной ф. м. ψ, заданной на $\mathfrak{R} = \mathbf{r}(\mathfrak{S})$ (минимальной алгебре), при этом продолжение ψ конечно (σ-конечно), если φ конечна (σ-конечна).

3. Пусть H — полукольцо всех прямоугольников Π в $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) (см. упражнение 4 к § 1 главы I) и $\mathfrak{E}$ — совокупность всех элементарных

множеств, т. е. $\mathfrak{C} = \mathbf{r}(H)$, где $\mathbf{r}(H)$ — минимальное кольцо, порожденное полукольцом H (см. теорему 2.1). Положим

$$\forall A \in \mathfrak{C}\colon\ \mu(A) \doteqdot \sum_{m=1}^{M} \mu(\Pi_m),$$

если $A = \bigsqcup_{m=1}^{M} \Pi_m$, $\big(\Pi_m\big)_{m=1}^{M} \subset H$, а $\mu(\Pi) \doteqdot \prod\limits_{k=1}^{M}(b_k - a_k)$, если Π определяется числами $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$, $a_k \leqslant b_k$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\mu\colon \mathfrak{C} \to \mathbb{R}_+$ регулярна на $\mathfrak{C}$.

Решение. Функция μ аддитивна на H и $\mathfrak{C}$ (см. упражнение 7 и теорему 2.1). Докажем сначала регулярность μ для произвольного прямоугольника Π, отвечающего числам $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$, где $a_k \leqslant b_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Для произвольного числа $\delta > 0$ определим открытый прямоугольник

$$G(\delta) = \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \,|\, a_k - \delta < x_k < b_k + \delta \quad \forall\, k \in \overline{1,n} \,\right\}.$$

Тогда справедливо включение $\Pi \subset G(\delta)$ и соотношение

$$\mu\big(G(\delta)\big) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k + 2\delta) = \mu(\Pi) + O(\delta) < \mu(\Pi) + \varepsilon$$

при достаточно малом $\delta = \delta(\varepsilon)$. Если $\mu(\Pi) = 0$, то для замкнутого множества $F = \varnothing$ получаем включение $F \subset \Pi$ и неравенство $\mu(\Pi) < \mu(Pi) + \varepsilon = \varepsilon$. Если же $\mu(Pi) > 0$, то $a_k < b_k$ для всех $k \in \overline{1,n}$.

Для произвольного положительного числа

$$\delta < \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{b_k - a_k}{2}$$

определим замкнутый прямоугольник

$$F(\delta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, a_k + \delta < x_k < b_k - \delta \quad \forall\, k \in \overline{1, n} \right\}.$$

Тогда справедливо включение $\Pi \supset F(\delta)$ и соотношение

$$\mu\bigl(F(\delta)\bigr) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k - 2\delta) = \mu(\Pi) + O(\delta) > \mu(\Pi) - \varepsilon$$

при достаточно малом $\delta = \delta(\varepsilon)$. Таким образом, доказана регулярность ф. м. μ для произвольного прямоугольника Π.

Теперь рассмотрим произвольное множество $A \in \mathfrak{E}$. Пусть конечная совокупность прямоугольников $\bigl(\Pi_m\bigr)_{m=1}^{M}$ образует разбиение множества A, т. е. $A = \bigsqcup\limits_{m=1}^{M} \Pi_m$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Как показано выше, для каждого прямоугольника Π_m существует замкнутый прямоугольник F_m и открытый прямоугольник G_m, такие, что справедливы включения $F_m \subset \Pi_m \subset G_m$ и неравенства

$$\mu(\Pi_m) < \mu(F_m) + \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{и} \quad \mu(G_m) < \mu(\Pi_m) + \frac{\varepsilon}{M}.$$

Определим множества

$$F = \bigcup_{m=1}^{M} F_m \quad \text{и} \quad G = \bigcup_{m=1}^{M} G_m.$$

Множество F является замкнутым как конечное объединение замкнутых множеств, а множество G является открытым как объединение открытых множеств. Так как при $m \neq k$ выполнено $\Pi_m \cap \Pi_k = \varnothing$, то $F_m \cap F_k = \varnothing$. Следовательно,

$$\mu(F) = \sum_{m=1}^{M} \mu(F_m).$$

По построению справедливы включения $F \subset A \subset G$. Наконец,

$$\mu(G) \leqslant \sum_{m=1}^{M} \mu(G_m) < \sum_{m=1}^{M} \mu(\Pi_m) + \varepsilon = \mu(A) + \varepsilon,$$

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{M} \mu(\Pi_m) < \sum_{m=1}^{M} \mu(F_m) + \varepsilon = \mu(F) + \varepsilon.$$

Отсюда получается требуемый результат. ▶

4. Пусть H — полукольцо всех прямоугольников Π в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $\mathfrak{E}$ — совокупность всех элементарных множеств, т. е. $\mathfrak{E} \doteqdot \mathbf{r}(H)$, где $\mathbf{r}(H)$ — минимальное кольцо, порожденное полукольцом H. Положим

$$\forall A \in \mathfrak{E}\colon \mu(A) \doteqdot \sum_{m=1}^{M} \mu(\Pi_m),$$

Если $A = \bigsqcup_{m=1}^{M} \Pi_m$, $\{\Pi_1, \ldots, \Pi_M\} \subset H$, а $\mu(\Pi) \doteqdot \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$, если Π определяется числами $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$, $a_k \leqslant b_k$, $k \in \overline{1, n}$. Тогда $\mu\colon \mathfrak{E} \to \mathbb{R}_+$ σ-аддитивна на $\mathfrak{E}$.

Решение. Пусть $(A_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{E}$ и $A = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathfrak{E}$.

1. Поскольку $\forall N \geqslant 1$: $\bigsqcup_{m=1}^{N} A_m \subset A$, то, в силу монотонности μ на $\mathfrak{E}$, имеем

$$\mu\Big(\bigsqcup_{m=1}^{N} A_m\Big) \leqslant \mu(A).$$

Отсюда

$$\sum_{m=1}^{N} \mu(A_m) \leqslant \mu(A). \tag{2.2}$$

Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ фиксировано. (Напомним, что $\mathbb{R}^n$ рассматривается как метрическое пространство с евклидовой метрикой). Для множества $A \in \mathfrak{E}$ существуют замкнутое множество $F \in \mathfrak{E}$ и открытое множество $G \in \mathfrak{E}$ такие, что

$$F \subset A \subset G, \quad \mu(G) - \mu(F) > \varepsilon$$

(см. упражнение 3). При этом

$$\mu(A) < \mu(F) + \varepsilon. \tag{2.3}$$

Аналогично для каждого $m \geqslant 1$ для множества $A_m \in \mathfrak{E}$ существует открытое множество $G_m \in \mathfrak{E}$ такое, что

$$A_m \subset G_m, \quad \mu(G_m) - \mu(A_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}. \tag{2.4}$$

Имеем

$$F \subset A = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} A_m \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m.$$

Таким образом, для замкнутого и ограниченного (т. е. компактного) множества $F \subset A$ справедливо включение $F \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m$. Поэтому существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$F \subset \bigcup_{m=1}^{N} G_m$$

Из этого включения, монотонности и полуаддитивности μ на $\mathfrak{C}$ сначала получим

$$\mu(F) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{m=1}^{N} G_m\Big) \leqslant \sum_{m=1}^{N} \mu(G_m),$$

затем с учетом (2.4)

$$\mu(F) \leqslant \sum_{m=1}^{N} \Big(\mu(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}\Big) < \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) + \varepsilon.$$

Из этого неравенства и неравенства (2.3) следует, что

$$\mu(A) < \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) + 2\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то, устремляя $\varepsilon \to 0$, приходим к неравенству

$$\mu(A) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m). \tag{2.5}$$

Из (2.2) и (2.5) получим

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

Счетная аддитивность μ доказана. ▶

5. Пусть $\Sigma \subset 2^X$ — монотонная алгебра подмножеств пространства X, а $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ — а. ф. м. Докажите, что μ — σ-а. ф. м. на Σ, если X — хаусдорфово компактное пространство.

   Указание. Использовать теорему 2.3 А. Д. Александрова. ▶

6. Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо всех измеримых по Жордану подмножеств $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$ и μ — мера Жордана на $\mathfrak{R}$ ([1]). Доказать, что μ является σ-аддитивной на $\mathfrak{R}$.

   Указание. Для любых $\varepsilon > 0$ и $A \in \mathfrak{R}$ существуют замкнутое множество $F \in \mathfrak{R}$ и открытое множество $G \in \mathfrak{R}$ такие, что $F \subset A \subset G$ и $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$. ▶

7. Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо, состоящее из всех полуинтервалов вида

$[\,a, b)$ на вещественной прямой и $\varphi\colon \mathfrak{S} \to [\,0, \infty)$ — а. ф. м. Положим

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\colon \quad g(t) \doteqdot \begin{cases} \varphi\bigl([\,0, t)\bigr) & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t = 0; \\ -\varphi\bigl([\,0, t)\bigr) & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Доказать, что φ на $\mathfrak{S}$ счетно аддитивна тогда и только тогда, когда $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая непрерывная слева функция, т. е. $\forall\, t \in \mathbb{R}\colon g(t) = g(t-0)$.

Решение. Необходимость. Легко проверить, что g — неубывающая функция на $\mathbb{R}$ и $\forall [\,a, b) \in \mathfrak{S}\colon \varphi\bigl([\,a, b)\bigr) = g(b) - g(a)$. Учитывая σ-аддитивность φ на $\mathfrak{S}$, получаем

$$g(t) - g(t-0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \bigl[g(t) - g(t-\varepsilon)\bigr] = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi\bigl([\,t-\varepsilon, t)\bigr) = 0.$$

Достаточность. Положим

$$[\,a, b) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} [\,a_i, b_i).$$

Тогда

$$\forall N \in \mathbb{N}\colon \ [\,a, b) \supset \bigsqcup_{i=1}^{N} [\,a_i, b_i)$$

и, следовательно,

$$\forall N \in \mathbb{N}\colon \ \varphi\bigl([\,a, b)\bigr) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \varphi\bigl([\,a_i, b_i)\bigr)$$

в силу аддитивности и монотонности φ. Отсюда получим

$$\varphi([a,b)) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \varphi([a_i,b_i)).$$

Докажем обратное неравенство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем положительные числа $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ так, чтобы

$$|g(b) - g(b-\delta)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |g(a_i) - g(a_i - \delta_i)| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Это можно сделать, так как g непрерывна слева на $\mathbb{R}$. Так как

$$[a, b-\delta) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (a_i - \delta_i, b_i),$$

то по лемме Гейне— Бореля можно найти конечное число $N \in \mathbb{N}$ таких интервалов $(a_i - \delta_i, b_i)$, что

$$[a, b-\delta) \subset [a, b-\delta] \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (a_i - \delta_i, b_i) \subset \bigcup_{i=1}^{N} [a_i - \delta_i, b_i).$$

Тогда будем иметь

$$\varphi([a,b)) = g(b) - g(a) < g(b-\delta) - g(a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi([a,b-\delta)) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{N} \varphi([a_i - \delta_i, b_i)) = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{N} [g(b_i) - g(a_i - \delta_i)] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{N} \left[\varphi([a_i,b_i)) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right] \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi([a_i,b_i))$$

и, так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\varphi([a,b)) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi([a_i,b_i))$. ►

8. Рассмотрим полукольцо

$$\mathfrak{S} \doteqdot \{\, (a,b] \mid -\infty < a < b < +\infty \,\} \cup \{\varnothing\}.$$

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая и непрерывная справа на $\mathbb{R}$ функция, а

$$\mu_f(\varnothing) \doteqdot 0, \ \ \mu_f\big((a,b]\big) \doteqdot f(b) - f(a) \quad \forall (a,b] \in \mathfrak{S}.$$

Тогда μ_f — σ-а. ф. м. на $\mathfrak{S}$.

Решение. Функция μ_f неотрицательна и аддитивна на $\mathfrak{S}$. Докажем, что μ_f — σ-аддитивна на $\mathfrak{S}$. Пусть

$$\{\, (a_n,b_n] \mid n \geqslant 1 \,\} \subset \mathfrak{S}, \ \ (a_m,b_m] \cap (a_n,b_n] = \varnothing \ \text{ при } \ m \neq n \ \text{ и}$$

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n,b_n] = (a,b] \in \mathfrak{S}.$$

Сайт ДГУ
Тиульный лист
Оглавление
страница 121 из 268
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

1. С учетом определения полукольца имеем

$$\forall N \geqslant 1\colon (a,b] \setminus \bigsqcup_{n=1}^{N} (a_n, b_n] = \bigsqcup_{k=1}^{m} C_k, \quad \{C_1, \ldots, C_m\} \subset \mathfrak{S}.$$

Следовательно,

$$(a,b] = \bigsqcup_{n=1}^{N} (a_n, b_n] \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{m} C_k,$$

откуда с учетом аддитивности μ_f на $\mathfrak{S}$ получим равенство

$$\mu_f\big((a,b]\big) = \sum_{n=1}^{N} \mu_f\big((a_n, b_n]\big) + \sum_{k=1}^{m} \mu_f(C_k).$$

Поэтому

$$\forall N \geqslant 1\colon \mu_f\big((a,b]\big) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \mu_f\big((a_n, b_n]\big);$$

откуда

$$\mu_f\big((a,b]\big) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f\big((a_n, b_n]\big). \tag{2.6}$$

2. Поскольку f — непрерывна справа, то

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0\, \exists\, a' \in (a,b)\colon f(a') - f(a) < \varepsilon \implies \\ \implies \mu_f\big((a,b]\big) - \mu_f\big((a',b]\big) = f(b) - f(a) - \big(f(b) - f(a')\big) = \\ = f(a') - f(a) < \varepsilon; \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\forall\, n \geqslant 1\, \exists\, b'_n > b_n\colon f(b'_n) - f(b_n) < \frac{\varepsilon}{2_n} \implies$$

$$\implies \mu_f\big((a_n, b'_n]\big) - \mu_f\big((a_n, b_n]\big) = f(b'_n) - f(a_n) - \big(f(b_n) - f(a_n)\big) = \\ = f(b'_n) - f(b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{2.8}$$

Заметим теперь, что

$$[a', b] \subset (a, b] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b'_n),$$

откуда, поскольку $[a', b]$ — компакт на прямой $\mathbb{R}$, то

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon [a', b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b'_n),$$

Теперь из полуаддитивности μ_f имеем

$$\mu_f\big((a', b]\big) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu_f\big((a_n, b'_n]\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f\big((a_n, b'_n]\big),$$

откуда с учетом неравенств (2.7) и (2.8) получаем

$$\mu_f\big((a, b]\big) < \mu_f\big((a', b]\big) + \varepsilon \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_f\big((a_n, b_n]\big) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) + \varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f\big((a_n, b_n]\big) + 2\varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, приходим к неравенству

$$\mu_f\big((a,b]\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f\big((a_n,b_n]\big),$$

которое возможно вместе с неравенством (2.6), если

$$\mu_f\big((a,b]\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f\big((a_n,b_n]\big). \quad \blacktriangleright$$

9. Пусть H — полукольцо всех ограниченных промежутков $I \subset \mathbb{R}$ вида $[a,b]\,, [a,b)\,, (a,b]\,, (a,b)$ и $\varnothing$, а $\mathfrak{E} \doteqdot \mathbf{r}(H)$ (т. е. $\mathfrak{E}$ — минимальное кольцо, порожденное полукольцом H), а $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция. Определим ф. м. $\mu_g\colon \mathfrak{E} \to [0,+\infty)$, полагая

$$\forall \Big(A \in \mathfrak{E},\ A = \bigsqcup_{m=1}^{N} I_m,\ \{I_m\}_{m=1}^{N} \subset H\Big):$$

$$\mu_g(A) \doteqdot \sum_{m=1}^{N} \mu_g(I_m),$$

где для произвольного I из H полагаем:

$$\mu_g(I) \doteqdot \begin{cases} g(b+0)-g(a-0), & \text{если } I=[a,b]; \\ g(b-0)-g(a-0), & \text{если } I=[a,b); \\ g(b+0)-g(a+0), & \text{если } I=(a,b]; \\ g(b-0)-g(a+0), & \text{если } a<b \text{ и } I=(a,b). \end{cases}$$

В конструкции μ_g участвуют только пределы справа и слева функции g. По этой причине часто удобно считать g неубывающей и непрерывной слева (или справа) функцией на $\mathbb{R}$ (ср. с упражнениями 7, 8).

Функция $\mu_g\colon \mathfrak{E} \to [0, +\infty)$ называется *мерой Стилтьеса* на $\mathfrak{E}$, соответствующей функции g. Если $g(t) = t$ на $\mathbb{R}$, то μ_g называется *линейной мерой Лебега* на $\mathfrak{E}$ и принято ее обозначать через m: $m \doteqdot \mu_t$.

Доказать справедливость следующих предложений.

1) Мера Стилтьеса множества $A \in \mathfrak{E}$ не зависит от выбора его разбиения попарно непересекающимися промежутками из H, т. е. μ_g определена корректно на $\mathfrak{E}$.

2) Мера Стилтьеса μ_g конечна аддитивна и регулярна на $\mathfrak{E}$.

Решение. 1) Для $A \in \mathfrak{E}$ рассмотрим два его разбиения $\{I_m\}_{m=1}^M$ и $\{\tilde{I}_k\}_{k=1}^N$ из H. Для любых $m \in \overline{1, M}$ и $k \in \overline{1, N}$ определим

$$\hat{I}_{m,k} = I_m \cap \tilde{I}_k \in H.$$

Ясно, что совокупность $\left\{ \hat{I}_{m,k} \,|\, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, N} \right\}$ образует разбиение A. Для любого $m \in \overline{1, M}$ имеем

$$I_m = \bigsqcup_{k=1}^{N} \hat{I}_{m,k} \quad \text{и} \quad \mu_g(I_m) = \sum_{k=1}^{N} \mu_g(\hat{I}_{m,k}),$$

для любого $k \in \overline{1,N}$ имеем

$$\tilde{I}_k = \bigsqcup_{m=1}^{M} \hat{I}_{m,k} \quad \text{и} \quad \mu_g(\tilde{I}_k) = \sum_{m=1}^{M} \mu_g(\hat{I}_{m,k}).$$

Следовательно, получаем

$$\mu_g(A) = \sum_{m=1}^{M} \mu_g(I_m) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \mu_g(\hat{I}_{m,k}) = \sum_{k=1}^{N} \mu_g(\tilde{I}_k).$$

2) Покажем, что μ_g конечно аддитивна на $\mathfrak{E}$. Пусть $A, B \in \mathfrak{E}$ и $A \cap B = \varnothing$. Пусть $P_A = \{Im\}_{m=1}^{N}$ — разбиение множества A и $P_B = \{J_k\}_{k=1}^{M}$ — разбиение множества B. Так как $A \cap B = \varnothing$, то получаем $I_m \cap J_k = \varnothing$ при всех $m \in \overline{1,N}$ и $k \in \overline{1,M}$. Следовательно, $P_A \sqcup P_B$ является разбиением множества $A \sqcup B$, поэтому справедливо равенство

$$\mu_g(A \sqcup B) = \sum_{m=1}^{N} \mu_g(I_m) + \sum_{k=1}^{M} \mu_g(J_k) = \mu_g(A) + \mu_g(B).$$

Таким образом, конечная аддитивность μ_g доказана.

Покажем регулярность μ_g для любого промежутка из H. Пусть числа $a \leqslant b$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое. что при всех $t \in (b, b+\delta)$ выполнено неравенство

$$g(t) - g(b+0) \leqslant \varepsilon,$$

а при всех $t \in (a-\delta, a)$ выполнено неравенство

$$g(a-0) - g(t) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, открытый промежуток $G = (a-\delta, b+\delta)$ содержит промежуток $[\,a, b]$ и справедливо неравенство

$$\mu_g(G) - \mu_g\big([\,a, b]\big) = g(b+\delta-0) - g(b+0) + g(a-0) - g(a-+0) \leqslant 2\varepsilon.$$

Так как промежуток $[\,a, b]$ замкнут, то полагаем $F = [\,a, b]$. Следовательно, регулярность μ_g для $[\,a, b]$ доказана.

Если $a = b$, то $(a, b) = [\,a, b) = (a, b] = \varnothing$. Поэтому для проверки регулярности μ_g в этом случае полагаем $F = G = \varnothing$ — одновременно замкнутый и открытый промежуток.

Далее считаем, что $a < b$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma = \gamma(\varepsilon) \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$, такое, что при всех $t \in (b-\gamma, b)$ выполнено неравенство $g(b-0) - g(t) \leqslant \varepsilon$, а при всех $t \in (a, a+\gamma)$ выполнено неравенство $g(t) - g(t+0)\varepsilon$.

Рассмотрим промежуток $(a, b]$. Определим замкнутый промежуток $F = [\,a+\gamma, b] \subset (a, b]$ и открытый промежуток $G = (a, b+\delta) \supset (a, b]$. Тогда справедливы неравенства

$$\mu_g(G) - \mu_g\big((a, b]\big) = g(b+\delta-0) - g(b+0) \leqslant \varepsilon,$$
$$\mu_g\big((a, b]\big) - \mu_g(F) = g(a+\gamma-0) - g(a+0) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, регулярность меры μ_g для промежутка $(a, b]$ доказана.

Рассмотрим промежуток (a, b). Определим замкнутый промежуток $F = [\,a+\gamma, b-\gamma \subset (a, b)$ и открытый промежуток $G = (a, b)$. Тогда справедливо неравенство

$$\mu_g\big((a, b)\big) - \mu_g(F) = g(b-0) - g(b-\gamma+0) + g(a+\gamma-0) - g(a+0) \leqslant 2\varepsilon.$$

Следовательно, регулярность меры μ_g для промежутка (a, b) доказана.

Таким образом, доказана регулярность μ_g для любого промежутка I, т. е. доказана регулярность μ_g на H.

Доказательство регулярности μ_g для любого элемента $A \in \mathfrak{E}$ проводится совершенно аналогично соответствующему доказательству из упражнения 3. ▶

10. Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}\,(a < b)$ — произвольно фиксированный отрезок, $\mathfrak{E}$ — минимальная алгебра, порожденная полуалгеброй всех открытых полуоткрытых и замкнутых промежутков, содержащихся в $[a, b]$.

    Пусть, далее, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция. Доказать, что мера Стилтьеса μ_g (определение μ_g см в упражнении 9) σ-аддитивна на $\mathfrak{E}$. Указание. Использовать упражнение 9 и теорему 2.3 А. Д. Александрова. ▶

11. Пусть X — множество всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, а система множеств H состоит из пересечений X с произвольными интервалами (a, b), отрезками $[a, b]$ или полуинтервалами $[a, b)$, $(a, b]$ сегмента $[0, 1]$, где $a \leqslant b$. Если множество $A_{a,b} \in H$ совпадает с одним из множеств $(a, b) \cap X, [a, b) \cap X, (a, b] \cap X$ и $[a, b] \cap X$, то положим
$$\mu(A_{a,b}) \doteqdot b - a.$$
    Доказать, что H — полукольцо, $\mu\colon H \to \mathbb{R}_+$ — а. ф. м. и μ не является σ-а. ф. м. на H.

12. Пусть $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $\mathfrak{R}$ — кольцо всех конечных подмножеств множества X и функция $f\colon \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_+$. Положим
$$\forall A \in H\colon\ \mu(A) \doteqdot \sum_{x \in A} f(x).$$

Доказать, что $\mu\colon \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_+$ — счетно аддитивная функция, которая не является σ-конечной на $\mathfrak{R}$.

13. Пусть S_1 — полукольцо всех полуинтервалов вида $[\alpha, \beta)$, принадлежащих отрезку $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая непрерывная слева функция и

$$\forall [\alpha, \beta) \in S_1\colon\ \mu_f\big([\alpha, \beta)\big) \doteqdot f(\beta) - f(\alpha).$$

Доказать, что μ_f — σ-а. ф. м. на S_1.

14. Пусть S_2 — полукольцо всех полуинтервалов вида $(\alpha, \beta]$ отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$, а $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ монотонно неубывающая непрерывная справа функция на $[a, b]$ и

$$\forall [\alpha, \beta) \in S_2\colon\ \mu_f\big((\alpha, \beta]\big) \doteqdot f(\beta) - f(\alpha).$$

Доказать, что μ_f — σ-а. ф. м. на S_2.

§ 3. Продолжения функции множества

В предыдущих параграфах настоящей главы мы рассмотрели некоторые свойства конечно аддитивных и счетно аддитивных функций множества, определенных на конкретных классах множеств основного множества (= пространства) S. Во многих случаях возникает задача продолжения ф. м. с заданной области определения на более широкую область определения с сохранением ее свойств. Такова, например, задача определения σ-а.ф. м. на всех борелевских множествах числовой прямой (или конечномерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$), заданной первоначально только на полуалгебре интервалов (соответственно прямоугольных множеств — прямоугольников). И, вообще, любая числовая мера обычно первоначально определяется на некоторой полуалгебре множеств, и возникает задача продолжения ее на более широкий класс множеств.

В решении задачи продолжения ф. м. в абстрактной форме велика заслуга Каратеодори ([11]), который нашел метод продолжения, отличающийся как изяществом, так и общностью. В настоящем параграфе показано, что заданную счетно аддитивную ф. м., определенную на некоторой алгебре, можно продолжить до меры, т. е. до счетно аддитивной ф. м., определенной на некоторой σ-алгебре, содержащей данную алгебру, — это теорема Хана о продолжении и аналогичные ей другие теоремы; они используются для построения классических мер Бореля, Лебега и Лебега—Стилтьеса.

Определение 3.1. Пусть λ — ф. м., векторная или принимающая значения из $\overline{\mathbb{R}}$, определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств множества S и такая, что $\lambda(\varnothing) = 0$. Множество E называется λ-*множеством*,

если
$$E \in \Sigma \quad \text{и если} \quad \lambda(M) = \lambda(ME) + \lambda(ME'),\ M \in \Sigma.$$
(Здесь $ME \doteqdot M \cap E$ и $E' \doteqdot S \setminus E$ — дополнение E до S).

Лемма 3.1. *Пусть λ — произвольная ф. м., векторная или со значениями из $\overline{\mathbb{R}}$, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S (т. е. $\Sigma = 2^S$) и такая, что $\lambda(\varnothing) = 0$. Тогда семейство*
$$\Sigma_0 \doteqdot \{\, A \in \Sigma \,|\, A \text{ — } \lambda\text{-}\textit{множество}\,\}$$
является алгеброй (= подалгеброй) в Σ, причем на Σ_0 ф. м. λ аддитивна. Если, кроме того, E есть объединение конечного числа непересекающихся λ-множеств $\{E_n\}$, то для всех $M \in \Sigma$
$$\lambda(ME) = \sum_n \lambda(ME_n).$$

◀ $\Sigma_0 \neq \varnothing$, так как $\varnothing$ и S являются λ-множествами; ясно также, что дополнение любого λ-множества является λ-множеством. Покажем теперь, что пересечение двух λ-множеств A и B также будет λ-множеством. Пусть $M \in \Sigma$. Так как A является λ-множеством, то

(I) $\lambda(MB) = \lambda(MBA) + \lambda(MBA')$, а так как B тоже есть λ-множество, то

(II) $\lambda(M) = \lambda(MB) + \lambda(MB')$,
$$\lambda\big(M(AB)'\big) = \lambda\big(M(AB)'B\big) + \lambda\big(M(AB)'B'\big),$$

(III) $\lambda\big(M(AB)'\big) = \lambda(MBA')) + \lambda(MB')$.

Из (I) и (II) вытекает, что

$$\lambda(M) = \lambda(MBA) + \lambda(MBA') + \lambda(MB'),$$

а из (III) — что

$$\lambda(M) = \lambda(MBA) + \lambda\big(M(AB)'\big).$$

Следовательно, и AB является λ-множеством. Поскольку

$$\bigcup A_n = \Big(\bigcap A_n'\Big)',$$

мы доказали, что λ-множества образует алгебру. Пусть теперь E_1 и E_2 — непересекающиеся λ-множества. Заменяя в определении 3.1 M на $M(E_1 \sqcup E_2)$, находим, что

$$\lambda\big(M(E_1 \sqcup E_2)\big) = \lambda(ME_1) + \lambda(ME_2).$$

Последнее утверждение леммы следует отсюда по индукции. ▶

Определение 3.2. *Внешней мерой* на множестве S называется ф. м. $\lambda\colon \Sigma \left(\doteqdot 2^S \right) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:

(I) $\lambda(\varnothing) = 0$;

(II) $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$, если $A \subseteq B$, $A, B \in \Sigma$;

$$\text{(III)}\quad \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n), \quad (E_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma.$$

Внешняя мера $\lambda\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ называется *конечной* внешней мерой.

Теорема 3.1 (К. Каратеодори). *Если λ внешняя мера, то семейство λ-множеств является σ-алгеброй, на которой λ счетно аддитивна.*

◀ По лемме 3.1 λ-множества образуют алгебру. Она будет σ-алгеброй, если показать, что объединение E каждой последовательности $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся λ-множеств само является λ-множеством. Из леммы 3.1 вытекает, что если $M \in \Sigma$, то

$$\lambda(M) = \lambda\Big(M \bigsqcup_{n=1}^{k} E_n\Big) + \lambda\Big(M\Big(\bigsqcup_{n=1}^{k} E_n\Big)'\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \lambda(ME_n) + \lambda\Big(M\Big(\bigsqcup_{n=1}^{k} E_n\Big)'\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{k} \lambda(ME_n) + \lambda(ME').$$

Следовательно,

$$\lambda(ME) + \lambda(ME') \geqslant \lambda(M) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(ME_n) + \lambda(ME') \geqslant$$
$$\geqslant \lambda(ME) + \lambda(ME'),$$

откуда вытекает, что E является λ-множеством; заменяя M на ME, получаем равенство

$$\lambda(ME) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(ME_n). \quad \blacktriangleright$$

Следствие 3.1. *В условиях теоремы 3.1 мера $\lambda/_{\Sigma_\lambda}$, где Σ_λ — σ-алгебра всех λ-множеств, является полной.*

◀ Пусть $A \in \Sigma_\lambda$ и $\lambda(A) = 0$ и $C \subset A$. Тогда для любого $B \subset S$ с учетом монотонности внешней меры λ имеем

$$\lambda(B) \geqslant \lambda(BC') \geqslant \lambda(BA') = \lambda(BA) + \lambda(BA') = \lambda(B),$$

поскольку $0 \leqslant \lambda(BA) \leqslant \lambda(A) = 0$. Итак,

$$\lambda(B) = \lambda(BC') \text{ для любого } B \subset S.$$

Далее,

$$\lambda(BC) \leqslant \lambda(BA) \leqslant \lambda(A) = 0,$$

т. е.

$$\lambda(BC) = 0 \text{ для любого } B \subset S.$$

Следовательно, для любого $B \subset S$ получим $\lambda(B) = \lambda(BC) + \lambda(BC')$. Это означает $C \in \Sigma_\lambda$. ▶

Естественной областью определения меры является σ-кольцо или σ-алгебра. С другой стороны, мы знаем (см. § 2), что а. ф. м. и σ-а. ф. м., заданные на полукольце (или полуалгебре) H единственным образом продолжается на $\mathbf{r}(H)$ (или $\sum(H)$). Поэтому при исследовании задачи о продолжении а. ф. м. или σ-а. ф. м. достаточно и будем считать, что она первоначально задана на кольце (или алгебре).

Лемма 3.2. *Пусть μ — неотрицательная счетно аддитивная функция множества, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S и принимающая значения из расширенной области вещественных чисел. Для каждого $A \subseteq S$ положим*

$$\hat{\mu}(A) \doteqdot \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n), \tag{3.1}$$

где нижняя грань берется по всем таким последовательностям $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ множеств из Σ, обединение которых содержит A. Тогда $\hat{\mu}$ будет внешней мерой, а каждое множество из Σ — $\hat{\mu}$-множеством. Кроме того, если $E \in \Sigma$, то $\hat{\mu}(E) = \mu(E)$.

◀ Выполнение свойства (I) из определения 3.2 для $\hat{\mu}$ очевидно, а свойство (II) для $\hat{\mu}$ следует из того, что всякое покрытие множества $B \subset S$ является и покрытием множества A, но не наоборот (т. е. класс покрытий множества B является частью класса покрытий множества A). Пусть E является объединением произвольной последовательности $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ множеств из S. Возьмем ε и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ выберем последовательность $(E_{m,n})_{m=1}^{\infty} \subset \Sigma$, обладающую следующими свойствами:

$$E_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{m,n}, \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_{m,n}) \leqslant \hat{\mu}(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Тогда

$$\bigcup_{m,n=1}^{\infty} E_{m,n} \supset E$$

и, следовательно,

$$\hat{\mu}(E) \leqslant \sum_{m,n=1}^{\infty} \mu(E_{m,n}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(E_n) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольного $\varepsilon > 0$ этим доказано, что $\hat{\mu}$ обладает и свойством (III) из определения 3.2. Таким образом, $\hat{\mu}$ является внешней мерой, определенной на σ-алгебре всех подмножеств множества S.

Пусть теперь $E \in \Sigma$. Так как $E \subseteq E$, то $\mu(E) \geqslant \hat{\mu}(E)$. Если

$$E_n \in \Sigma,\ n = 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

то множества

$$A_1 \doteqdot E_1, \quad A_n \doteqdot E_n \Big(\bigcup_{j<n} E_j\Big)',\ n > 1,$$

являются попарно непересекающимися множествами, принадлежащими Σ, причем

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Таким образом,

$$\mu(E) = \mu\Big(E\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big) = \mu\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}EA_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(EA_n) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n),$$

откуда вытекает, что $\mu(E) \leqslant \hat{\mu}(E)$. Мы получаем, что если $E \in \Sigma$, то $\mu(E) = \hat{\mu}(E)$.

Наконец, чтобы показать, что каждое множество E из Σ является $\hat{\mu}$-множеством, рассмотрим произвольное подмножество M из S. Так как $\hat{\mu}$ — внешняя мера, то

$$\hat{\mu}(ME) + \hat{\mu}(ME') \geqslant \hat{\mu}(M).$$

Для того чтобы доказать, что E есть $\hat{\mu}$-множество, достаточно убедиться в том, что

$$\hat{\mu}(M) \geqslant \hat{\mu}(ME) + \hat{\mu}(ME').$$

Для наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $E_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, что $M \subseteq \bigcup E_n$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) \leqslant \hat{\mu}(M) + \varepsilon.$$

Далее, так как $ME \subseteq \bigcup EE_n$ и $ME' \subseteq \bigcup E'E_n$, то

$$\varepsilon + \hat{\mu}(M) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu(E_nE) + \mu(E_nE')\right] \geqslant \hat{\mu}(ME) + \hat{\mu}(ME'). \quad \blacktriangleright$$

Замечание 3.1. Функция множества $\hat{\mu}\colon 2^S \to \overline{\mathbb{R}}_+$, определенная формулой (3.1), построена, следуя методу Лебега, который он использовал для построения (уже теперь классической) меры в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. $\hat{\mu}$ называется *внешней мерой, порожденной* (= *индуцированной*) *σ-а. ф. м.* $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Отметим также, что в определении 3.1 функции $\hat{\mu}$ множества $E_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, можно считать дизъюнктными (см. лемму 2.3).

Следствие 3.2. *Пусть Σ — алгебра подмножеств в S, $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — счетно аддитивная функция. Для каждого $A \subseteq S$ положим*

$$\hat{\mu}(A) \doteqdot \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \,\middle|\, A_i \in \Sigma,\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}.$$

Тогда:

1) $\hat{\mu}$ — конечная внешняя мера на 2^S и $\Sigma \subset \Sigma_{\hat{\mu}}$, где

$$\Sigma_{\hat{\mu}} \doteqdot \left\{\, E \in 2^S \,|\, \hat{\mu}(A) = \hat{\mu}(AE) + \hat{\mu}(AE')\ \ \forall A \in 2^S \,\right\};$$

2) $\hat{\mu}(A) = \mu(A)$ для $A \in \Sigma$;

3) $\hat{\mu}\colon \Sigma_{\hat{\mu}} \to \mathbb{R}_+$ — конечная мера (= конечная неотрицательная σ-аддитивная ф. м.).

◀ Утверждения следствия вытекают из теоремы 3.1 Каратеодори и леммы 3.2. ▶

Теорема 3.2 (теорема Хана о продолжении меры). *Каждая определенная на алгебре Σ счетно аддитивная ф. м. $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ имеет счетно аддитивное неотрицательное продолжение на σ-алгебру, порожденную алгеброй Σ. Если μ σ-конечна на Σ, то это продолжение единственно.*

◀ В силу теоремы 3.1 Каратеодори и леммы 3.2 внешняя мера $\hat{\mu}$ является неотрицательным счетно аддитивным продолжением μ на σ-алгебру Σ_0, порожденную алгеброй Σ. Пусть μ_1 — другое такое же продолжение. Если μ σ-конечна на Σ, то для доказательства единственности этого продолжения достаточно показать, что $\hat{\mu}(E) = \mu_1(E)$ для каждого множества E из Σ_0, содержащегося в таком множестве F из Σ, для которого $\mu(F) < \infty$. Пусть $E_n \in \Sigma$ и $E \subseteq \bigcup E_n$. Так как

$$\mu_1(E) \leqslant \sum_n \mu_1(E_n) = \sum_n \mu(E_n),$$

то $mu_1(E) \leqslant \hat{\mu}(E)$. Аналогично $\mu_1(F \setminus E) \leqslant \hat{\mu}(F \setminus E)$. Так как

$$\mu_1(E) + \mu_!(F \setminus E) = \mu_1(F) = \hat{\mu}(F) = \hat{\mu}(E) + \hat{\mu}(F \setminus E),$$

то ввиду предшествующих неравенств получаем $\mu_1(E) = \hat{\mu}(E)$. ▶

Следствие 3.3. *Каждая ограниченная комплексная счетно аддитивная ф. м., определенная на алгебре Σ, имеет единственное счетно аддитивное продолжение на σ-алгебру, порожденную алгеброй Σ.*

◀ Если μ — определенная на алгебре Σ ограниченная счетно аддитивная функция множества, то ввиду теоремы 1.1 о разложении в смысле Жордана и леммы 2.2 ее вещественная и мнимая части могут быть представлены в виде разности двух определенных на Σ неотрицательных счетно аддитивных функций множества. Доказываемый результат вытекает теперь из теоремы 3.2 Хана о продолжении меры. ▶

Теорема 3.3. *Пусть μ — ограниченная регулярная комплексная аддитивная ф. м., определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств компактного топологического пространства S. Тогда μ имеет единственное регулярное счетно аддитивное продолжение на σ-алгебру, порожденную алгеброй Σ.*

◀ Так как μ регулярна в том и только в том случае, если регулярны положительные и отрицательные вариации ее действительной и мнимой частей, то мы можем и будем предполагать, что μ неотрицательна (см. лемму 2.10). По теореме 2.3 Александрова, μ счетно аддитивна на Σ. Поэтому внешняя мера $\hat{\mu}$, определенная в лемме 3.2, является счетно аддитивным продолжением μ на σ-алгебру Σ_1, порожденную Σ (см. теоремы 3.1,3.2 и лемму 3.2).

Остается доказать, что $\hat{\mu}$ регулярна на Σ_1. Если $E \in \Sigma_1$ и $\varepsilon > 0$, то найдутся такие множества $E_n \in \Sigma$, что

$$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{и} \quad \hat{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus E\Big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно определению 2.10, существуют такое открытое множество G_n и такое множество $A_n \in \Sigma$, что

$$E_n \subseteq G_n \subseteq A_n \text{ и } \mu(A_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n=1}}.$$

Положим

$$G \doteqdot \bigcup G_n \text{ и } A \doteqdot \bigcup A_n.$$

Тогда множество G открыто, $A \in \Sigma_1$ и

$$E \subseteq G \subseteq A, \quad A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus E_n),$$

$$\hat{\mu}(A \setminus E) = \hat{\mu}\Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \hat{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus E\Big) <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus E_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Рассуждая так же относительно $E'(\doteqdot S \setminus E)$, мы построим множество $B \in \Sigma_1$, замыкание которого содержится в E и такое, что

$$\hat{\mu}(E \setminus B) < \varepsilon.$$

Этим доказана регулярность $\hat{\mu}$ на Σ_1. ►

Теперь кратко остановимся на задаче продолжения σ-а. ф. м., заданной на кольце (а не на алгебре).

Предложение 3.1. *Пусть $\mu\colon H \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — σ-а. ф. м., заданная на кольце $H \subset 2^S$. Функция $\mu^*\colon 2^S \to \overline{\mathbb{R}}_+$, определенная для произвольного $A \subset S$ следующим равенством*

$$\mu^*(A) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{при } A = \varnothing; \\ \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \,\middle|\, \substack{(A_n)_{n=1}^{\infty}\subset H,\\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \supset A}\right\} & \text{при условии, что хотя бы одна такая последовательность существует;} \\ +\infty & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

удовлетворяет всем условиям определения 3.2, т. е. $\mu^*\colon 2^S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — внешняя мера, порожденная σ-а. ф. м. μ.

◀ Доказательство такое же, как и у соответствующего утверждения леммы 3.2. ▶

Определение 3.3. Пусть $\lambda^*\colon 2^S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — внешняя мера в смысле определения 3.2. Множество $A \subset S$ называется *λ^*-измеримым* (= *измеримым в смысле Каратеодори*), если

$$\forall B \subset S\colon \lambda^*(B) = \lambda^*(BA) + \lambda^*(B \setminus A)$$

или, равносильно,

$$\forall B \subset S\colon \lambda^*(B) = \lambda^*(BA) + \lambda^*(BA').$$

Теорема 3.4 (К. Каратеодори). *Пусть $\lambda^*\colon 2^S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — внешняя мера и Σ_{λ^*} — класс всех λ^*-измеримых множеств. Класс Σ_{λ^*} есть σ-алгебра, а $\lambda^*/_{\Sigma_{\lambda^*}}$ (т. е. сужение λ^* на Σ_{λ^*}) есть мера.*

◀ 1. Σ_{λ^*} — алгебра. Заметим, что $\varnothing \in \Sigma_{\lambda^*}$, поскольку

$$\forall B \subset S\colon \lambda^*(B \cap \varnothing) + \lambda^*(B \setminus \varnothing) = \lambda^*(\varnothing) + \lambda^*(B) = \lambda^*(B)$$

и что из $A \in \Sigma_{\lambda^*}$ следует $A' \in \Sigma_{\lambda^*}$, так как

$$\forall B \subset S\colon \lambda^*(B \cap A') + \lambda^*(B \setminus A') = \lambda^*(BA') + \lambda^*(BA) = \lambda^*(B).$$

Пусть $\{G, F\} \subset \Sigma_{\lambda^*}$. Тогда для любого $B \subset S$ имеем

$$\begin{gathered}\lambda^*(B) = \big(\text{т. к. } G - \lambda^*\text{-измеримо}\big) = \lambda^*(BG) + \lambda^*(BG') = \\ = (\text{т. к. } F - \lambda^*\text{-измеримо}) = \\ = \lambda^*(BG) + \lambda^*(BG'F) + \lambda^*(BG'F'), \qquad (3.2)\\ \lambda^*\big(B(G \cup F)\big) = \big(\text{т. к. } G - \lambda^*\text{-измеримо}\big) = \\ \lambda^*\big(B(G \cup F)G\big) + \lambda^*\big(B(G \cup F)G'\big) = \\ = \lambda^*\big(B \cap G\big) + \lambda^*\big(BFG'\big). \qquad (3.3)\end{gathered}$$

С учетом (3.3) из (3.2) получим равенство

$$\lambda^*(B) = \lambda^*\big(B(G \cup F)\big) + \lambda^*\big(B(G \cup F)'\big).$$

Таким образом, $(G \cup F) \in \Sigma_{\lambda^*}$, откуда

$$GF = \big(G' \cup F'\big)' \in \Sigma_{\lambda^*},\ G \setminus F = (G \cap F') \in \Sigma_{\lambda^*}.$$

2. Σ_{λ^*} — σ-алгебра и сужение λ^* на Σ_{λ^*} есть мера. Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma_{\lambda^*}$. Нужно доказать, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_{\lambda^*}$. Поскольку Σ_{λ^*} — алгебра, то можно предполагать, что $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность дизъюнктных множеств. Для любого $B \subset S$ по λ^*-измеримости A_1 имеем

$$\lambda^*\bigl(B(A_1 \cup A_2)\bigr) = \lambda^*\bigl(B(A_1 \cup A_2)A_1\bigr) + \lambda^*\bigl(B(A_1 \cup A_2)A_1'\bigr) = \\ = \lambda^*(BA_1) + \lambda^*(BA_2).$$

С учетом этого равенства и λ^*-измеримости A_3 получим

$$\lambda^*\bigl(B(A_1 \cup A_2 \cup A_3)\bigr) = \lambda^*(BA_3) + \lambda^*\bigl(B(A_1 \cup A_2)\bigr) = \sum_{i=1}^{3} \lambda^*(BA_i).$$

Аналогично для любого $n \geqslant 1$ имеем равенство

$$\lambda^*\Bigl(B\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(BA_i). \tag{3.4}$$

Используя теперь последовательно λ^*-измеримость $\bigcup\limits_{i=1}^{n}$, равенство (3.4) и монотонность внешней меры. Тогда

$$\lambda^*(B) = \lambda^*\Big(B\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + \lambda^*\Big(B\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)'\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(BA_i) + \lambda^*\Big(B\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big).$$

Таким образом,

$$\lambda^*(B) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(BA_i) + \lambda^*\Big(B\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda^*\Big(B\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) + \lambda^*\Big(B\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big); \qquad (3.5)$$

последнее неравенство основано на свойстве (III) из определения 3.2. С учетом полуаддитивности внешней меры λ^* заключаем, что

$$\lambda^*(B) = \lambda^*\Big(B\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) + \lambda^*\Big(B\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big).$$

Поэтому

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma_{\lambda^*},$$

а соотношение (3.5) выполняется со знаком равенства. Положив в этом равенстве $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, получим

$$\lambda^*\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i). \quad \blacktriangleright$$

Отметим, что $\lambda^*|_{\Sigma_{\lambda^*}}$ — полная мера на Σ_{λ^*} (см. следствие 3.1). Далее, если λ^* — внешняя мера, то σ-алгебра Σ_{λ^*} может оказаться весьма «бедной», возможно даже, что $\Sigma_{\lambda^*} = \{\varnothing, S\}$. Но если внешняя мера индуцирована σ-а. ф. м., заданной на кольце, то справедливо следующее предложение.

Предложение 3.2. *Пусть $\mu\colon H \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — σ-а. ф. м., заданная на кольце $H \subset 2^S$, μ^* — внешняя мера, индуцированная функцией μ и Σ_{μ^*} — σ-алгебра μ^*-измеримых множеств. Тогда $H \subset \Sigma_{\mu^*}$.*

◀ 1. Докажем сначала, что

$$\forall A \in H\colon \mu^*(A) = \mu(A).$$

Действительно, $\mu^*(A) \leqslant \mu(A)$, поскольку $A \subset A \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots$. Кроме того, для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ из H (которую можно считать последовательностью дизъюнктных множеств, $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$) имеем $A =$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(AA_n)$. σ-аддитивность и монотонность ф. м. μ на H приводят к соотношению

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(AA_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Поэтому, согласно определению μ^*, $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$.

2. $H \subset \Sigma_{\mu^*}$. Пусть $A \in H$ и $\varepsilon > 0$ заданы. Рассмотрим произвольное множество $B \subset S$, $\mu^*(B) < +\infty$. Согласно определению μ^*

$$\exists\,(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset H\colon\ \mu^*(B) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Отсюда с учетом аддитивности μ на H и определения μ^*, получим

$$\mu^*(B) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu(A_nA) + \mu(A_nA')\right] \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(BA) + \mu^*(BA').$$

Теперь при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mu^*(B) \geqslant \mu^*(BA) + \mu^*(BA').$$

Из этого неравенства и полуаддитивности внешней меры следует μ^*-измеримость множества A. ▶

Обозначим $\overline{\mu} \doteqdot \mu^*|_{\Sigma_{\mu^*}}$, т. е. $\forall A \in \Sigma_{\mu^*} : \overline{\mu}(A) \doteqdot \mu^*(A)$. Итак, $\overline{\mu}$ — продолжение из теоремы 3.4 σ-а. ф. м. μ с кольца H на σ-алгебру Σ_{μ^*} всех μ^*-измеримых множеств. Имеем включение

$$\Sigma_{\mu^*} \supset \mathbf{r}_\sigma(H)\,,$$

где $\mathbf{r}_\sigma(H)$ — минимальное σ-кольцо, порожденное кольцом H.

Предложение 3.3. *Продолжение σ-конечной и σ-а. ф. м. μ с кольца H на $\mathbf{r}_\sigma(H)$ (= минимальное σ-кольцо, порожденное H) единственно и σ-конечно.*

◀ 1. Пусть φ — некоторое продолжение на $\mathbf{r}_\sigma(H)$ функции μ. Предположим сначала, что одна из функций φ или $\overline{\mu}$ конечна на $\mathbf{r}_\sigma(H)$. Положим

$$Q \doteqdot \{\, A \in \mathbf{r}_\sigma(H) \mid \varphi(A) = \overline{\mu}(A)\,\}\,,$$

при этом $H \subset Q \subset \mathbf{r}_\sigma(H)$. Q — монотонный класс. Действительно, для $(A_n)_{n=1}^\infty \subset Q$, $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ с помощью леммы 2.3 о непрерывности φ снизу имеем

$$\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \lim_n \varphi(A_n) = \lim_n \overline{\mu}(A_n) = \overline{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big),$$

а потому $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n \in Q$. Аналогично с помощью леммы 2.4 о непрерывности сверху и предположения конечности одной из функций φ или $\overline{\mu}$

доказывается, что классу Q принадлежит предел убывающей последовательности множеств из Q. Поэтому $\mathbf{m}_\sigma(H) \subset Q \subset \mathbf{r}_\sigma(H)$ (где $\mathbf{m}_\sigma(H)$ — минимальный монотонный класс, порожденный кольцом H), кроме того, $\mathbf{m}_\sigma(H) = \mathbf{r}_\sigma(H)$ (см. §§ 1,2 главы I). Следовательно, $Q = \mathbf{r}_\sigma(H)$.

2. Пусть $A \in H$ — множество, для которого одна из функций φ или $\overline{\mu}$ конечна. Тогда по уже доказанной части 1 функции φ и $\overline{\mu}$ совпадают на $A \cap \mathbf{r}_\sigma(H) = \mathbf{r}_\sigma(A \cap H)$. Кроме того, любое множество из $\mathbf{r}_\sigma(H)$ содержится в объединении счетного набора множеств из H, причем каждое с конечным значением функции $\overline{\mu}$. ▶

Замечание 3.2. Условие σ-конечности μ на H в предложении 3.3 существенно ([1, 9]).

Отметим также, что $\overline{\mu}$ на Σ_{μ^*} есть пополнение $\overline{\mu}$ на $\mathbf{r}_\sigma(H)$.

Предложение 3.4 (о приближении). *Пусть $\mu \geqslant 0$ — σ-конечная и σ-а. ф. м. на кольце H и $\overline{\mu}$ ее продолжение на $\mathbf{r}_\sigma(H)$. Тогда*

$$\forall \big(A \in \mathbf{r}_\sigma(H)\,,\ \ \overline{\mu}(A) < +\infty\big)\,\forall \varepsilon > 0\,\exists C \in H:$$
$$\overline{\mu}\big((A \setminus C) \cup (C \setminus A)\big) < \varepsilon.$$

◀ Пусть μ^* — внешняя мера, индуцированная функцией μ, при этом $\overline{\mu} = \mu^*$ на $\mathbf{r}_\sigma(H)$. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Согласно определению внешней меры для $\overline{\mu}(A) = \mu^*(A)$ и числа $\varepsilon/2$ имеем

$$\exists\,(A_n)_{n=1}^\infty \subset H,\ \bigcup_{n=1}^\infty A_n \supset A:$$

$$\overline{\mu}(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \overline{\mu}(A_n).$$

Отсюда с помощью σ-аддитивности и монотонности $\overline{\mu}$ получим для каждого $n \geqslant 1$

$$\overline{\mu}(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \geqslant \overline{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\Big). \tag{3.6}$$

Кроме того, в силу непрерывности $\overline{\mu}$ снизу

$$\overline{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_k \overline{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\Big).$$

Следовательно,

$$\exists n_0 \geqslant 1\colon \overline{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\Big) + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big). \tag{3.7}$$

Пусть

$$C \doteqdot \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n.$$

Тогда из неравенств (3.6) и (3.7) получим

$$\overline{\mu}(C \setminus A) \leqslant \overline{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\Big) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\overline{\mu}(C \setminus A) \leqslant \overline{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\Big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что если μ^* — внешняя мера, индуцированная заданной на кольце $H \subset 2^S$ неотрицательной σ-а. ф. м. μ и $\mu^*(S) < +\infty$, то

$$A \in \Sigma_{\mu^*} \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists C \in H \colon \mu^*\big((A \setminus C) \cup (C \setminus A)\big) < \varepsilon.$$

С помощью полученных в настоящем параграфе абстрактных утверждений можно построить много конкретных и часто используемых мер. Остановимся на некоторых из них.

Пример 1 (Борелевские и лебеговские меры в $\mathbb{R}$). Воспользуемся теоремой 3.3 для определения борелевских и лебеговских мер в $\mathbb{R}$.

Пусть $a < b$, $S \doteqdot [a, b]$ и Σ — семейство подмножеств из S следующего вида:

$$\{a\} = [a, a], \quad (c, d] \text{ для } a \leqslant c < d \leqslant b,$$

а также конечное объединение таких промежутков. Ясно, что Σ — является алгеброй. Положим

$$\mu\big(\{a\}\big) \doteqdot 0 \quad \mu\big((c, d]\big) \doteqdot d - c$$

и

$$\mu\Big(\bigsqcup_{j=1}^{k} A_j\Big) \doteqdot \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j),$$

если $k \in \mathbb{N}$ и A_j — различные промежутки рассматриваемого вида. Функция $\mu \colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ ограничена, аддитивна и регулярна на Σ, и, по теореме 3.3, имеет единственное расширение $\tilde{\mu}$ до ограниченной регулярной меры на наименьшую σ-алгебру $\widetilde{\Sigma}$, содержащую Σ. Известно, что каждое открытое подмножество из S является конечным или счетным набором открытых (относительно S) интервалов. Поэтому каждый элемент из Σ является борелевским множеством, а $\widetilde{\Sigma}$ содержит открытые подмножества из S; следовательно,

$$\widetilde{\Sigma} = \mathfrak{B}(S)\,,$$

где $\mathfrak{B}(S)$ — σ-алгебра всех борелевских подмножеств пространства S.

Определение 3.4. Мера $\tilde{\mu}\colon \widetilde{\Sigma}\left(= \mathfrak{B}(S)\right) \to \mathbb{R}_+$ называется *борелевской мерой* в $S = [\,a, b]$, а тройка $(S, \mathfrak{B}(S)\,, \tilde{\mu})$ — *пространством с борелевской мерой.*

Совокупность $\widetilde{\Sigma}^*$ всех множеств вида $E \cup N$, где $E \in \widetilde{\Sigma}$ и N — подмножество такого множества $M \in \widetilde{\Sigma}$, для которого $\tilde{\mu}(M) = 0$, является σ-алгеброй, а $\tilde{\mu}^*(E \cup N) \doteqdot \tilde{\mu}(E)$ — мера на $\widetilde{\Sigma}^*$ (см. теорему 2.4). Мера $\tilde{\mu}^*\colon \widetilde{\Sigma}^* \to \mathbb{R}_+$ называется *мерой Лебега* (= *лебеговским продолжением меры* $\tilde{\mu}$), а пространство $(S, \widetilde{\Sigma}^*, \tilde{\mu}^*)$ — *лебеговским расширением пространства* $(S, \widetilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$.

Если $A \subset S = \mathbb{R}$ и $A \cap [j, j+1]$ является борелевским множеством (как подмножество из $[j, j+1]$) для каждого $j \in \mathbb{Z}$, то A — борелевское множество в $\mathbb{R}$. Положим

$$\mu_B(A) \doteqdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu_j\big(A \cap [j, j+1]\big) \in \mathbb{R}_+,$$

где μ_j — борелевская мера в $[j, j+1]$. Нетрудно проверить, что μ_B — мера; назовем ее *борелевской мерой в* $\mathbb{R}$. Более того, если $\tilde{\mu}$ — борелевская мера в $[a, b]$ и A — борелевское подмножество из $[a, b]$, то ясно, что $\tilde{\mu}(A) = \sum\limits_{a \leqslant j \leqslant b} \mu_j\big([j, j+1] \cap A\big) = \mu_B(A)$.

Если $A \subset \mathbb{R}$ и $A \cap [j, j+1]$ — измеримое по Лебегу подмножество из $[j, j+1]$ $(j \in \mathbb{Z})$, то A называется *измеримым по Лебегу подмножеством* из $\mathbb{R}$. Легко видеть, что измеримые по Лебегу подмножества из $\mathbb{R}$ образуют σ-алгебру, а подмножества, которые содержатся в некотором ограниченном промежутке $[a, b]$, совпадают с измеримыми по Лебегу подмножествами из $[a, b]$. Лебеговская мера распространяется на $\mathbb{R}$ так же, как и борелевская мера.

Конструкция мер Бореля и Лебега на $\mathbb{R}$ в примере 1, основанная на теореме 3.3, обобщается на случай пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. В следующем примере приводится построение мер Бореля и Лебега на $\mathbb{R}^n$, минуя теорему 3.3.

Пример 2 (Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$). Пусть H — полукольцо всех прямоугольников Π в $\mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{E}$ — совокупность всех элементарных множеств, т. е. $\mathfrak{E} = \mathbf{r}(H)$, где $\mathbf{r}(H)$ — минимальное кольцо, порожденное полукольцом H. Тогда ф. м. $\mu\colon \mathfrak{E} \to \mathbb{R}_+$, где

$$\forall A \in \mathfrak{E}\colon \mu(A) \doteqdot \sum_{m=1}^{M} \mu(\Pi_m),$$

если $A = \bigsqcup\limits_{m=1}^{M} \Pi_m$, $\{\Pi_m\}_{m=1}^{M} \subset H$, а $\mu(\Pi) \doteqdot \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$ при условии, что $\Pi \in H$ определяется числами $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$, $a_k \leqslant b_k$, $k =$

$\overline{1,n}$, является единственным sg-аддитивным продолжением σ-а. ф. м. $\mu\colon H \to \mathbb{R}$ (см. упражнение 4). Пусть, далее, $\mu^*\colon 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,+\infty]$ — внешняя мера, индуцированная функция $\mu\colon \mathfrak{E} \to \mathbb{R}_+$, т. е.

$$\forall A \in 2^{\mathbb{R}^n} : \mu^*(A) \doteqdot \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

где нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества A системами множеств $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ из $\mathfrak{E}$.

Отметим, что в определении $\mu^*(A)$ в случае $\mathbb{R}^n$ для покрытий множества A можно брать только открытые прямоугольники Π° из кольца (или даже из полукольца H). В самом деле, если

$$\mu^*_\circ(A) \doteqdot \inf_{\substack{\Pi^\circ_k \in \mathfrak{E},\\ A \subset \bigcup\limits_k \Pi^\circ_k}} \sum_k \mu(\Pi^\circ_k),$$

где Π°_k — произвольные открытые прямоугольники, то всегда $\mu^*(A) \leqslant \mu^*_\circ(A)$. Докажем, что $\mu^*(A) = \mu^*_\circ(A)$. Поскольку очевидно, что $\mu\colon \mathfrak{E} \to \mathbb{R}_+$ является σ-конечной ф. м., то мы можем считать множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограниченным. Пусть выполняется неравенство $\mu^*(A) < \mu^*_\circ(A)$ и $\mu^*_\circ(A) - \mu^*(A) \leqslant \varepsilon$. Выберем такое покрытие множества A, что

$$\sum_k \mu(\Pi_k) - \mu^*(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заменим каждый прямоугольник Π_k открытым Π°_k, $\Pi^\circ_k \supset \Pi_k$ и таким, что

$$\mu(\Pi^\circ_k) - \mu(\Pi_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^k}.$$

Тогда

$$\sum_k \mu(\Pi_k^\circ) - \mu^*(A) \leqslant \frac{3\varepsilon}{4}.$$

т. е.

$$\sum_k \mu(\Pi_k^\circ) - \mu_\circ^*(A) + \varepsilon \leqslant \frac{3\varepsilon}{4},$$

$$\sum_k \mu(\Pi_k^\circ) \leqslant \mu_\circ^*(A) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

что противоречит определению $\mu_\circ^*(A)$. Таким образом, $\mu_\circ^*(A) = \mu^*(A)$.

Пусть Σ_{μ^*} — класс всех μ^*-измеримых множеств пространства $\mathbb{R}^n$. По определениям 3.2 и 3.3 Σ_{μ^*} — σ-алгебра, μ^* на Σ_{μ^*} — мера.

Очевидно, что справедливы включения

$$H \subset \mathfrak{E} \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subset \Sigma_{\mu^*},$$

где $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ — σ-алгебра борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.5. Множество из σ-алгебры Σ_{μ^*} называются *измеримыми по Лебегу*, а μ^* на Σ_{μ^*} (обозначаемая далее μ) — *мерой Лебега* (или *n-мерной мерой Лебега*), а $\mu \doteqdot \mu^*|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}$ — *мерой Бореля* на $\mathbb{R}^n$. При этом, по определению, $(\mathbb{R}^n, \Sigma_\mu, \mu)$, $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ называются *пространствами с мерой Лебега* и *Бореля* соответственно.

Изложенные выше абстрактные конструкции продолжения можно использовать иначе определяя σ-а. ф. м. на исходной области ее задания. Это мы иллюстрируем на следующем примере.

Пример 3. (Мера Бореля—Стилтьеса и Лебега—Стилтьеса на $\mathbb{R}$). Пусть $\mathfrak{E}$ — кольцо элементарных множеств в $\mathbb{R}$ и $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция.

Определение 3.6. *Мерой Стилтьеса на* $\mathfrak{E}$, соответствующей функции f, назовем функцию множества $\mu_f\colon \mathfrak{E} \to [0,+\infty)$ такую, что для любых чисел $a \leqslant b$ выполнены равенства

$$\mu_f\big([a,b]\big) = f(b+0) - f(a-0),$$
$$\mu_f\big([a,b)\big) = f(b-0) - f(a-0),$$
$$\mu_f\big((a,b]\big) = f(b+0) - f(a+0),$$

а при $a < b$ выполнено равенство

$$\mu_f\big((a,b)\big) = f(b-0) - f(a+0).$$

Для любого множества $A \in \mathfrak{E}$ и любого разбиения попарно непересекающимися промежутками $\{I_m\}_{m=1}^N$, т. е.

$$A = \bigsqcup_{m=1}^N I_m, \quad I_m \cap I_k = \varnothing \ \text{ при всех } \ m \neq k,$$

выполнено равенство $\mu_f(A) = \sum\limits_{m=1}^N \mu_f(I_m)$.

Определение меры Стилтьеса элементарного множества $A \in \mathfrak{E}$ не зависит от выбора его разбиения и $\mu_f \colon \mathfrak{E} \to [0, +\infty)$ является конечно аддитивной и регулярной функцией (см. упражнение 9). Далее, мера Стилтьеса на $\mathfrak{E}$ счетно аддитивна. Докажем сначала счетную аддитивность μ_f на полукольце $H \subset \mathfrak{E}$. Пусть

$$|a, b| \in H \quad \text{и} \quad |a, b| = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} |a_i, b_i| \, .$$

Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\mu_f\big(\,|a, b|\,\big) \geqslant \mu_f\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} |a_i, b_i|\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu_f\big(\,|a_i, b_i|\,\big).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получим следующее неравенство

$$\mu_f\big(\,|a, b|\,\big) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f\big(\,|a_i, b_i|\,\big).$$

Докажем обратное неравенство. Так как функция f имеет пределы справа и слева, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся отрезок $[c, d]$ и интервалы (c_i, d_i) такие, что

$$[c, d] \subseteq |a, b| \, , \quad \mu_f\big(\,|a, b|\,\big) < \mu_f\big(\,[c, d]\,\big) + \frac{\varepsilon}{2};$$
$$|a_i, b_i| \subseteq (c_i, d_i) \, , \quad \mu_f\big(\,(c_i, d_i)\,\big) < \mu_f\big(\,|a_i, b_i|\,\big) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

По теореме о конечном покрытие $[c,d] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (c_i, d_i)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Из свойства конечной полуаддитивности μ_f и указанных выше неравенств вытекает, что

$$\mu_f\big(|a,b|\big) < \sum_{i=1}^{n} \mu_f\big((c_i, d_i)\big) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f\big(|a_i, b_i|\big) + \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем неравенство

$$\mu_f\big(|a,b|\big) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f\big(|a_i, b_i|\big).$$

Таким образом, обратное неравенство также верно, т. е. μ_f — σ-а. ф. м. на H. Следовательно (см. упражнение 2 к § 2), μ_f — σ-аддитивная функция множества на $\mathfrak{E}$. Очевидно также, что $\mu_f \colon \mathfrak{E} \to [0, +\infty)$ — σ-конечная функция.

Обозначим через μ_f^* внешнюю меру, индуцированную функцией μ_f, а через $\Sigma_{\mu_f^*}$ — класс всех μ_f^*-измеримых подмножеств $\mathbb{R}$. По теореме 3.4 $\Sigma_{\mu_f^*}$ — σ-алгебра, а $\mu_f^* \colon \Sigma_{\mu_f^*} \to \mathbb{R}_+$ — мера.

Отметим, что $\mathfrak{E} \subset \mathbf{r}_\sigma(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subset \Sigma_{\mu_f^*}$ (см. предложение 3.2 и 3.3).

В следующем определении для сокращения записи положено

$$\Sigma_{\mu_f} \doteqdot \Sigma_{\mu_f^*} \quad \text{и} \quad \mu_f \doteqdot \mu_f^*|_{\Sigma_{\mu_f^*}}.$$

Определение 3.7. Множества из σ-алгебры Σ_{μ_f} называются *μ_f-измеримыми* (или *измеримыми*), мера μ_f на Σ_{μ_f} называется *мерой Лебега–Стилтьеса* и мера $\mu_f \colon \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — *мерой Бореля–Стилтьеса.*

В следующем примере мы рассматриваем меру Лебега –Стилтьеса, соответствующую функции скачков неубывающей функции $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Пример 4. Неубывающая на $\mathbb{R}$ функция f имеет не более чем счетное число разрывов первого рода ([5, 6, 7]). Пусть $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ — все разрывы функции f, причем $x_m \neq x_k$ при всех $m \neq k$. Для определенности будем считать, что функция f является непрерывной слева на $\mathbb{R}$, т. е. $\forall\, x \in \mathbb{R} \colon f(x-0) = f(x)$. Тогда

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \colon \lambda_m = f(x_m + 0) - f(x_m) > 0$$

— скачок функции f в точке разрыва x_m.

Выберем точку $x_0 \neq x_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и определим число $c_0 = f(x_0)$. Очевидно, что

$$\forall\, x > x_0 \colon \quad \sum_{\substack{m: \\ x_0 < x_m < x}} \lambda_m \leqslant f(x) - f(x_0),$$

$$\forall\, x < x_0 \colon \quad \sum_{\substack{m: \\ x \leqslant x_m < x_0}} \lambda_m \leqslant f(x_0) - f(x).$$

Положим

$$\mathbb{N}_+ \doteqdot \{\, m \in \mathbb{N} \,|\, x_0 < x_m \,\}, \quad \mathbb{N}_- \doteqdot \{\, m \in \mathbb{N} \,|\, x_0 > x_m \,\},$$

$$\theta_1(x) \doteqdot \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0, \end{cases} \qquad \theta_2(x) \doteqdot \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

Определение 3.8. Функция

$$s(x) = c_0 + \sum_{m \in \mathbb{N}_+} \lambda_m \theta_1(x - x_m) + \sum_{m \in \mathbb{N}_-} (-\lambda_m)\theta_2(x_m - x)$$

(здесь $x \in \mathbb{R}$) называется *функцией скачков* неубывающей и непрерывной слева на $\mathbb{R}$ функции f. Ясно, что $s(x)$ возрастающая функция.

Очевидно, что

$$\forall\, x > x_0 \colon s(x) = c_0 + \sum_{\substack{m\colon \\ x_0 < x_m < x}} \lambda_m,$$

$$\forall\, x < x_0 \colon s(x) = c_0 - \sum_{\substack{m\colon \\ x \leqslant x_m < x_0}} \lambda_m.$$

Для любого $x > x_0$ получаем

$$s(x-0) = c_0 + \lim_{\delta \to +0} \sum_{\substack{m\colon \\ x_0 < x_m < x-\delta}} \lambda_m = c_0 + \sum_{\substack{m\colon \\ x_0 < x_m < x}} \lambda_m = s(x),$$

для любого $x < x_0$ —

$$s(x-0) = c_0 - \lim_{\delta\to+0} \sum_{\substack{m:\\ x-\delta\leqslant x_m<x_0}} \lambda_m = c_0 - \sum_{\substack{m:\\ x\leqslant x_m<x_0}} \lambda_m = s(x),$$

а для $x = x_0$ —

$$s(x_0-0) = c_0 - \lim_{\delta\to+0} \sum_{\substack{m:\\ x_0-\delta\leqslant x_m<x_0}} \lambda_m = c_0 - \sum_{\substack{m:\\ x_0\leqslant x_m<x_0}} \lambda_m = s(x_0),$$

т. е. функция скачков $s(x)$ является непрерывной слева на $\mathbb{R}$.

Далее, для любого $x \geqslant x_0$ вида $x \neq x_i$ при всех $i \in \mathbb{N}$ получаем

$$s(x+0) = c_0 + \lim_{\delta\to+0} \sum_{\substack{m:\\ x_0<x_m<x+\delta}} \lambda_m = c_0 + \sum_{\substack{m:\\ x_0<x_m\leqslant x}} \lambda_m = s(x),$$

а для $x = x_i > x_0$ —

$$s(x_i+0) = c_0 + \lim_{\delta\to+0} \sum_{\substack{m:\\ x_0<x_m<x_i+\delta}} \lambda_m = c_0 + \sum_{\substack{m:\\ x_0<x_m\leqslant x_i}} \lambda_m = s(x_i) + \lambda_i.$$

Аналогично, для любого $x < x_0$ вида $x \neq x_i$ при всех $i \in \mathbb{N}$ получаем

$$s(x+0) = c_0 - \lim_{\delta\to+0} \sum_{\substack{m:\\ x+\delta\leqslant x_m<x_0}} \lambda_m = c_0 - \sum_{\substack{m:\\ x\leqslant x_m<x_0}} \lambda_m = s(x),$$

а для $x = x_i < x_0$ —

$$s(x_i+0) = c_0 - \lim_{\delta\to+0} \sum_{\substack{m:\\ x_i+\delta\leqslant x_m<x_0}} \lambda_m = c_0 - \sum_{\substack{m:\\ x_i<x_m<x_0}} \lambda_m = s(x_i) + \lambda_i.$$

Таким образом, функция $s(x)$ непрерывна справа в любой точке $x \neq x_i$ при всех $i \in \mathbb{N}$, а в каждой точке x_i она имеет разрыв справа со скачком, равным λ_i.

Теперь, учитывая непрерывность слева функции скачков $s(x)$ на $\mathbb{R}$, определим функцией множества μ_s на кольце H всех конечных промежутков из $\mathbb{R}$ (см. пример 3):

$$\mu_s\big([a,b]\big) = s(b+0) - s(a) = \sum_{\substack{m:\\ a\leqslant x_m\leqslant b}} \lambda_m = \sum_{\substack{m:\\ x_m\in[a,b]}} \lambda_m,$$

$$\mu_s\big([a,b)\big) = s(b) - s(a) = \sum_{\substack{m:\\ a\leqslant x_m<b}} \lambda_m = \sum_{\substack{m:\\ x_m\in[a,b)}} \lambda_m,$$

$$\mu_s\big((a,b]\big) = s(b+0) - s(a+0) = \sum_{\substack{m:\\ a<x_m\leqslant b}} \lambda_m = \sum_{\substack{m:\\ x_m\in(a,b]}} \lambda_m,$$

$$\mu_s\big((a,b)\big) = s(b) - s(a+0) = \sum_{\substack{m:\\ a<x_m<b}} \lambda_m = \sum_{\substack{m:\\ x_m\in(a,b)}} \lambda_m.$$

Таким образом, для любого числового промежутка $I \subset \mathbb{R}$ имеем

$$\mu_s(I) = \sum_{\substack{m:\\ x_m\in I}} \lambda_m < +\infty.$$

Тогда для любого элементарного множества $A \in \mathfrak{E}$ получим

$$\mu_s(A) = \sum_{\substack{m:\\ x_m \in A}} \lambda_m < +\infty.$$

Функция $\mu_s\colon \mathfrak{E} \to \mathbb{R}_+$ является σ-а. ф. м. на $\mathfrak{E}$ и она регулярна на $\mathfrak{E}$ (см. пример 3). Пусть $\mu_s^*\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ — внешняя мера, индуцированная функцией μ_s. Тогда, как известно, $\mu_s^*|_{\Sigma_{\mu_s^*}}$ будет σ-а. ф. м., т. е. мерой; здесь $\Sigma_{\mu_s^*}$ — σ-алгебра μ_s^*-измеримых множеств пространства $\mathbb{R}$.

Покажем, что любое множество $E \subset \mathbb{R}$ является μ_s^*-измеримым и справедливо равенство

$$\mu_s^*(E) = \sum_{\substack{m:\\ x_m \in E}} \lambda_m.$$

Так как для любого множества $A \in \mathfrak{E}$ имеет место включение $A \setminus \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \in \Sigma_{\mu_s^*}$, то справедливо равенство

$$\mu_s^*\big(A \setminus \{x_m\}_{m=1}^{\infty}\big) = \mu_s^*(A) - \mu_s^*\Big(\bigsqcup_{\substack{m:\\ x_m \in A}} \{x_m\}\Big) =$$

$$= \mu_s^*(A) - \sum_{\substack{m:\\ x_m \in A}} \mu_s(x_m) = \sum_{\substack{m:\\ x_m \in A}} \lambda_m - \sum_{\substack{m:\\ x_m \in A}} \lambda_m = 0,$$

т. е.

$$\forall A \in \mathfrak{E}\colon \mu_s^*\big(A \setminus \{x_m\}_{m=1}^{\infty}\big) = 0.$$

Так как

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{k=-\infty}^{+\infty} [\,k, k+1) \in \Sigma_{\mu_s^*},$$

получаем

$$\mu_s^*(\mathbb{R}) = \sum_{k=1-\infty}^{+\infty} \mu_s\big([\,k, k+1)\big) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m = \sum_{\substack{m:\\ x_m\in\mathbb{R}}} \lambda_m.$$

Так как справедливо равенство

$$\mu_s^*\big(\mathbb{R} \setminus \{x_m\}_{m=1}^{\infty}\big) = \sum_{k=1-\infty}^{+\infty} \mu_s^*\big([\,k, k+1) \setminus \{x_m\}_{m=1}^{\infty}\big) = \sum_{k=1-\infty}^{+\infty} 0 = 0,$$

то для любого множества $E \subset \mathbb{R}$ имеем включение

$$E \setminus \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$$

и справедливо равенство

$$\mu_s^*\big(E \setminus \{x_m\}_{m=1}^{\infty}\big) = 0$$

(ибо μ_s^* — полная мера на $\Sigma_{\mu_s^*}$).

Так как множество $\bigcup\limits_{m:\, x_m\in E} \{x_m\} \in \Sigma_{\mu_s^*}$ не более чем счетно, то

$$E = \Big(E \setminus \{x_m\}_{m=1}^{\infty}\Big) \sqcup \Big(\bigcup_{m:\, x_m\in E} \{x_m\}\Big) \in \Sigma_{\mu_s^*},$$

и справедливо равенство

$$\mu_s^*(E) = \sum_{m\colon x_m \in E} \lambda_m.$$

Пусть X — непустое множество, не обязательно являющееся подмножеством евклидова пространства или вообще какого-нибудь топологического пространства. К числу исходных данных для определения интеграла Лебега по множеству X относятся измеримое пространство подмножеств X и мера на этом пространстве. Будем придерживаться следующего определения.

Определение 3.9. Пусть X — основное множество, Σ — σ-алгебра подмножеств X. Пара (X, Σ) называется *измеримым пространством*, а множества из Σ называются *измеримыми* (или Σ-*измеримыми*). Пусть μ — мера на Σ. Набор (X, Σ, μ) называется *пространством с мерой*. Если $\mu(X) = 1$, то мера μ называется *вероятностной*, а (X, Σ, μ) — *вероятностным пространством*.

Например, если взять $X = \mathbb{R}^n\,(n \in \mathbb{N})$, в качестве Σ — множество всех измеримых по Лебегу подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, а в качестве μ — классическую меру Лебега, то получим $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$.

Другой пример: если взять $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$, а в качестве $\mu(E)\,(E \in \Sigma)$ — число элементов множества E, то получим $(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$.

Отметим, что теория интеграла Лебега не стала бы проще, если бы вместо (X, Σ, μ) мы ограничились, скажем, случаем (J, Σ, μ), где $J \subseteq \mathbb{R}\,(n \in \mathbb{N})$. На самом деле, основные положения теории интеграла Лебега с гораздо большей ясностью проявляются именно в общей ситуации, когда хорошо видно, что главная особенность состоит в счетной аддитивности μ, определенной на некоторой σ-алгебре (или σ-кольце).

Упражнения

1. В этом упражнении приведем часто используемый способ ($=$ прием) продолжения σ-а. ф. м. (см. [4]).

Пусть H — полукольцо прямоугольников

$$\Pi = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall k \in \overline{1,n}\colon \begin{array}{l} (a_k \leqslant x_k \leqslant b_k) \text{ или} \\ (a_k \leqslant x_k < b_k) \text{ или} \\ (a_k < x_k \leqslant b_k) \text{ или} \\ (a_k < x_k < b_k) \end{array} \right\}$$

а $\mathfrak{E}$ — кольцо всех элементарных множеств в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\forall A \in \mathfrak{E}\colon \mu(A) \doteqdot \sum_{i=1}^{m} \mu(Pi_i), \quad \text{если} \quad A = \bigsqcup_{i=1}^{m} \Pi_i,$$

где $\mu(\Pi) \doteqdot \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.

Ясно, что $\mu\colon \mathfrak{E} \to \mathbb{R}_+$ конечно аддитивна и регулярна и, следовательно, σ-аддитивна

$$\forall A, B \subset \mathbb{R}^n\colon d(A,B) \doteqdot \mu^*(A \vartriangle B),$$

где $\mu^*: 2^{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}_+$ — внешняя мера, индуцированная функцией $\mu\colon \mathfrak{E} \to \mathbb{R}_+$.

Назовем множество

$$\mathfrak{M}_F(\mu) \doteqdot$$
$$\doteqdot \{\, A \subset \mathbb{R}^n \mid \exists\, (A_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{E}\colon d(A_m, A) \to 0 \;\; \text{при} \;\; m \to \infty \,\}$$

Сайт ДГУ
Тиульный лист
Оглавление
страница 166 из 268
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

множеством *μ-конечных измеримых множеств*, а множество

$$\mathfrak{M}(\mu) \doteqdot \left\{E \subset \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists\, (E_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_F(\mu) \colon E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right\}$$

— множеством *μ-измеримых множеств* пространства $\mathbb{R}^n$.

Доказать справедливость следующих предложений.

a) Величина $d(A, B)$ может принимать значения $+\infty$ и быть равной нулю при $A \neq B$.

Указание. $d(\mathbb{R}^n, \varnothing) = \mu^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$, так как $\mu^*(\mathbb{R}^n) \geqslant \mu^*(\Pi) = \mu(\Pi)$, а число $\mu(\Pi)$ может быть сколь угодно велико; $d(E, \varnothing) = \mu^*(E) = 0$, если $E \subset \mathbb{R}^n$ — счетное множество). ▶

b) $\forall A, B \subset \mathbb{R}^n \colon d(A, B) = d(B, A)$ и $d(A, A) = 0$.

c) $\forall A, B, C \subset \mathbb{R}^n \colon d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(B, C)$.

Указание. Использовать включение $A \vartriangle B \subset (A \vartriangle C) \cup (B \vartriangle C)$ и полуаддитивность внешней меры μ^*). ▶

d) $\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n \colon$
$d\big(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2\big) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.

Указание. Использовать включение

$$(A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)$$

и полуаддитивность внешней меры μ^*. ▶

e) $\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n:$
$d\big(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2\big) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2).$

Указание. Использовать включение

$$(A_1 \cap A_2) \vartriangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)$$

и полуаддитивность внешней меры μ^*. ▶

f) $\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n:$
$d\big(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2\big) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2).$

Указание. Использовать включение

$$(A_1 \setminus A_2) \vartriangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)$$

и полуаддитивность внешней меры μ^*. ▶

g) Если для множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ хотя бы одна из величин $\mu^*(A)$ или $\mu^*(B)$ конечна, то

$$\big|\mu^*(A) - \mu^*(B)\big| \leqslant d(A, B).$$

Указание. Пусть $\mu^*(B) < +\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A)$. Тогда из утверждению 1b) получаем

$$\mu^*(A) = d(A, \varnothing) \leqslant d(A, B) + d(B, \varnothing) = d(A, B) + \mu^*(B).$$

▶

h) $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{M}_F(\mu).$

Указание. $\forall A \in \mathfrak{E}$ имеем $\big(A_m = A\big)_{m=1}^{\infty} \mathfrak{E}$ и $d(A_m, A) = 0$. ▶

i) Если множество $B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и $(A_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{E}$ таковы, что $d(A_m, A) \to 0$ при $m \to \infty$, то числовая последовательность $\big(\mu(A_m)\big)_{m=1}^{\infty}$ является сходящейся к $\mu^*(B)$.

Указание. По утверждению 1g) имеем $\big|\mu^*(B) - \mu^*(A_m)\big| \leqslant d(A_m, B) \to 0$, откуда следует, что $\mu^*(B) < +\infty$ и $\mu(A_m) \to \mu^*(B)$. ▶

j) **Теорема (Лебег)** Множество μ-измеримых множеств $\mathfrak{M}(\mu)$ является σ-кольцом, а ф. м. $\mu^*\colon \mathfrak{M}(\mu) \to [0, +\infty]$ является счетно аддитивной и регулярной.

◀a) Покажем сначала, что $\mathfrak{M}_F(\mu)$ — кольцо, а $\mu^*\colon \mathfrak{M}_F(\mu) \to [0, +\infty]$ — а. ф. м. Пусть $A, B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Тогда $\exists\, (A_m)_{m=1}^{\infty}, (B_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{E}$ такие, что $d(A_m, A) \to 0$ и $d(B_m, B) \to 0$ при $m \to \infty$. По утверждению 1i) имеем $\mu^*(A_m) \to \mu^*(A)$ и $\mu^*(B_m) \to \mu^*(B)$, а по утверждениям 1d), 1e), 1f) получим

$$d(A_m \cup B_m, A \cup B) \to 0,\ \ d(A_m \cap B_m, A \cap B) \to 0, \quad \text{и}$$
$$d(A_m \setminus B_m, A \setminus B) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Так как $\mathfrak{E}$ — кольцо, то для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $A_m \cup B_m \in \mathfrak{E}$, $A_m \cap B_m \in \mathfrak{E}$ и $A_m \setminus B_m \in \mathfrak{E}$. Следовательно, по определению $\mathfrak{M}_F(\mu)$ получим $A_m \cup B_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, $A_m \cap B_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и $A_m \setminus B_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, т. е. $\mathfrak{M}_F(\mu)$ — кольцо. Далее, для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mu(A_m) + \mu(B_m) = \mu(A_m \cup B_m) + \mu(A_m \cap B_m).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то $\mu^*(A \cap B) = \mu^*(\varnothing)$ и $\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \sqcup B)$, т. е. μ^* — а. ф. м. на $\mathfrak{M}_F(\mu)$.

б) Теперь покажем, что μ^* — σ-а. ф. м. на $\mathfrak{M}(\mu)$. Пусть $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ — произвольно фиксированное множество и

$$(\widetilde{E})_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_F(\mu)\colon\ E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{E}_m = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} E_m,$$

где

$$E_1 = \widetilde{E}_1 \in \mathfrak{M}_F(\mu), \quad \text{а при} \quad m > 1$$

$$E_m = \Big(\bigcup_{k=1}^{m} \widetilde{E}_k\Big) \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{m-1} \widetilde{E}_k\Big) \in \mathfrak{M}(\mu).$$

Тогда

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m).$$

С другой стороны,

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\colon E \supset \bigsqcup_{k=1}^{m} E_k.$$

Поэтому

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*\Big(\bigsqcup_{k=1}^{m} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} \mu^*(E_k)$$

в силу конечной аддитивности μ^* на кольце $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Отсюда при $m \to \infty$ получим

$$\mu^*(E) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

Таким образом,

$$\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

Если предположить, что $\mu^*(E) < +\infty$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$ сходится к числу $\mu^*(E)$ и для множества $S_m = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} E_k \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ получим

$$d(E, S_m) = \mu^*\Big(\bigsqcup_{k=m+1}^{\infty} E_k \Big) \leqslant \sum_{k=m+1}^{m} \mu^*(E_k) \to 0$$

при $m \to \infty$. Так как $S_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, то существует множество $A_m \in \mathfrak{E}$ такое, что $d(S_m, A_m) \leqslant 1/m$. Следовательно, $d(E, A_m) \leqslant d(E, S_m) + d(S_m, A_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, справедливо включение $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Поэтому любое μ-измеримое множество с конечной внешней мерой является конечно μ-измеримым. Теперь рассмотрим произвольную последовательность попарно непересекающихся множеств $E_m \in \mathfrak{M}(\mu)$ таких, что множество $E = \bigsqcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ принадлежит $\mathfrak{M}(\mu)$. Если существует номер m_0 такой, что $\mu^*(E_{m_0}) = +\infty$, то $\mu^*(E) \geqslant$

$\mu^*(E_{m_0}) = +\infty$, т. е. $\mu^*(E) = +\infty$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m) = +\infty$, т. е. справедливо равенство

$$\mu^*(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m) = +\infty.$$

Если же $\mu^*(E_m) < +\infty$ для любого $m \in \mathbb{N}$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ имеет место включение $E_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, и требуемое равенство $\mu^*(E) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m)$ уже установлено выше.

в) Теперь покажем, что $\mathfrak{M}(\mu)$ является σ -кольцом. Рассмотрим последовательность $(E_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда для любого номера m существует последовательность множеств $\left(A_{m,k}\right)_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_F(\mu)$ такая, что выполнено равенство $E_m = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{m,k}$. Следовательно,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{m,k} \in \mathfrak{M}(\mu)$$

как счетное объединение конечно μ-измеримых множеств. Пусть теперь два множества $A, B \in \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда существуют $A_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и $B_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ такие, что

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \quad \text{и} \quad B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $A_m \cap B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (A_m \cap B_k)$. Так как $A_m \cap B_k \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, то множество $A_m \cap B \in \mathfrak{M}(\mu)$. Так как

$$\mu^*(A_m \cap B) \leqslant \mu^*(A_m) < +\infty,$$

то множество $A_m \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ как μ-измеримое множество с конечной внешней мерой. Следовательно,

$$A_m \setminus B = A_m \setminus (A_m \cap B) \in \mathfrak{M}_F(\mu).$$

Но тогда $A \setminus B = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (A_m \setminus B) \in \mathfrak{M}(\mu)$. Таким образом, доказано, что множество $\mathfrak{M}(\mu)$ является σ-кольцом.

г) Докажем регулярность функции μ^* на sg-кольце $\mathfrak{M}(\mu)$. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует покрытие $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{E}$ открытыми элементарными множествами такими, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m) < \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Определим открытое множество $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \supset E$. Тогда

$$\mu^*(G) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m) < \mu^*(E) + \varepsilon,$$

т. е.

$$\mu^*(G \setminus E) = \mu^*(G) - \mu^*(E) < \varepsilon.$$

Для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ существует последовательность конечно μ-измеримых множеств E_m таких, что $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого номера m существует открытое множество $G_m \supset E_m$ такое, что выполнено неравенство

$$\mu^*(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Определим открытое множество $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m \supset E$. Тогда $G \setminus E \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (G_m \setminus E_m)$, поэтому получаем неравенство

$$\mu^*(G \setminus E) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(G_m \setminus E_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ справедливо включение $E' = \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $S \supset E'$ такое, что $\mu^*(S \setminus E') < \varepsilon$. Поэтому множество $F = E'$ является замкнутым и $F \subset E$. При этом справедливы равенства $E \setminus F = F' \setminus E' = S \setminus E'$. Следовательно, $\mu^*(E \setminus F) < \varepsilon$, т. е. регулярность функции μ^* на $\mathfrak{M}(\mu)$ доказана. ►

Определение 3.10. Любое множество σ-кольца $\mathfrak{M}(\mu)$ будем называть *μ-измеримым по Лебегу*, а значение функции μ^* на этом множестве будем называть *его мерой Лебега*. Функцию μ^* будем называть *мерой Лебега*.

2. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством лебеговой меры нуль, если $\mu^*(A) = 0$. Доказать, что такие множества принадлежат $\mathfrak{M}_F(\mu)$.

Указание. Рассмотрим последовательность $(A_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{E}$, где $A_m = \varnothing$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда $d(A, A_m) = d(A, \varnothing) = \mu^*(A) = 0$. ▶

3. Доказать, что любое подмножество лебеговой меры нуль само является μ-измеримым по Лебегу и имеет лебегову меру нуль, а все множества лебеговой меры нуль образуют σ-кольцо.

Указание. Если $B \subset A$ и $\mu^*(A) = 0$, то $0 \leqslant \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) = 0$, т. е. $\mu^*(B) = 0$. Если последовательность $(A_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ такова, что $\mu^*(A_m) = 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$, то $\mu^*\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m\right) \leqslant \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m) = 0$. ▶ σ-кольцо множеств лебеговой меры нуль обозначим через $\mathfrak{M}_0(\mu)$.

4. Доказать, что мера Лебега μ^* является полной на σ-кольце $\mathfrak{M}(\mu)$.

5. Пусть $\mathfrak{E}$ — кольцо элементарных множества пространства $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) и μ — а. ф. м. на $\mathfrak{E}$, определенная в упражнении 1. Доказать, что $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}(\mu)$.

Указание. Известно (см. [2]), что всякое открытое множество из $\mathbb{R}^n$ представимо в виде счетного объединения открытых прямоугольников, а любое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$ есть дополнение некоторого открытого множества. Теперь очевидно, что $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}(\mu)$. ▶

6. Доказать, что всякое μ-измеримое по Лебегу множество представляет собой объединение борелевского множества и множества лебеговой меры нуль.

Указание. Так как μ^* — регулярная мера на $\mathfrak{M}(\mu)$, то для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ и любого $m \in \mathbb{N}$ существуют замкнутое множество F_m и открытое множество G_m такие, что $E_m \subset E \subset G_m$ и

$$\mu^*(E \setminus F_m) < \frac{1}{m}, \quad \mu^*(G_m \setminus E) < \frac{1}{m}$$

Тогда

$$A \doteqdot \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\,, \quad B \doteqdot \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\,,$$

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\colon\ \ \mu^*(B \setminus E) \leqslant \mu^*(G_m \setminus F) < \frac{1}{m},$$

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\colon\ \ \mu^*(E \setminus A) \leqslant \mu^*(E \setminus F_m) < \frac{1}{m}.$$

Следовательно, $\mu^*(B \setminus E) = \mu^*(E \setminus A) = 0$, т. е. $B \setminus E \in \mathfrak{M}_0(\mu)$ и $E \setminus A \in \mathfrak{M}_0(\mu)$, а $E = A \cup (E \setminus A)$. ►

7. Пусть $\mathfrak{E}$ — кольцо элементарных множеств в $\mathbb{R}^n$, а μ — ф. м., определенная в упражнении 1. Доказать, что для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$, вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и скаляра $t \neq 0$ имеет место $x + tE \in \mathfrak{M}(\mu)$ и $\mu^*(x + tE) = |t|^n \mu^*(E)$.

Указание. Очевидно, что

$$\forall A \in \mathfrak{E}\colon\ \ x + tA \in \mathfrak{E} \ \text{ и } \ \mu(x + tA) = |t|^n \mu(A).$$

Нетрудно показать, что

$$\forall E \subset \mathbb{R}^n\colon\ \ \mu^*(x + tE) = |t|^n \mu^*(E).$$

Далее, так как

$$\forall E \in \mathfrak{M}_F(\mu)\colon\ (x+tE) \vartriangle (x+tA_m) = x + t(E \vartriangle A_m),$$

где $(A_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{E}$ и $d(E, A_m) \to 0$, то

$$d\big(x+tE, x+tA_m\big) = \mu^*\big(x + t(E \vartriangle A_m)\big) = |t|^n d(E, A_m) \to 0,$$

т. е. $x + tE \in \mathfrak{M}(\mu)$. Учитывая, что для произвольного $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ существует последовательность $(E_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_F(\mu)$, что $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$, получим

$$x + tE = x + t\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \bigcup_{m=1}^{\infty}(x + tE_m) \in \mathfrak{M}(\mu).$$

►

8. Пусть $\mathfrak{E}$ — кольцо элементарных множеств в $\mathbb{R}^n$, а μ — ф. м., определенная в упражнении 1. Доказать, что для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ положительной меры Лебега (т. е. $\mu^*(E) > 0$) существует его неизмеримое подмножество $A \subset E$, $A \notin \mathfrak{M}(\mu)$ (см., например, [4, 10]).

9. Показать, что отношение $d(A, B) \doteqdot \mu(A \vartriangle B) = 0$ в $2^{\mathbb{R}^n}$ — отношение эквивалентности, а $(\widetilde{\mathfrak{E}}, d)$ и $(\widetilde{\mathfrak{M}_F}(\mu), d)$ — метрические пространства, где $\widetilde{\mathfrak{E}}$ и $\widetilde{\mathfrak{M}_F}(\mu)$ — множества всех классов эквивалентности, содержащих элементы соответственно множества $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}_F(\mu)$ (см. условия упражнения 1).

10. Пусть $Bx = Ax + b$ — ограниченное преобразование линейного пространства $\mathbb{R}^n$, где $b \in \mathbb{R}^n$ и A есть линейное преобразование с определителем, не равным нулю $\det A \neq 0$. Доказать, что для всех измеримых множества $E \subseteq \mathbb{R}^n$ справедлива формула:

$$\mu\big(B(E)\big) = \big|\det A\big| \cdot \mu(E),$$

где μ — классическая мера Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Указание. Использовать известное из курса линейной алгебры равенство $\mu\big(B(\Pi)\big) = \big|\det A\big| \cdot \mu(\Pi)$, где Π — n-мерный прямоугольник. ▶

Глава III

Функции ограниченной вариации вещественной переменной и некоторые их приложения

§ 1. Предварительные сведения из анализа

Определение 1.1. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}$ — открытое множество и X — метрическое пространство (сокращенно МП). Точка $t_0 \in G$ называется *точкой разрыва первого рода* для отображения $f\colon G \to X$, если существуют конечные пределы

$$f(t_0-0) \doteqdot \lim_{t<t_0,\, t\to t_0} f(t), \quad f(t_0+0) \doteqdot \lim_{t>t_0,\, t\to t_0} f(t)$$

и эти пределы одновременно не равны $f(t_0)$.

Если f непрерывно или имеет разрыв первого рода в точке t_0, то

$$w(t_0)) \doteqdot \max\left\{\rho\big(f(t_0), f(t_0-0)\big), \rho\big(f(t_0), f(t_0+0)\big), \rho\big(f(t_0-0), f(t_0+0)\big)\right\}$$

называется *колебанием* f в точке t_0.

Если X — линейное нормированное пространство (сокращено ЛНП), то

$$f(t_0+0) - f(t_0-0) \in X$$

называется *скачком* f в точке t_0.

Отметим, что

$$w(t_0) = 0 \iff \lim_{G\ni t\to t_0} f(t) = f(t_0).$$

Скачок f в точке t_0 может быть нулем даже в том случае, когда f *разрывно*: значения $f(t_0-0)$ и $f(t_0+0)$ могут быть равны между собой, но не равны $f(t_0)$. Ясно, что отображение f, разрывное в точке t_0, не обязано иметь в этой точке разрыв первого рода, ибо пределы $f(t_0-0)$ и $f(t_0+0)$ не обязательно должны существовать. Например, функция равная $\sin\frac{1}{t}$ для $t \neq 0$ и равная 0 для $t = 0$, разрывна в точке 0, но не имеет в этой точке разрыв первого рода.

Предложение 1.1. *Пусть $G \subseteq \mathbb{R}$ — открытое множество, X — МП. Если $f\colon G \to X$ имеет лишь точки непрерывности и точки разрыва первого рода, то она непрерывна всюду, кроме не более чем счетного множества точек множества G.*

◀ Ограничимся доказательством для случая $G = \mathbb{R}$. Пусть $c \in \mathbb{R}$ — произвольная точка. Колебание $w(c)$ в точке c может быть каким угодно. Однако

$$\lim_{t\to c} w(t) = 0.$$

В самом деле, по определению $f(c+0)$, имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \alpha > 0\, \forall\, t \in (c, c+\alpha)\colon \rho\big(f(t), f(c+0)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\forall \xi, \eta \in (c, c+\alpha)\colon$$
$$\rho\big(f(\xi), f(\eta)\big) \leqslant \rho\big(f(\xi), f(c+0)\big) + \rho\big(f(c+0), f(\eta)\big) \leqslant \varepsilon.$$

Полагая $\xi = t$ и устремляя $\eta \to t+0$, а затем устремляя $\eta \to t-0$, получим

$$\rho\big(f(t+0), f(t)\big) \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad \rho\big(f(t-0), f(t)\big) \leqslant \varepsilon.$$

Устремляя $\xi \to t-0$ и $\eta \to t+0$ получим

$$\rho\big(f(t-0), f(t+0)\big) \leqslant \varepsilon.$$

Откуда окончательно находим $w(t) \leqslant \varepsilon$ для $c < t < c + \alpha$. Действуя точно так же слева от точки c, можно убедиться, что утверждение верно и в этом случае.

Рассмотрим теперь отрезок $[-n, n]\,(n \in \mathbb{N})$. Множество точек этого отрезка, в которых колебание $\geqslant \frac{1}{k}$, необходимо конечно. В самом деле, если бы это было не так, то можно было бы найти бесконечную последовательность точек разрыва в этом отрезке, в которых колебание было бы $\geqslant \frac{1}{k}$. Поскольку отрезок $[-n, n]$ компактен, из рассматриваемой последовательности можно извлечь такую последовательность, которая сходилась бы к некоторой точке c этого отрезка и состояла бы из точек, отличных от точки c. Согласно только что доказанному, колебание в этих точках всюду $\geqslant \frac{1}{k}$ и должно стремиться к 0, а это невозможно. Таким образом, множество точек отрезка $[-n, n]$, в которых колебание $\geqslant \frac{1}{k}$, заведомо конечно. Если взять объединение этих особых точек для $k = 1, 2, \ldots$, то мы увидим, что множество точек t отрезка $[-n, n]$, в которых колебание $w(t) > 0$, не более чем счетно и, следовательно, на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ множество таких точек, являясь объединением счетного множества не более чем счетных множеств, не более чем счетно. В каждой другой точке t, не принадлежащей этому не более чем счетному множеству, $w(t) = 0$ и f — непрерывное отображение. ▶

Определение 1.2. Функция, определенная на части прямой $\mathbb{R}$ со значениями в топологическом пространстве X и имеющая только точки непрерывности или точки разрыва первого рода, называется *правильной.*

Согласно 1.1, если пространство X метризуемо, то правильная функция непрерывна всюду за исключением, быть может, не более чем счетного множества особых точек.

Если X является топологическим метризуемым пространством, то отображение $f\colon \mathbb{R} \to X$, может быть произвольным и всюду разрывным ([7]).

Замечание 1.1. Множество точек разрыва правильного отображения $f\colon \mathbb{R} \to X$, где X — МП, может быть всюду плотным, а скачок его (но не колебание!) повсюду равен нулю (см. упражнение 1).

Пусть вещественная функция f, определенная на конечном или нет промежутке $J \subseteq \mathbb{R}$[1],монотонна, т. е. $f\colon J \to \mathbb{R}$ является возрастающей или убывающей функцией на J. Такая функция не обязательно непрерывна, но она обладает пределом справа $f(x+0)$ и пределом слева $f(x-0)$ в каждой внутренней точке $x \in J$. Так, например, если f возрастает, то

$$f(x_0+0) = \inf_{x>x_0} f(x), \ \ f(x_0-0) = \sup_{x<x_0} f(x) \ \text{ и}$$

$$f(x_0-0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+0),$$

а скачок в точке x_0 не отрицателен.

Оба предела $f(x-0)$ и $f(x+0)$ не обязательно равны между собой или равны $f(x)$.

Таким образом, *монотонная функция является правильной и, применяя предложение 1.1, получаем, что такая функция всюду непрерывна, за исключением не более чем счетного множества точек разрыва первого рода.*

---

[1] Промежуток J может быть открытым, полуоткрытым или замкнутым

Для дальнейшего напомним, что, по определению, функция $f\colon J \to \mathbb{R}$ (не обязательно монотонная) непрерывна справа (соотв. слева) в точке $x_0 \in J$, если $f(x_0) = f(x_0+0)$ (соотв. $f(x_0) = f(x_0-0)$). Если функция f непрерывна справа (соотв. слева) в каждой точке промежутка J, то она называется непрерывной справа (соотв. слева) на J.

Отметим, что для монотонной функции $f\colon [\,a,b) \to \mathbb{R}$ (соотв. $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$), где $a \geqslant -\infty$ и $b \leqslant +\infty$, можно говорить о непрерывности справа на $[\,a,b)$ (соотв. слева на $(a,b]$).

Замечание 1.2. Существуют строго возрастающие функции, которые односторонне непрерывны всюду и имеют счетные всюду плотные множества точек разрыва (см. упражнение 1.2).

Существуют непрерывные функции,которые не дифференцируемы ни в одной точке (см., например, [7, 10]), тогда как любая монотонная функция дифференцируема почти всюду. Это утверждение, одно из самых замечательных и важных в анализе, известно как теорема Лебега ([6]). Ниже приведены формулировка теоремы Лебега и доказательство следствия этой теоремы (т. е. теоремы Фубини о почленном дифференцировании ряда с монотонными членами).

Теорема 1.1 (Лебег). *Любая монотонная функция $f(x)$ имеет определенную конечную производную всюду, кроме, быть может, некоторого множества значений x меры нуль (иначе говоря, почти всюду).*

Следствие 1.1 (Теорема Фубини). *Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots$ — неубывающие (невозрастающие) функции на отрезке $[a,b]$ и ряд*

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots = s(x)$$

сходится на $[a, b]$. Тогда для всех x, за исключением, быть может, множества множества меры нуль

$$f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots = s'(x),$$

т. е. сходящийся ряд неубывающих (невозрастающих) функция можно почти всюду дифференцировать почленно.

◀ Не нарушая общности, можно предположить, что все функции $f_n(x)$ равны нулю при $x = a$. Для определенности предположим еще, что все $f_n(x)$ — неубывающие функции. Пусть

$$s_n(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} f_k(x); \quad s_n(x) \to s(x).$$

Ясно, что $s(x)$ — неубывающая функция, а потому все функции $f_n(x)$, $s_n(x)$ и $s(x)$ имеют конечные производные всюду, за исключением множества меры нуль — объединение счетного набора множеств меры нуль тех точек, в которых $f_n(x)$ и $s(x)$ не имеют производных. Рассмотрим множество E полной меры, на котором существуют все $f_n'(x)$ и $s'(x)$. При $x \in E$ и любом ξ мы имеем:

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f_n(\xi) - f_n(x)\right]}{\xi - x} = \frac{s(\xi) - s(x)}{\xi - x}.$$

Так как слагаемые в левой части неотрицательны, то при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{k}\left[f_n(\xi) - f_n(x)\right]}{\xi - x} \leqslant \frac{s(\xi) - s(x)}{\xi - x}.$$

Переходя к пределу при $\xi \to x$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{k} f'_n(x) \leqslant s'(x),$$

откуда, устремляя $k \to \infty$ и учитывая, что все $f'_n(x)$ неотрицательны, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \leqslant s'(x),$$

Покажем, что в действительности при всех $x \in E$ здесь имеет место равенство. Так как $s'_n(x)$ образуют неубывающую последовательность, о соотношение $s'(x) - s'_n(x) \to 0$ достаточно проверить для какой–нибудь частичной последовательности номеров $n_1, n_2, \ldots$. Эту последовательность выберем так, чтобы ряд, составленный из разностей $s(b) - s_{n_k}(b)$, был сходящимся; при этом, так как

$$s(x) - s_{n_k}(x) \leqslant s(b) - s_{n_k}(b)$$

(ибо $s(x) - s_{n_k}(x) = \sum\limits_{j>n_k} f_j(x)$ — неубывающая функция), то будет сходится и ряд из $s(x) - s_n(x)$; можно, например, выбрать n_k так, чтобы выполнялись неравенства

$$s(x) - s_{n_k}(x) < \frac{1}{2^k}.$$

Тогда ряд,составленный из разностей $s(x) - s_{n_k}(x)$, будем такого же типа, что и исходный ряд (он даже сходится равномерно); поэтому ряд, полученный его почленным дифференцированием, сходится почти всюду на $[a, b]$ и, следовательно, почти всюду $s'(x) - s'_{n_k}(x) \to 0$. ►

Остановимся на некоторых свойствах абсолютно непрерывной функции, используемых в пособии. Сначала отметим следующее очевидное утверждение.

Утверждение 1.1. *Для функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ следующие предложения эквивалентны:*

(i) Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой конечной системы дизъюнктных интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ из $[a, b]$ такой, что $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ выполняется неравенство:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left[f(b_k) - f(a_k)\right]\right| < \varepsilon \quad \text{или, эквивалентно,}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k) - f(a_k)\right| < \varepsilon.$$

(ii) Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой последовательности дизъюнктных интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ из $[a, b]$ такой, что $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$ выполняется неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|f(b_k) - f(a_k)\right| < \varepsilon.$$

Определение 1.3. Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной* (обозначение: $f \in \mathrm{AC}([a,b])$), если для f справедливо предложение (i) или (ii) утверждения 1.1.

Отметим, что если $\mathrm{Lip}_{(1)}([a,b])$ — класс функций Липшица с показателем 1, т. е.

$$\mathrm{Lip}_{(1)}([a,b]) \doteqdot \left\{ f \in \mathrm{C}_{([a,b])} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, M(f) \in \mathbb{R}\ \forall \big(x', x'' \in [a,b]\big): \\ |f(x') - f(x'')| \leqslant M(f)|x' - x''| \end{array} \right\}$$

то $\mathrm{Lip}_{(1)}([a,b]) \subset \mathrm{AC}([a,b])$ и $\mathrm{Lip}_{(1)}([a,b]) \neq \mathrm{AC}([a,b])$ (см. упражнение 1).

Лемма 1.1. *Пусть* $f, g \in \mathrm{AC}([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\alpha f + \beta g \in \mathrm{AC}([a,b])$ *и* $f \cdot g \in \mathrm{AC}([a,b])$. *Если, вдобавок, функция* g *не обращается в нуль на* $[a,b]$, *то* $\frac{1}{g} \in \mathrm{AC}([a,b])$.

◀ Утверждение $\alpha f + \beta g \in \mathrm{AC}([a,b])$ очевидно. Остальные два утверждения следуют из

$$\begin{gathered} \big|f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k)\big| \leqslant \\ \leqslant |g(b_k) \cdot |f(b_k) - f(a_k)| + |f(a_k)| \cdot |g(b_k) - g(a_k)| \leqslant \\ \leqslant B \cdot |f(b_k) - f(a_k)| + A \cdot |g(b_k) - g(a_k)|, \end{gathered}$$

где A и B — верхние границы $|f|$ и $|g|$ соответственно, и

$$\left| \frac{1}{g(b_k)} - \frac{1}{g(a_k)} \right| \leqslant \frac{|g(b_k) - g(a_k)|}{\sigma^{-2}},$$

где $g(x) \geqslant \sigma > 0$ на $[a, b]$. ►

Лемма 1.2. *Сходящийся ряд положительных неубывающих абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций представляет абсолютно непрерывную функцию.*

◄ Пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ — ряд, удовлетворяющий условиям леммы и $f(x)$ — его сумма на $[a, b]$. Пусть, далее, $\{(a_k, b_k)\}$ — конечная или счетная система неналегающих интервалов отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\sum_k \left[f(b_k) - f(a_k)\right] = \sum_k \left[\sum_{i=1}^{\infty} f_i(b_k) - \sum_{i=1}^{\infty} f_i(a_k)\right] =$$

$$= \sum_k \sum_{i=1}^{\infty} \left[f_i(b_k) - f_i(a_k)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_k \left[f_i(b_k) - f_i(a_k)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_k \left[f_i(b_k) - f_i(a_k)\right] + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_k \left[f_i(b_k) - f_i(a_k)\right].$$

Второе слагаемое правой части не превосходит

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_k \left[f_i(b) - f_i(a)\right]$$

и может быть сделано сколь угодно малым путем выбора n достаточно большим, первое слагаемое (если n уже выбрано) стремится к нулю вместе с $\sum\limits_k (b_k - a_k)$. Следовательно, функция f абсолютно непрерывна на $[a, b]$. ▶

Приведем без доказательства критерий абсолютной непрерывности функции.

Теорема 1.2.

$$\Big(f \in \mathrm{AC}\,([a, b])\Big) \iff \Big(\exists \varphi \in \mathrm{L}([a, b])\colon f(x) = f(a) + \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt\Big)$$

и при этом $f'(x) = \varphi(x)$ при почти всех $x \in [a, b]$. (Здесь $\mathrm{L}([a, b])$ — пространство всех суммируемых по Лебегу на $[a, b]$ функций).

Лемма 1.3. (О постоянстве абсолютно непрерывной монотонной функции). *Если производная абсолютно непрерывной монотонной функции f равна нулю почти всюду, то $f = const$.*

◀ Пусть $f \in \mathrm{AC}\,([a, b])$ и для определенности f монотонно не убывает на $[a, b]$. Тогда ее множество значений есть отрезок $[f(a), f(b)]$. Покажем, что длина этого отрезка равна нулю, если $f'(x) = 0$ почти всюду. Тем самым лемма будет доказана. Положим

$$E \doteqdot \{\, x \in [a, b] \mid f'(x) = 0 \,\} \quad \text{и} \quad Z \doteqdot [a, b] \setminus E.$$

По условию $\mu(Z) = 0$. (Здесь μ — классическая мера Лебега). Выберем некоторое $\varepsilon > 0$, найдем то δ, которое отвечает этому ε в силу абсолютной непрерывности функции f, и заключим Z в открытое множество, мера которого меньше δ (это возможно, поскольку $\mu(Z) = 0$). Иначе говоря, Z покрывается конечной или счетной системой интервалов (a_k, b_k), сумма длин которых меньше δ. В соответствии с выбором δ получаем

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Следовательно, вся система интервалов (a_k, b_k) (а тем более и заключенное в их объединение множество Z) переводится функцией f в множество, мера которого меньше ε. Таким образом, $\mu\big(f(Z)\big) = 0$.

Рассмотрим теперь множество $E = [a, b] \setminus Z$. Пусть $x_0 \in E$ Тогда, поскольку $f'(x_0) = 0$, для всех x, достаточно близких к x_0, выполнено неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \varepsilon,$$

Т.е. (мы считаем для определенности $x > x_0$)

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon(x - x_0),$$

или

$$\varepsilon x_0 - f(x_0) < \varepsilon x - f(x).$$

Лемма доказана. ▶

Таким образом, x_0 есть точка невидимая справа для функции $g(x) = \varepsilon x - f(x)$. Следовательно, по лемме Рисса о множестве невидимых точек (см., например, [9]), множество E содержится в конечной или счетной системе непересекающихся интервалов (α_k, β_k), в которых выполняются условия

$$\varepsilon\beta_k - f(\beta_k) \geqslant \varepsilon\alpha_k - f(\alpha_k),$$

т. е.

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leqslant \varepsilon(\beta_k - \alpha_k),$$

откуда

$$\sum_k \left[f(\beta_k) - f(\alpha_k)\right] \leqslant \varepsilon \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Иначе говоря, множество E переводится функцией f в множество, покрывающееся системой интервалов, сумма длин которых меньше $\varepsilon(b-a)$. Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $\mu\big(f(E)\big) = 0$. Итак, $\mu\big(f(E)\big) = 0 = \mu\big(f(Z)\big)$. Остается заметить, что $[a, b] = E \sqcup Z$.

Замечание 1.3. В лемме 1.3 условие абсолютной непрерывности монотонной функции существенно, — существует непрерывная монотонная функция, не постоянная ни в каком интервале и имеющая производную почти всюду равную нулю (см., например, [6, 9]).

Важным понятием, используемом в дальнейшем, является понятие функции скачков. Приведем его общее определение.

Определение 1.4. Пусть $\{x_n\}$ — какое-нибудь конечное или счетное множество точек промежутка (a, b), а u_n, v_n — вещественные числа такие, что $|u_n| + |v_n| > 0$ и $\sum_n \big(|u_n| + |v_n|\big) < \infty$. Функция

$$s(x) \doteqdot \sum_{x_n \leqslant x} u_n + \sum_{x_n < x} v_n$$

называется *функцией скачков* (с соответствующими параметрами $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$).

В силу условия $\sum_n (|u_n| + |v_n|) < \infty$ функцию скачков $s(x)$ можно записать в виде суммы сходящегося ряда

$$s(x) = \sum_n f_n(x),$$

где

$$f_n(x) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_n; \\ u_n & \text{при } x = x_n; \\ u_n + v_n & \text{при } x > x_n. \end{cases}$$

Отметим, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ в точке x_n функция $f_n(x)$ имеет левый и правый скачки, равные соответственно u_n и v_n, а в остальных точках f_n непрерывна. Это же верно и для функции $s(x)$, т. е. справедливо следующее предложение, доказательство которого заимствовано из [6], с. 24–25.

Предложение 1.2. *В точках x_n функция $s(x)$ имеет левые и правые скачки, равные соответственно u_n и v_n, а в остальных точках она непрерывна.*

◀ Положим

$$U \doteqdot \sum_n (|u_n| + |v_n|).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $N \subset \mathbb{N}$ выбрано так, чтобы

$$U - \sum_{n=1}^{N} (|u_n| + |v_n|) < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Это возможно в силу условия $\sum_n (|u_n| + |v_n|) < +\infty$. Возьмем такое разбиение интервала (a, b) (напомним, что $\{x_n\} \subset (a, b)$), чтобы каждый замкнутый частичный интервал $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ содержал одну и только одну из точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и эта последняя совпадала бы с α или β. Для частичных интервалов вида (α, x_r) будем иметь

$$|s(x_r) - s(\alpha) - u_r| < \varepsilon$$

(это следует из определения $s(x)$ и неравенства (1.1)); заставляя стремится α к x_r, получим в пределе

$$|s(x_r) - s(x_r - 0) - u_r| \leqslant \varepsilon.$$

Это неравенство верно для $r = 1, 2, \ldots, N$, а так как выбор ε ограничивает N только снизу, то оно оказывается справедливым для всех r. В силу того, что ε было выбрано произвольно, мы получаем

$$s(x_r) - s(x_r - 0) = u_r \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Подобным же образом можно получить равенство

$$s(x_r + 0) - s(x_r) = v_r \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Те же рассуждением можно воспользоваться при рассмотрении точки x, отличной от всех x_n. Нужно только множество $\{x_n\}$ дополнить точкой x, поставив ей в соответствие числа u и v, равные 0. От этого функция $s(x)$ не изменится, и мы получим равенства $s(x) - s(x - 0) = s(x + 0) - s(x) = 0$, означающие, что x является точкой непрерывности функции. ►

Следствие 1.2. *Если в условиях предложения 1.2 все числа* $u_n \geqslant 0$ *и* $v_n \geqslant 0$, *то функция скачков* $s(x)$ *не убывает и* $s'(x) = 0$ *почти всюду.*

◀ Ясно, что в рассматриваемом случае каждая из функций $f_n(x)$ не убывает и $f_n'(x) = 0$ почти всюду, кроме точки $x = x_n$. Тогда из $s(x) = \sum_n f_n(x)$ следует, что $s(x)$ — неубывающая функция, а из следствия 1.1 (= теоремы Фубини) получаем $s'(x) = 0$ почти всюду. ▶

Замечание 1.4. Утверждение $s'(x) = 0$ следствия 1.2 справедливо и в общем случае, когда u_n и v_n — числа произвольных знаков, но такие, что

$$\sum_n \left(|u_n| + |v_n|\right) < \infty.$$

Оказывается, что при этом функция скачков $s(x)$ представляет собой функцию ограниченной вариации (т. е. функцию, представимой в виде разности двух неубывающих функций) с тем же множеством точек $\{x_n\}$ разрыва и с $|u_n|, |v_n|$ вместо u_n и v_n.

Среди монотонных функций простейшими являются функции скачков. Для такой функции точки разрыва не обязаны быть изолированными и могут образовывать всюду плотное множество (см. упражнение 2 и следствие 1.2).

Для построения монотонно неубывающей функции скачков часто используется следующее предложение.

Предложение 1.3. *Пусть в интервале* (a, b) *задано конечное или счетное число точек* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *и пусть каждой из них поставлено* *в соответствие положительное число h_n, причем $\sum_n h_n < \infty$. Положим*

$$\varphi(x) \doteqdot \sum_{x_n<x} h_n, \quad x \in (a,b).$$

Функция φ монотонно не убывает и она непрерывна слева в каждой точка (a,b), а совокупность ее точек разрыва совпадает с множеством $\{x_n\}$, причем скачок в точке x_n равен h_n.

◀ Ясно, что φ — неубывающая функция. Далее,

$$\varphi(x-0) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \varphi(x-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{x_n<x-\varepsilon} h_n,$$

но так как каждое x_n, удовлетворяющее условию $x_n < x$, удовлетворяет и условию $x_n < x-\varepsilon$ при достаточно малом ε, то последний предел равен

$$\sum_{x_n<x} h_n = \varphi(x),$$

Таким образом, $\varphi(x-0) = \varphi(x)$.

Если точка x совпадает с одной из точек x_n, скажем, $x = x_{n_0}$, то

$$\varphi(x_{n_0}+0) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \varphi(x_{n_0}+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{x_n<x_{n_0}+\varepsilon} h_n = \sum_{x_n\leqslant x_{n_0}} h_n.$$

т. е.

$$\varphi(x_{n_0}+0) - \varphi(x_{n_0}-0) = h_{n_0}.$$

Наконец, если $x \in (a,b)$ не совпадает ни с одной из точек x_n, то в ней функция φ непрерывна. Это очевидно. ▶

Замечание 1.5. Если в предложении 1.3 вместо функции φ рассматривать функцию скачков

$$\psi(x) \doteqdot \sum_{x_n \leqslant x} h_n \quad x \in (a,b),$$

то она не убывает, непрерывна справа на (a,b), совокупность ее точек разрыва совпадает с множеством $\{x_n\}$, причем скачок в точке x_n равен h_n. Доказательство аналогично доказательству предложения 1.3.

Замечание 1.6. В силу условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n < \infty$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно записать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cdot \theta_1(x - x_n) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cdot \theta_2(x - x_n),$$

где $x \in (a,b)$ и

$$\theta_1(\xi) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{при } \xi \leqslant 0; \\ 1 & \text{при } \xi > 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \theta_2(\xi) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0; \\ 1 & \text{при } \xi \geqslant 0. \end{cases}$$

($\theta_1(\xi)$ и $\theta_2(\xi)$ — функции Хевисайда). Следовательно, учитывая, что

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \big(h_n \cdot \theta_1(x - x_n)\big)' = 0, \ \big(h_n \cdot \theta_2(x - x_n)\big)' = 0$$

при почти всех $x \in (a,b)$, из следствия 1.1 получим $\varphi'(x) = 0$ и $\psi'(x) = 0$ при почти всех $x \in (a,b)$.

Замечание 1.7. Если $\{x_n\} \subset [a,b]$ и $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $x_n \neq b$, то совокупность точек разрыва функции $\varphi(x)$ на $[a,b]$ совпадает с множеством $\{x_n\}$, поскольку $x_n = b$ не участвует в определении $\varphi(x) \doteqdot \sum\limits_{x_n<x} h_n$. Чтобы учесть скачок функции $\varphi(x)$ в точке b, надо вместо $\{x_n\} \subset [a,b]$ требовать $\{x_n\} \subset [a, b+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Отметим, что простейший тип функций скачков — ступенчатые функции, у которых точки разрыва можно расположить в монотонную последовательность $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \ldots$.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.4. *Всякую монотонную функцию, непрерывную слева, можно представить как сумму непрерывной монотонной функции и функции скачков (непрерывной слева) и притом единственным образом.*

◀ Пусть f — неубывающая непрерывная слева функция и $x_1, x_2, \ldots$ — все ее точки разрыва, а $h_1, h_2, \ldots$ — ее скачки в этих точках. Положим $g = f - \varphi$, где

$$\varphi(x) = \sum_{x_n<x} h_n.$$

Рассмотрим разность

$$g(x'') - g(x') = \big[f(x'') - f(x')\big] - \big[\varphi(x'') - \varphi(x')\big],$$

где $x' < x''$. Здесь справа стоит разность между полным приращением функции f на отрезке $[x', x'']$ и суммой ее скачков на этом отрезке.

Ясно, что $g(x'') - g(x') \geqslant 0$, т. е. g — неубывающая функция. Далее, для произвольной точки x^* имеем

$$g(x^* - 0) = f(x^* - 0) - \varphi(x^* - 0) = f(x^* - 0) - \sum_{x_n < x^*} h_n,$$

$$g(x^* + 0) = f(x^* + 0) - \varphi(x^* + 0) = f(x^* + 0) - \sum_{x_n \leqslant x^*} h_n,$$

откуда

$$g(x^* + 0) - g(x^* - 0) = f(x^* + 0) - f(x^* -) - h^* = 0$$

(где h^* — скачок функции φ в точке x^*). Отсюда и из непрерывности f и φ слева вытекает, что g действительно непрерывна. ▶

По схеме доказательства предложения 1.4 доказывается следующее предложение.

Предложение 1.5. *Если f —- неубывающая непрерывная справа функция и $x_1, x_2, \ldots$ — все ее точки разрыва, а $h_1, h_2, \ldots$ — ее скачки в этих точках, то функция $g = f - \psi$, где $\psi(x) = \sum\limits_{x_n \leqslant x} h_n$, не убывает и непрерывна. (Здесь $\psi(x)$ — непрерывная справа неубывающая функция скачков (см. замечание 1.5).*

Приведем формулировку леммы Фату (см.[6]), используемую ниже.

Лемма 1.4 (Фату). *Если функции $f_n(x)$ неотрицательные и суммируемые на (a,b), стремятся почти всюду к некоторой функции $f(x)$ и если*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant A,$$

то функция $f(x)$ суммируема и $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant A$.

Предложение 1.6. *Если f — неубывающая функция на отрезке $[a,b]$, то*

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b)-f(a).$$

◀ В силу теоремы 1.1 существует конечная производная $f'(x)$ при почти всех x из $[a,b]$, а в остальных точках доопределим $f'(x)$ произвольным образом. Продолжим f, положив $f(x)=f(a)$ при $x<a$ и $f(x)=f(b)$ при $x>b$, и положим

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\tfrac{1}{n}\right)-f(x)\right],\ \ n=1,2,\ldots$$

Функции f_n, $n=1,2,\ldots$, неотрицательны, измеримы (ибо измеримы функции $f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ и $f(x)$), и $f_n(x)\to f'(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Функция $f'(x)$ на $[a,b]$ (как предел последовательности измеримых функций f_n)

и, очевидно, $f'(x) \geqslant 0$ при почти всех $x \in [a, b]$. Поэтому существует интеграл Лебега

$$(L)\int_a^b f'(x)\,dx.$$

Далее, так как функции $f(x)$, $f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,\dots)$ интегрируемы по Риману, то при любом $f_n(x)$ интегрируемы по Риману функции $f_n(x)$ и, следовательно,

$$(R)\int_a^b f_n(x)\,dx = (L)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Отсюда имеем

$$
\begin{aligned}
&(L)\int\limits_a^b f_n(x)\,dx = (R)\int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \\
&= n\Big[\int\limits_a^b f\big(x+\tfrac{1}{n}\big)\big)\,dx + \int\limits_a^b f(x)\,dx\Big] = \\
&= n\Big[\int\limits_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx\Big] \leqslant \\
&\leqslant n\Big[\int\limits_b^{b+\frac{1}{n}} f(b)\,dx - \frac{1}{n}\inf_{(a,a+\frac{1}{n})} f(x)\Big] = \\
&= f(b) - f(a+0) \leqslant f(b) - f(a).
\end{aligned}
$$

(здесь не потребуется никаких ссылок на теорему о замене переменной в лебеговских интегралах, ибо интегралы можно понимать в смысле Римана).

Применив лемму 1.4 к последовательности $f_1(x), f_2(x), \ldots$ измеримых и неотрицательных функций, сходящихся почти всюду на $[a, b]$ к функции $f'(x)$ и учитывая

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \int\limits_a^b f_n(x)\, dx \leqslant f(b) - f(a)$$

получим

$$\int\limits_a^b f'(x)\, dx \leqslant f(b) - f(a). \qquad \blacktriangleright$$

Замечание 1.8. В условиях предложения 1.6 в формуле

$$\int\limits_a^b f'(x)\, dx \leqslant f(b) - f(a)$$

неравенство нельзя, вообще говоря, заменить на равенство; например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1/2; \\ 1 & \text{при } 1/2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Более того, существует даже непрерывные монотонные функции f, для которых строгое неравенство

$$\int\limits_a^b f'(x)\, dx < f(b) - f(a)$$

выполняется при всех $x > a$ (см., например, [5]).

Лемма 1.5. *Всякая монотонная непрерывная функция f на $[a,b]$ может быть представлена как сумма двух монотонных непрерывных функций g и ψ, где g абсолютно непрерывна, а ψ — так называемая «сингулярная составляющая» функции f — такова, что $\psi'(x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$. Представление $f = g + \psi$ единственно с точностью до аддитивной постоянной.*

◀ Положим для $x \in [a,b]$

$$g(x) \doteqdot \int\limits_a^x f'(t)\,dt, \quad \psi(x) \doteqdot f(x) - g(x).$$

Для определенности рассуждений положим, что f не убывает на $[a,b]$; тогда в силу предложения 1.6 имеем $f' \in \mathrm{L}([a,b])$; поэтому $g \in \mathrm{AC}\,([a,b])$ (см. теорему 1.2). Так как f не убывает на $[a,b]$, то, очевидно, $f' \geqslant 0$ почти всюду на $[a,b]$ и, следовательно, g не убывает на $[a,b]$ и $g'(x) = f'(x)$ при почти всех $x \in [a,b]$. Далее ясно, что $\psi \in \mathrm{C}_{([a,b])}$ и $\psi'(x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$. То, что ψ не убывает на $[a,b]$ следует из

$$\begin{gathered}\forall \big(x', x'' \in [a,b],\ x' < x''\big):\\ \psi(x'') - \psi(x') = \big[f(x'') - f(x')\big] - \big[g(x'') - g(x')\big] =\\ = \big[f(x'') - f(x')\big] - \int_{x'}^{x''} f'(t)\,dt \geqslant 0.\end{gathered}$$

Пусть $f = g + \psi = g_1 + \psi_1$ на $[a, b]$, где функции g_1 и ψ_1 обладают такими же свойствами, что g и ψ. Так как

$$g_1(x) = \int\limits_a^x g_1'(t)\,dt + g_1(a)$$

на $[a, b]$ (см. теорему 1.2), то имеем

$$\int\limits_a^x g_1'(t)\,dt + g_1(a) - \int\limits_a^x f'(t)\,dt = \psi(x) - \psi_1(x) \quad \text{на} \quad [a, b].$$

Отсюда и из условия $\psi'(x) - \psi_1'(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$, получим $g_1'(x) = f'(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Поэтому $g_1(a) = \psi(x) - \psi_1(x)$ на $[a, b]$, т. е. $\psi(x) = g_1(a) + \psi_1(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Очевидно также, что $g = g_1 - g_1(a)$. Теперь ясно, что представление $f = g + \psi$ единственно с точностью до аддитивной постоянной. ▶

Лемма 1.6. *Если функция $f(x)$ не убывает на отрезке $[a, b]$ и $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (a, b)$ — множество всех точек разрыва f, а $s(x)$ — функция скачков для f, т. е. $s(a) \doteqdot 0$ и*

$$s(x) \doteqdot$$
$$\doteqdot [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] + [f(x) - f(x - 0)]$$

при $x \in (a, b]$ (см. упражнение 5). Тогда функция $\varphi = f - s$ не убывает и непрерывна на $[a, b]$.

◀ Если $x > x_0$, то, очевидно,

$$s(x) - s(x_0) \leqslant f(x) - f(x_0), \tag{1.2}$$

и поэтому $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$. Монотонность функции $\varphi(x)$ доказана. Докажем ее непрерывность.

В неравенстве 1.2 перейдем к пределу при $x \to x_0 + 0$. В результате получим неравенство

$$s(x_0 + 0) - s(x_0) \leqslant f(x_0 + 0) - f(x_0). \tag{1.3}$$

С другой стороны, по самому определению,

$$f(x_0 + 0) - f(x_0) \leqslant s(x_0 + 0) - s(x_0) \quad \forall\, x > x_0.$$

Отсюда в пределе при $x \to x_0 + 0$ получаем

$$f(x_0 + 0) - f(x_0) \leqslant s(x_0 + 0) - s(x_0). \tag{1.4}$$

Из неравенств (1.3) и (1.4) следует, что

$$f(x_0 + 0) - f(x_0) = s(x_0 + 0) - s(x_0 + 0) - s(x_0),$$

т. е. $\varphi(x_0 + 0) = \varphi(x_0)$.

Аналогично доказывается, что $\varphi(x_0 - 0) = \varphi(x_0)$. Действительно,

$$s(x_0) - s(x) \leqslant f(x_0) - f(x) \quad \forall\, x < x_0,$$

и поэтому

$$s(x_0) - s(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) - f(x_0 - 0).$$

С другой стороны,

$$f(x_0) - f(x_0 - 0) \leqslant s(x_0) - s(x) \ \ \forall\, x < x_0,$$

и поэтому $f(x_0) - f(x_0 - 0) \leqslant s(x_0) - s(x_0 - 0)$. Следовательно,

$$f(x_0) - f(x_0 - 0) = s(x_0) - s(x_0 - 0). \quad \blacktriangleright$$

Лемма 1.7. *Если $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция, то ее можно представить в виде суммы трех компонент*

$$f(x) = g(x) + \psi(x) + s(x) \tag{1.5}$$

— абсолютно непрерывной функции $g(x)$, сингулярной функции $\psi(x)$ и функции скачков $s(x)$.

◀ Доказательство следует из лемм 1.5 и 1.6. ▶

Замечание 1.9. Нетрудно показать, что каждое из слагаемых в разложении (1.5) определяется самой функцией f однозначно с точностью до константы. Если функции, входящие в равенство (1.5), нормировать, потребовав обращения двух из них в нуль в точке $x = a$, то разложение (1.5) будет уже в точности единственным. Далее, продифференцировав равенство (1.5), мы получим почти всюду

$$f'(x) = g'(x)$$

(поскольку ψ' и s' равны нулю почти всюду). Следовательно, при интегрировании производной от f восстанавливается не сама функция f, а только ее абсолютно непрерывная компонента. Две другие компоненты (ψ и s) при этом «бесследно исчезают».

Упражнения

1. Доказать, что для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где

$$f(x) \doteqdot \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально ;} \\ \frac{1}{q}, & \text{если } x = \frac{p}{q} \text{ — несократимая дробь } (q > 0), \end{cases}$$

множество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ всех рациональных точек является множеством точек разрыва первого рода, точки $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — множеством точек непрерывности. Показать также, что скачок этой функции в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ равен нулю.

2. Пусть $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ — множество всех рациональных чисел и $h\colon \mathbb{Q} \to (0, +\infty)$ такая функция, что $\sum\limits_{r \in \mathbb{Q}} h(r) < +\infty$. (Здесь $\sum\limits_{r \in \mathbb{Q}} h(r)$ — ряд со счетным множеством членов $h(r)$, не заданных в определенном порядке). Положим

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ f(x) \doteqdot \sum_{r \in \mathbb{Q}\colon\, r < x} h(r).$$

Показать, что функция f обладает следующими свойствами:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ f(x) > 0$; f строго возрастает;

b) f всюду непрерывна слева;

c) f непрерывна в каждой иррациональной точке;

d) $\mathbb{Q}$ — множество точек разрыва и в точке $r \in \mathbb{Q}$ имеет скачок, равный $h(r)$.

Указание. Очевидно, что если $y < x$, то

$$f(x) - f(y) = \sum_{r\in\mathbb{Q}:\ y\leqslant r<x} h(r). \tag{1.6}$$

Пусть $a \in \mathbb{R}$ — произвольное число и $\varepsilon > 0$. Поскольку сумма $\sum\limits_{r\in\mathbb{Q}} h(r)$ сходится, то $\exists\{r_0, r_1, \dots, r_n\} \subset \mathbb{Q}$, что

$$\sum_{\substack{r\in\mathbb{Q}:\\ r\neq r_0,r_1,\dots,r_n}} h(r) \leqslant \varepsilon.$$

При этом существует такое число $\eta > 0$, что $x \neq r_0, r_1, \dots, r_n$ для $a - \eta \leqslant x \leqslant a + \eta,\ x \neq a$. В силу (1.6) имеем

$$f(a) \geqslant f(x) \leqslant f(a) - \varepsilon \ \text{ для } \ a - \eta \leqslant x < a,$$
$$f(a) + h(a) \leqslant f(x) \leqslant f(a) + h(a) + \varepsilon \ \text{ для } \ a \leqslant x \leqslant a + \eta$$

при условии, что $h(a) = 0$ в случае иррационального a. Теперь справедливость свойств 2a) –2d) очевидна. ▶

3. Показать, что $\mathrm{Lip}_{(1)}([a,b]) \subset \mathrm{AC}\,([a,b])$ и это включение собственное, т. е. $\mathrm{Lip}_{(1)}([a,b]) \neq \mathrm{AC}\,([a,b])$.

Указание. Если $f \in \mathrm{Lip}_{(1)}([a,b])$ и $\varepsilon > 0$, а $\delta = \varepsilon/M(f)$, где $M(f)$ — коэффициент Липшица функции f, то для любой системы $\{(a_k, b_k)\} \subset$

$[a, b]$ взаимно непересекающихся интервалов имеем

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta \implies$$
$$\implies \sum_k \big|f(b_k) - f(a_k)\big| \leqslant \sum_k M(f) \cdot (b_k - a_k) \leqslant M(f) \cdot \frac{\varepsilon}{M(f)} = \varepsilon.$$

Покажем, что $\mathrm{Lip}_{(1)}([a, b]) \neq \mathrm{AC}\,([a, b])$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln \frac{e}{x}} & \text{при } x \in (0, 1]; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $f \in \mathrm{AC}\,([0, 1])$; однако $f \notin \mathrm{Lip}_{(1)}([0, 1])$. В противном случае существовало бы число $M \in \mathbb{R}$, что

$$\forall\, x', x'' \in [0, 1]\colon \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant M \cdot |x' - x''|.$$

Следовательно, при $x'' = 0$ и $x' = x \in (0, 1]$ имело бы место неравенство

$$\frac{1}{\ln \frac{e}{x}} \leqslant M,$$

чего быть не может, так как $\lim\limits_{x \to)+} x \ln \frac{e}{x} = \infty$. ▶

4. Пусть $J = |a, b| \subseteq \mathbb{R}$, где $a < b$, — конечный или нет промежуток (открытый, замкнутый или полузамкнутый), а $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E \subset J$. Доказать, что в условиях определения 1.4 функцию скачков $s(x)$ можно записать в виде

$$s(x) = \sum_n u_n \chi_{[x_n, b|}(x) + \sum_n v_n \chi_{(x_n, b|}(x), \quad x \in J.$$

Так, например, если $J = [a, b]$, то

$$s(x) = \sum_n u_n \chi_{[x_n, b]}(x) + \sum_n v_n \chi_{(x_n, b]}(x), \quad x \in [a, b].$$

5. Пусть f — монотонно неубывающая функция на $[a, b]$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество всех точек разрыва $f(x)$ на $[a, b]$. Определим функцию $s(x)$ следующим образом:

$$s(x) \doteqdot$$
$$\doteqdot \begin{cases} 0 & \text{при } x = a; \\ \sum\limits_{\substack{n:\\ x_n < x}} \big[f(x_n + 0) - f(x_n - 0)\big] + \big[f(x) - f(x - 0)\big] & \text{при } x \in (a, b]. \end{cases}$$

Доказать, что $s(x)$ — корректно определенная функция скачков.

Указание. Функцию $s(x)$ можно представить в виде

$$\sum_{n:\, x_n < x} \big[f(x_n + 0) - f(x_n)\big] + \sum_{n:\, x_n \leqslant x} \big[f(x_n) - f(x_n - 0)\big]$$

и для любого $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \Big\{ \big[f(x_n + 0) - f(x_n)\big] + \big[f(x_n) - f(x_n - 0)\big] \Big\} \leqslant f(b) - f(a).$$

Отсюда следует ограниченность суммы всего ряда, которая и означает корректность определения. ▶

6. Пусть семейство K функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничено, т. е.

$$\exists\, \gamma \in \mathbb{R}\, \forall\, f \in K\colon \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| \leqslant \gamma.$$

Доказать справедливость следующих утверждений.

a) Для любого множества $E \subset [a,b]$ существует последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$, которая сходится в каждой точке E.

b) Если K — семейство неубывающих функций на $[a,b]$, то существует последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$, которая в каждой точке отрезка $[a,b]$ сходится к некоторой неубывающей функции. (это утверждение известно как лемма к теореме Хелли).

Решение. 6a). Пусть $E = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Из ограниченности числового множества $\{\, f(x_1) \,|\, f \in K \,\} \subset \mathbb{R}$ следует, что из него выделяется сходящаяся последовательность $\big(f_n^{(1)}(x_1)\big)_{n=1}^{\infty}$. Так как, по условию, ограничена последовательность $\big(f_n^{(1)}(x_2)\big)_{n=1}^{\infty}$, то из нее выделится сходящаяся последовательность $\big(f_n^{(2)}(x_2)\big)_{n=1}^{\infty}$. Отметим, что взаимный порядок двух функций

$f_n^{(2)}$ и $f_m^{(2)}$ в последовательности $\left(f_n^{(2)}\right)_{n=1}^{\infty}$ такой же, как и в последовательности $\left(f_n^{(1)}\right)_{n=1}^{\infty}$. Продолжая этот процесс неограничено, построим счетное множество сходящихся последовательностей

$$\left(f_n^{(1)}(x_1)\right)_{n=1}^{\infty},\ \left(f_n^{(2)}(x_2)\right)_{n=1}^{\infty},\ \ldots,\ \left(f_n^{(k)}(x_k)\right)_{n=1}^{\infty},\ldots, \tag{1.7}$$

причем каждая следующая последовательность выделена (без нарушения порядка следования элементов) из предыдущей. Теперь ясно, что последовательность диагональных элементов матрицы (1.7), т. е. последовательность $\left(f_n^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, является искомой.

6b). Применим к множеству $K = \{f\}$ доказанное только что утверждение 6a), взяв в качестве E множество, состоящее из рациональных чисел отрезка $[a, b]$ и точки a, если она иррациональна. В каждой точке $x_k \in E$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k)$ последовательности функций $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, выделенной из K.

Введем функцию $\varphi(x)$, положив ее равной пределу $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k)$ в точках множества E:

$$\varphi(x_k) \doteqdot \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k) \quad (x_k \in E).$$

Этим равенством функция $\varphi(x)$ задана пока только на множестве E, причем легко видеть, что она есть функция непрерывная на E, так как

$$\forall\bigl(x_k, x_j \in E,\ x_k < x_j\bigr) : \varphi(x_k) \leqslant \varphi(x_j).$$

Распространим определение функции $\varphi(x)$ на весь промежуток $[a, b]$, положив ее равной

$$\varphi(x) = \sup_{\substack{x_k \in E, \\ x_k < x}} \varphi(x_k)$$

для всех иррациональных точек $(a, b]$. Построенная таким образом функция $\varphi(x)$ будет, очевидно, неубывающей и ограниченной на $[a, b]$. Она может иметь только конечное или счетное множество E_0 точек разрыва. Покажем, что в каждой точке x_0, в которой $\varphi(x)$ непрерывна, будет

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = \varphi(x_0).$$

Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти такие точки x_k и x_j множества E, что

$$x_k < x_0 < x_j, \quad \varphi(x_j) - \varphi(x_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксировав эти точки, найдем такое n_0, что при $n > n_0$ будет

$$\left|f^{(n)}(x_k) - \varphi(x_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|f^{(n)}(x_j) - \varphi(x_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Легко видеть, что при этих n окажется

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < f^{(n)}(x_k) \leqslant f^{(n)}(x_j) < \varphi(x_0) + \varepsilon,$$

Отсюда, учитывая

$$f^{(n)}(x_k) \leqslant f^{(n)}(x_0) \leqslant f^{(n)}(x_j)$$

получим при $n > n_0$:

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < f^{(n)}(x_0) \leqslant f^{(n)}(x_j) < \varphi(x_0) + \varepsilon,$$

т. е.

$$\varphi(x_0) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0).$$

Итак, равенство

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) \tag{1.8}$$

может не выполняться только на счетном множестве E_0 точек разрыва функции φ. Заметив это, снова применим утверждение 6а) к последовательности $\left(f^{(n)}\right)_{n\geqslant 1}$, взяв в качестве множества E множество тех точек E_0, где не выполняется равенство (1.8). Это приводит нас к последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}$,выделенной из $\left(f^{(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ и сходящейся теперь уже во всех точках $[a, b]$ (ибо там, где сходилась последовательность $\left(f^{(n)}\right)_{n\geqslant 1}$, сходится и ее подпоследовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$). Если положить

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

то функция $\varphi(x)$, очевидно, окажется неубывающей. ►

7. Докажите, что если последовательность функций $g_n(x)$, неубывающих на $[a, b]$, стремится к функции $g(x)$ на плотном в $[a, b]$ множестве точек E, то сходимость имеет место в каждой точке непрерывности $g(x)$, лежащей внутри $[a, b]$.

Указание. Повторить доказательство равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = \varphi(x)$ из упражнения 6, заменив $\left(f^{(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ и φ соответственно на $\left(g_n\right)_{n\geqslant 1}$ и g. ►

8. Построить строго возрастающую непрерывную функцию $f(x)$ на $[0,1]$ такую, что $f'(x) = 0$ почти всюду на $[0,1]$.

Решение. Пусть $\varphi(x)$ — функция Кантора на $[0,1]$, $g_0(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$, $g_0(x) = 0$ при $x < 0$ и $g_0(x) = 1$ при $x > 1$. Пусть $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество всех интервалов из $[0,1]$ с рациональными концами. Для $I_n = (a,b)$ определим функции

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\, g_0\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Затем определим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Ясно, что $f(x)$ корректно определена и непрерывна на $[0,1]$. Так как каждая функция $f_n(x)$ неубывающая на $[0,1]$, то в силу следствия 1.1 (из теоремы Фубини)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = 0$$

почти всюду на $[0,1]$. Далее, пусть $0 \leqslant y < z < 1$. Найдем такие рациональные a и b, что $y < a < b < z$. Пусть $(a,b) = I_n$. Тогда

$$f(z) - f(y) \geqslant f(b) - f(a) \geqslant f_n(b) - f_n(a) = \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда следует, что $f(x)$ — строго возрастающая функция на $[0,1]$. ▶

9. Будет ли всякая монотонная непрерывная функция абсолютно непрерывной?

Указание. Ответ — нет. Для обоснования смотри теорему 1.2 и упражнение 8. ▶

§ 2. Функции вещественной переменной с ограниченной вариацией

Основные обозначения

$J\,(=|a,b|)$ — промежуток точек из расширенного множества вещественных чисел одного из следующих видов: $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ или (a,b). Число a называется *левым* концом, а b — *правым концом* каждого из этих промежутков; промежуток называется *конечным*, если если оба его конца конечны, и *бесконечным* — в противном случае.

X — МП (= метрическое пространство) или ЛНП (= линейное нормированное пространство), а при $X=\mathbb{K}\,(\doteqdot \mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$ — числовое множество со стандартной метрикой.

$f\colon\ |a,b|\to X$ — отображение (= функция).

Определение 2.1. *Полной вариацией* (= *полным изменением*) $f\colon\ |a,b|\to X$ называется величина

$$V\left(|a,b|\,,f\right)\doteqdot\sup\sum_{i=1}^{n}\rho\big(f(b_i),f(a_i)\big), \tag{2.1}$$

где верхняя грань берется по всем конечным множествам точек $a_i,b_i\in|a,b|$ таких, что

$$a_1\leqslant b_1\leqslant a_2\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant b_n,$$

а ρ — метрика на X.

Таким образом, полная вариация — это либо неотрицательное число, либо $+\infty$ и, очевидно,

$$V(J_1, f) \leqslant V(J_2, f),$$

если $J_1 \subset J_2$. Ясно, что при замене последовательности

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$$

конечной последовательностью, содержащей данную, сумма под знаком sup в (2.1) не убывает. Поэтому при вычислении точной верхней грани в (2.1) можно ограничиться рассмотрением таких конечных последовательностей, у которых среди a_i и b_i фигурируют конечное число заранее заданных точек.

Определение 2.2. Если $V(J, f) < \infty$, то говорят, что функция $f\colon J \to X$ имеет *ограниченную полную вариацию* (= *ограниченное полное изменение*) на J, а f — *функцией ограниченной вариации* (= *ограниченного изменения*) на J.

Приведем простейшие примеры функций ограниченной вариации.

Пример 5. Функция $f\colon |a, b| \to X$, где $|a, b| \subset \mathbb{R}$ — ограниченный промежуток, а X — МП, удовлетворяющая на $|a, b|$ условию Липшица, имеет ограниченную вариацию, так как из условия Липшица

$$\forall \bigl(t', t'' \in |a, b|\bigr)\colon \rho\bigl(f(t'), f(t'')\bigr) \leqslant k|t' - t''|,$$

очевидно следует $V(|a, b|, f) \leqslant k(b - a)$.

Пример 6. Если функция $f\colon (a,b) \to X$, где $(a,b) \subset \mathbb{R}$ — ограниченный интервал, а X — ЛНП, дифференцируема и имеет ограниченную производную на (a,b), то f — функция ограниченной вариации, т. е. $V((a,b), f) < \infty$. Это так, ибо такая функция удовлетворяет на (a,b) условию Липшица.

Пример 7. Если $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ монотонна, то $V([a,b], f) = |f(b) - f(a)|$.

Пример 8. Если $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, где $f = f_1 - f_2$, а f_1 и f_2 не убывают на $[a,b]$, то

$$V([a,b], f) < +\infty.$$

В самом деле, для любого разбиения промежутка $[a,b]$ на частичные промежутки $[a_k, b_k]$, $a = a_0 \leqslant b_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n = b$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| \leqslant f_1(b) - f_1(a) + f_2(b) - f_2(a),$$

Следовательно, $V([a,b], f) \leqslant f_1(b) - f_1(a) + f_2(b) - f_2(a)$.

Утверждение 2.1. *Каждое отображение $f\colon J \to X$ ограниченной вариации ограничено на J, а обратное, вообще говоря,неверно (если даже f непрерывно).*

◀ Ограниченность f следует из

$$\forall (t', t'' \in J) \colon \rho\big(f(t'), f(t'')\big) \leqslant V(J, f).$$

Далее, функция $\varphi\colon\ [0,2]\to\mathbb{R}$, где

$$\varphi(t)=\begin{cases} t\cdot\sin\dfrac{\pi}{t} & \text{при } 0<t\leqslant 2;\\ 0 & \text{при } t=0,\end{cases}$$

непрерывна на $[0,2]$, но не является функцией ограниченной вариации, так как для точек

$$0,\frac{2}{2n-1},\frac{2}{2n-3},\dots,\frac{2}{5},\frac{2}{3},2$$

соответствующая сумма, фигурирующая в (2.1), равна

$$\left(2+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)+\dots+\left(\frac{2}{2n-3}+\frac{2}{2n-1}\right)+\frac{2}{2n-1}>$$
$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n},$$

а это число может быть сделано сколь угодно большим за выбора достаточно большого n, ибо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. ►

Обозначим через $\mathrm{BV}\,(\mathrm{J})$ совокупность всех функций $f\colon J\to X$ ограниченной вариации на J, где X — ЛНП над полем скаляров $\mathbb{K}$.

Утверждение 2.2. $\mathrm{BV}\,(\mathrm{J})$ — *линейное пространство (= ЛП).*

◀ Утверждение вытекает из соотношений

$$\forall\, f, g \in \mathrm{BV}\,(\mathrm{J})\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}\colon$$

$$\sum_{k=1}^{n} \big\| (f+g)(b_k) - (f+g)(a_k) \big\| \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{n} \big\| f(b_k) - f(a_k) \big\| + \sum_{k=1}^{n} \big\| g(b_k) - g(a_k) \big\|,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \big\| (\alpha f)(b_k) - (\alpha f)(a_k) \big\| = |\alpha| \sum_{k=1}^{n} \big\| f(b_k) - f(a_k) \big\|,$$

где $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ $(a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n)$ — произвольная конечная последовательность точек из J. ▶

Замечание 2.1. Отметим справедливость следующих предложений.

(i) Если $f\colon J \to X$, $\varphi\colon J \to \mathbb{K}$ — функции ограниченной вариации, то $\varphi f\colon J \to X$ $\Big((\varphi f)(t) \doteqdot \varphi(t) f(t),\ t \in J \Big)$— функция ограниченной вариации на J.

(ii) Если $\varphi\colon J \to \mathbb{K}$ — функция ограниченной вариации и

$$\exists\, C \in (0, +\infty)\, \forall\, t \in J\colon |\varphi(t)| \geqslant C,$$

то $\dfrac{1}{\varphi}$ — функция ограниченной вариации на J.

Эти предложения следуют из утверждения 2.1 и из

$$\sum_{k=1}^{n} \|\varphi(b_k)f(b_k) - \varphi(a_k)f(a_k)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\varphi(b_k)f(b_k) - \varphi(b_k)f(a_k)\| + \sum_{k=1}^{n} \|\varphi(b_k)f(a_k) - \varphi(a_k)f(a_k)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in J} |\varphi(t)| \sum_{k=1}^{n} \|f(b_k) - f(a_k)\| + \sup_{t\in J} \|f(t)\| \sum_{k=1}^{n} |\varphi(b_k) - \varphi(a_k)|$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{\varphi(b_k)} - \frac{1}{\varphi(a_k)} \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\varphi(b_k) - \varphi(a_k)}{\varphi(b_k)\varphi(a_k)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{C^2} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(b_k) - \varphi(a_k)|.$$

В связи с утверждением 2.2 отметим, что множество монотонных функций на J не образует линейное пространство. Например, функции t и t^2 монотонны на $[0, 1]$, но функция $t - t^2$ не монотонна.

Полная вариация представляет собой аддитивную функцию промежутка, т. е. имеет место

Предложение 2.1. *Если* $f\colon\ |a, b| \to X$ *и* $a < c < b$, *то полная вариация* f *на* $|a, b|$ *является суммой полных вариаций этой функции на*

$|a,c]$ *и* $[c,b|$:

$$V\left(|a,b|\,,f\right) = V\left(|a,c]\,,f\right) + V\left([c,b|\,,f\right),$$

Следовательно, f имеет ограниченную вариацию на $|a,b|$ тогда и только тогда, когда она имеет ограниченную вариацию на $|a,c]$ и на $[c,b|$.

◀ Заметим, что сумма

$$\Sigma_{|a,b|} = \sum_{k=1}^{n} \rho\big(f(t_{k-1}), f(t_k)\big),$$

где $\left(t_k\right)_{k=0}^{n} \subset |a,b|$, может только возрастать при добавлении новых точек к конечной последовательности $\left(t_k\right)_{k=0}^{n}$ и поэтому для доказательства предложения можно рассматривать лишь такие конечные последовательности точек из $|a,b|$, при которых существует t_k, равное c; при этом

$$\Sigma_{|a,b|} = \Sigma_{|a,b]} + \Sigma_{[a,b|}$$

и, взяв верхние грани, мы получим требуемые равенства. ▶

Замечание 2.2. Соотношение вида

$$V\left(|a,b|\,,f\right) = V\left(|a,c)\,,f\right) + V\left([c,b|\,,f\right),$$

вообще говоря, не верно. Оно справедливо, если функция f непрерывна слева в точке c, ибо тогда (см. ниже лемму 2.2): $V\left(|a,b]\,,f\right) = V\left(|a,c)\,,f\right)$.

Теорема 2.1 ([7]). *Пусть $f\colon |a,b| \to X$ — функция ограниченной вариации. Если X — полное МП, то f — правильная функция.*

◀ Отметим, что f ограничена на $|a,b|$ не зависимо от полноты МП X (см. утверждение 2.1).

Пусть $t_0, t_1, t_2, \dots$ — некоторая последовательность точек $> c$, стремящаяся к c при $n \to \infty$. Для упрощения доказательства сходимости последовательности $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots$ к некоторому пределу при $n \to \infty$, переставим так члены этой последовательности, чтобы можно было считать последовательность $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ убывающей. Тогда независимо от n конечная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \rho\big(f(t_i), f(t_{i+1})\big)$ ограничена полной вариацией функции f. Значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho\big(f(t_i), f(t_{i+1})\big) < \infty.$$

Таким образом, для $m \geqslant n+1$ при $m, n \to +\infty$ сумма $\sum\limits_{i=n}^{m-1}$ стремится к 0, и тем более стремится к нулю $\rho\big(f(t_n), f(t_m)\big)$. Это означает, что последовательность $\big(f(t_n)\big)_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна в X. Поскольку X полно, эта последовательность сходится. Ее предел не зависит от выбора последовательности $(t_n)_{n=0}^{\infty}$. В самом деле, из двух последовательностей $(t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(t''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно образовать смешанную последовательность $t'_0, t''_0, t'_1, t''_1, t'_2, t''_2, \dots$, на которой последовательность значений функции f должна иметь некоторый предел, а потому последовательности $\big(f(t'_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ и $\big(f(t''_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ также будут иметь тот же предел. Пусть $f(c+0)$ — общий предел этих последовательностей. Тогда $f(t)$ стремится к $f(c+0)$ при t, стремящемся к c по значениям $> c$. В противном случае существовало бы такое число $\varepsilon > 0$, что для каждого $n \geqslant 1$ можно было бы найти число t_n, $c < t_n \leqslant c + \frac{1}{n}$, для которого выполняется неравенство $\rho\big(f(t_n), f(c+0)\big) > \varepsilon$. Но тогда последовательность $\big(t_n\big)_{n=1}^{\infty}$ стремилась бы к точке c при $n \to \infty$ по значениям $> c$, а последовательность $\big(f(t_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ не стремилась бы к $f(c+0)$, что противоречит ранее полученным результатам.

Точно так же можно показать, что $f(t)$ имеет предел $f(c-0)$, когда t стремится к c по значениям $< c$. Значит, f в точках $|a, b|$ правильная. ▶

Замечание 2.3. Обратное утверждение не верно. Правильная и даже непрерывная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функция с вещественными значениями не обязательно имеет ограниченную вариацию (см. пример в утверждении 2.1).

Лемма 2.1. *Пусть $f\colon [a, c) \to X$, где X — МП (не обязательно полное). Тогда при t, стремящемся к c по значениям $< c$, вариация $V\,([a, t], f)$ стремится к $V\,([a, c), f) \leqslant +\infty$.*

◀ Функция $V\,([a, t], f)$ не убывает на $[a, c)$; следовательно, при t, стремящемся к c по значениям $< c$, она имеет предел $\leqslant V\,([a, c), f)$. Однако, если V является произвольным числом $< V\,(a, c), f)$, то по определению существует такое разбиение Δ промежутка $[a, c)$: $a = c_0 \leqslant c_1 \leqslant$

$c_2 \leqslant \ldots, \leqslant c_n < c$, что
$$\Sigma_\Delta \geqslant V.$$

Тогда тем более для $c_n \leqslant t < c$
$$V([a,t],f) \geqslant V([a,c_n],f) \geqslant \Sigma_\Delta \geqslant V.$$

что и требовалось доказать. ►

Лемма 2.2. *Если f является отображением $[a,c]$ $(a < c)$ в МП X с ограниченной вариацией, то $V([a,c],f) = V([a,c),f)$ тогда и только тогда, когда f непрерывна слева в точке c.*

◄ Легко видеть, что $V([a,c),f) \leqslant V([a,c],f)$. Предположим сначала, что f непрерывна слева в точке c. Тогда при заданном ε существует такое $\eta > 0$, что из $c - t \leqslant \eta$, $t < c$ следует неравенство
$$\rho\big(f(c), f(t)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, существует такое разбиение
$$\Delta\colon a = c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n = c$$

отрезка $[a,c]$, что
$$\Sigma_\Delta \geqslant V([a,c],f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Можно предполагать, кроме того. что $c_{n-1} \geqslant c - \eta$ (в противном случае можно пополнить Δ точкой $c - \eta$, отчего сумма Σ_Δ может лишь возрасти). Тогда

$$V([a,c),f) \geqslant V([a,c_{n-1}],f) \geqslant \Sigma_\Delta - \rho\big(f(c),f(c_{n-1})\big) \geqslant$$
$$\geqslant \left(V([a,c],f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = V([a,c],f) - \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $V([a,c],f) = V([a,c),f)$.

Обратно, предположим, что последнее равенство имеет место. Тогда существует такое разбиение Δ промежутка $[a,c)$, при котором имеет место

$$\Sigma_\Delta \geqslant V,$$

где $V = V([a,c],f) - \varepsilon$. Поэтому для $c_n \leqslant t < c$ будем иметь

$$V([a,c],f) - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta \leqslant \Sigma_\Delta + \rho\big(f(t),f(c)\big) \leqslant V([a,c],f),$$

Откуда

$$\rho\big(f(t),f(c)\big) \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad c_n \leqslant t < c,$$

а, значит, функция f непрерывна слева в точке c. ▶

Замечание 2.4. Если f в лемме 2.2 не является функцией с ограниченной вариацией на $[a,c]$, то она не имеет ограниченной вариации и на $[a,c)$; при этом выполняется равенство $V([a,c],f) = V([a,c),f) = +\infty$ независимо от того является ли функция f непрерывной слева в точке c или нет.

Теорема 2.2. *Пусть f — отображение $[a, c]$ $(a < b)$ в X ограниченной вариации. Обозначим через $V([a, t], f)$ полную вариацию сужения функции f на $[a, t]$. Функция*

$$t \mapsto V([a, t], f)$$

возрастает и непрерывна слева (соответственно справа) в точке c тогда и только тогда, когда f непрерывна слева (соответственно справа) в точке c.

◀ Согласно лемме 2.2 функция $t \mapsto V([a, t], f)$ непрерывна слева в точке c тогда и только тогда, когда функция f непрерывна слева в этой точке. Мы даже нашли в обоих случаях предел $V([a, t], f)$, когда t стремится к c по значениям $< c$.

Если теперь t стремится к c по значения $> c$, то $V([t, b], f)$, как показывает рассуждение, подобное рассуждению, проведенному в лемме 2.1, стремится к $V((c, b], f)$. Рассуждая так же, как в лемме 2.2, можно убедиться, что последнее выражение равно $V([c, b], f)$ тогда и только тогда, когда функция f непрерывна справа в точке c. Далее,

$$V([a, t], f) = V([a, b], f) - V([t, b], f)$$

стремится к $V([a, c], f) = V([a, b], f) - V([c, b], f)$ тогда и только тогда, когда f непрерывна справа в точке c. ▶

Отметим, что если $f\colon [a, b] \to X$, где X — МП, и f непрерывна слева (соответственно справа), то, вместо того чтобы выражать полную вариацию f как точную верхнюю грань, ее можно выразить как предел сумм Σ_Δ, соответствующих произвольной последовательности

$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ разбиений $[a, b]$ с наибольшей длиной промежутков разбиения, стремящейся к нулю, при n, стремящемся к бесконечности (см. [7]).

Отметим также, что $V(|a, b|, f) = 0$ равносильно тому, что $f = \mathrm{const}$ на $|a, b|$, но не обязательно $f \equiv 0$.

Теорема 2.3. *Линейное пространство* $\mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ *отображений* $f : [a, b] \to X$, *где* X *— ЛНП, является ЛНП с нормой*

$$\|f\| \doteqdot \|f(a)\| + V([a, b], f)\,.$$

Если X *— (B)-пространство,то* $\left(\mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}]), \|\cdot\|\right)$ *является (B)-пространством.*

◀ Первые две аксиомы ЛНП выполнены очевидным образом, а неравенство треугольника проверяется просто:

$$\|f + g\| \doteqdot \|f(a) + g(a)\| + V([a, b], f + g) \leqslant \\ \leqslant \|f(a)\| + \|g(a)\| + V([a, b], f) + V([a, b], g)\,.$$

Докажем второе утверждение теоремы. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$, т. е. при $n, m \to \infty$

$$\|f_n - f_m\| = \|f_n(a) - f_m(a)\| + V(a, b], f_n - f_m) \to 0.$$

Тогда из

$$\|f_m(t) - f_n(t)\| \leqslant \left\|\left(f_m(t) - f_n(t)\right) - \left(f_m(a) - f_n(a)\right)\right\| + \\ + \|f_m(a) - f_n(a)\| \leqslant \|f_m(a) - f_n(a)\| + V([a, b], f_m - f_n)$$

следует, что последовательность $\left(f_n(t)\right)_{n=1}^{\infty} \subset X$ фундаментальна в X при любом $t \in [a,b]$. Следовательно, в силу полноты пространства X существует предел

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

в X для любого $t \in [a,b]$.

Пусть $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ настолько велико, что при $n \geqslant n(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$. Тогда для любой конечной последовательности

$$a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant b_k \quad (a_i, b_i \in [a,b])$$

будем иметь

$$\|f_m(a) - f_n(a)\| + \sum_{i=1}^{k} \Big\| \big[f_m(b_i) - f_n(b_i)\big] - \big[f_m(a_i) - f_n(a_i)\big] \Big\| < \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, найдем

$$\|f(a) - f_n(a)\| + \sum_{i=1}^{k} \Big\| \big[f(b_i) - f_n(b_i)\big] - \big[f(a_i) - f_n(a_i)\big] \Big\| < \varepsilon.$$

И так как это справедливо для любого разбиения, то

$$\|f(a) - f_n(a)\| + V\left([a,b], f - f_n\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n(\varepsilon).$$

Отсюда и из

$$f = f - f_{n(\varepsilon)} + f_{n(\varepsilon)}, \qquad f_{n(\varepsilon)} \in \mathrm{BV}\left([\mathrm{a}, \mathrm{b}]\right)$$

легко получаем, что

$$f \in \mathrm{BV}\left([\mathrm{a}, \mathrm{b}]\right) \quad \text{и} \quad \|f - f_n\| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n(\varepsilon),$$

т. е. $f_n \to f$ и $\mathrm{BV}\left(\mathrm{a}, \mathrm{b}]\right)$. Теорема доказана. ►

Замечание 2.5. Если $f \in \mathrm{BV}\left((\mathrm{a}, \mathrm{b}|\right)$, то норма $f \in \mathrm{BV}\left((\mathrm{a}, \mathrm{b}|\right)$ определяется равенством

$$\|f\| = \|f(a+0)\| + V\left((a, b|\,, f\right),$$

где $V\left((a, b|\,, f\right)$ есть, как обычно, полная вариация функции f на $(a, b|$ (в теореме 2.1 было показано, что предел $f(a+0)$ существует для всех $f \in \mathrm{BV}\left((\mathrm{a}, \mathrm{b}|\right)$).

Часто через $\mathrm{NBV}\left(|\mathrm{a}, \mathrm{b}|\right)$ обозначают совокупность всех функций f из $\mathrm{BV}\left(|\mathrm{a}, \mathrm{b}|\right)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) f непрерывна справа в каждой внутренней точке промежутка $|a, b|$;

2) $f(a+0) = 0$.

Норма в $\mathrm{NBV}\left(|\mathrm{a}, \mathrm{b}|\right)$ задается равенством

$$\|f\| = V\left(|a, b|\,, f\right).$$

Предложение 2.2. *Пусть E — ЛНП над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, $\dim E = n$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в E. Для того чтобы функция $f\colon\ |a, b| \to E$ имела ограниченную вариацию, необходимо и достаточно,чтобы каждая из ее составляющих имела ограниченную вариацию.*

◀ При замене нормы в E эквивалентной ей нормой функция ограниченной вариации остается функцией ограниченной вариации (хотя значение полной вариации, естественно, может измениться). Введение базиса в E позволяет отождествить это пространство с пространством $\mathbb{R}^n$, и мы можем заменить норму в E эквивалентной нормой

$$\left\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^n.$$

Если теперь функция f на $|a, b|$ представлена в виде

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) e_j,$$

то имеем

$$\left\|f(c_{i+1} - f(c_i)\right\| = \sum_{j=1}^{n} \left|f_j(c_{i+1}) - f_j(c_i)\right|$$

(для любого разбиения Δ промежутка $|a, b|$). Следовательно, полная вариация функции f не меньше полной вариации каждой функции f_j и не больше суммы полных вариаций этих функций. (Это так, если воспользоваться те фактом, что сумма в определении полной вариации при замене последовательности точек на содержащую ее последовательность может лишь возрасти). Это означает, что f имеет ограниченную вариацию в том и только в том случае, когда ограничены вариации функций f_j. ▶

§ 3. Вещественные функции вещественной переменной с ограниченной вариацией

В данном параграфе для вещественных функций, заданных на промежутке $J \subset \mathbb{R}$ (который может быть замкнутым, полузамкнутым, открытым и конечным или нет) рассматриваются критерии ограниченности вариации и их свойства.

Теорема 3.1. *Для $f\colon J \to \mathbb{R}$, где $J = |a,b|$, следующие предложения эквивалентны.*

(i) $f \in \mathrm{BV}\,(\mathrm{J})$.

(ii) Найдется монотонная ограниченная функция $F\colon J \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\forall \big(x', x'' \in J,\ x' < x''\big)\colon \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant F(x') - F(x'').$$

(iii) Функция f представима в виде разности двух возрастающих и ограниченных функций на J.

◀ (i) ⇒ (ii), так как за $F(x)$ можно взять, например, функцию $V\left(|a,x]\,,f\right)$; тогда $\big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant V\left([x',x''],f\right)$.

Покажем, что (ii) ⇒ (iii). Функция $G(x) = F(x) - f(x)$ ограничена (ибо таковыми являются функции f и F) и

$$\forall \big(x', x'' \in J,\ x' < x''\big)\colon$$
$$G(x'') - G(x') = \big[F(x'') - f(x'')\big] - \big[F(x') - f(x')\big] =$$
$$= \big[F(x'') - F(x')\big] - \big[f(x'') - f(x')\big] \geqslant 0,$$

т. е. функция G не убывает на J. Следовательно, $f = F - G$ на J.

Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) есть следствие того, что монотонная ограниченная функция является функцией ограниченной вариации и BV (J) — линейное пространство. ▶

Замечание 3.1. Представление функции ограниченной вариации в виде разности двух возрастающих ограниченных функций не является единственным: если $f = f_1 - f_2$ — такое представление, то путем прибавления к f_1 и f_2 одной и той же постоянной можно добиться, чтобы f_1 и f_2 стали положительными, и, далее, если к f_1 и f_2 прибавим какую-либо строго возрастающую ограниченную функцию (например, $\operatorname{arctg} x$), то получим представление f в виде разности двух ограниченных строго возрастающих функций. Отметим также, что установленная возможность сведения функций с ограниченной вариацией в некотором смысле к монотонным функциям не должна создавать иллюзий относительно «простоты» поведения функций с ограниченной вариацией; ведь бесконечно колеблющая функция (в каждом промежутке, содержащем точку 0)

$$f(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0), \qquad f(0) = 0,$$

тоже допускает представление в виде разности двух монотонных функций (f имеет ограниченную производную $f'(x) = 2x\sin\frac{\pi}{x} - \pi\cos\frac{\pi}{x}$ при $x \neq 0$ и $f'(0) = 0$). Тем не менее некоторые свойства монотонных функций переносятся и на функции с ограниченной вариацией (см. ниже).

Теорема 3.2. *Если* $f \in \mathrm{BV}([\mathrm{a},\mathrm{b}])$, *то существуют монотонно возрастающие на* $[a,b]$ *функции* p *и* q *такие, что*

$$p(a) = q(a) = 0,$$
$$f(x) - f(a) = p(x) - q(x), \tag{3.1}$$
$$V([a,x],f) = p(x) + q(x). \tag{3.2}$$

◀ Для любого $x \in [a,b]$ положим:

$$2p(x) \doteqdot V([a,x],f) + f(x) - f(a),$$
$$2q(x) \doteqdot V([a,x],f) - f(x) + f(a).$$

Тогда, учитывая $V([a,a],f) = 0$, имеем $p(a) = q(a) = 0$ и выполняются равенства (3.1) и (3.2). Далее, если $a \leqslant x \leqslant y$, то, в силу равенства

$$V([a,y],f) = V([a,x],f) + V([x,y],f)\,,$$

получаем

$$2p(y) - 2p(x) = V([x,y],f) + \big[f(y) - f(x)\big],$$
$$2q(y) - 2q(x) = V([x,y],f) - \big[f(y) - f(x)\big].$$

Отсюда и из

$$\big|f(y) - f(x)\big| \leqslant V([x,y],f)$$

следует, что обе функции p и q — возрастающие. ▶

Определение 3.1. Для $f \in \mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ функцию

$$V_f(x) \doteqdot V([a, x], f)$$

(по аналогии с неопределенным интегралом) называют *неопределенной полной вариацией*, а функции $p(x)$ и $q(x)$ — соответственно *неопределенной положительной вариацией* и *неопределенной отрицательной вариацией.*

Замечание 3.2. Прибавляя одну и ту же возрастающую функцию к p и q, мы получим две возрастающие функции p_1 и q_1 такие, что $f(x)-f(a)=p_1(x)-q_1(x)$. Однако разложение $f(x)-f(a)=p(x)-q(x)$ обладает некоторым свойством минимальности, выделяющим его среди всех прочих разложений такого рода (см. упражнение 7). Отсюда (как и из доказательства теоремы 3.2) видно, что $f(x)$ можно представить в виде $f(x)=p(x)-q(x)$, если считать, что $p(x)$ и $q(x)$ определяются с точностью до постоянного слагаемого равенствами

$$p(x)=\frac{1}{2}\big[V([a, x], f)+f(x)\big] \quad \text{и} \quad q(x)=\frac{1}{2}\big[V([a, x], f)-f(x)\big].$$

Так как $f(x)=p(x)-q(x)+f(a)$ дифференцируема всюду, где дифференцируемы одновременно и $p(x)$ и $q(x)$, а объединение двух множеств меры нуль является множеством меры нуль, то получаем следующее утверждение.

Теорема 3.3 (Лебег). *Любая функция с ограниченной вариацией почти всюду имеет конечную производную.*

Лемма 3.1. *Всякая функция скачков*

$$s(x) = \sum_{x_n \leqslant x} u_n + \sum_{x_n < x} v_n, \quad (x \in (a,b))$$

где u_n и v_n — числа произвольных знаков, представляет собой функцию с ограниченной вариацией; ее неопределенная полная вариация также является функцией скачков с теми же x_n и с $|u_n|$ и $|v_n|$ вместо u_n и v_n. Ее неопределенная положительная вариация и неопределенная отрицательная вариация представляются соответственно числами

$$\max\{u_n, 0\},\ \max\{v_n, 0\} \quad \text{и} \quad -\min\{u_n, 0\},\ -\min\{v_n, 0\}.$$

◀ Для доказательства леммы достаточно показать, что полная вариация $V\left((a,b), f\right)$ функции $s(x)$ равна $U = \sum \left(|u_n| + |v_n|\right)$; соответствующее выражения для $V\left((a,x), f\right)$ получится, если вместо (a,b) взять (a,x).

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем целое число N таким образом, чтобы сумма N первых членов ряда, определяющего U, отличалась от U меньше, чем ε. Возьмем теперь такое разбиение (a,b), чтобы каждый замкнутый частичный интервал $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ содержал одну и только одну из точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и эта последняя совпадала бы с α или β. Для замкнутого частичного промежутка вида $\alpha \leqslant x \leqslant x_r$, где $r \leqslant N$, будем иметь

$$\big|s(x_r)-s(\alpha)\big| = \Big|u_r + \sum_{\alpha<x_n<x_r} u_n + \sum_{\alpha\leqslant x_n<x_r} v_n\Big| \geqslant$$

$$\geqslant |u_r| - \Big(\sum_{\alpha<x_n<x_r} |u_n| + \sum_{\alpha\leqslant x_n<x_r} |v_n|\Big),$$

где все u_n и v_n, за исключением u_r, имеют номера $> N$. Подобное же неравенство справедливо для частичных интервалов вида $x_r \leqslant x \leqslant \beta$. Отсюда следует, что сумма $\sum\big|s(\beta)-s(\alpha)\big|$, распространенная на все частичные интервалы рассматриваемого разбиения, больше или равна

$$\sum_1^N \big(|u_n| + |v_n|\big) - \varepsilon \geqslant U - 2\varepsilon.$$

Так как с другой стороны, согласно определению $s(x)$, аналогичная сумма, соответствующая произвольному разбиению, не может превзойти U, то полная вариация $V\left((a,b),s\right)$ равна U. ▶

Предложение 3.1. *Функция скачков*

$$s(x) = \sum_{x_n\leqslant x} u_n + \sum_{x_n<x} v_n$$

обладает следующими свойствами.

1. *$s(x)$ имеет пределы справа и слева в каждой точке, причем в точках x_n она имеет левые и правые скачки, равные соответственно u_n и v_n, а в остальных точках она непрерывна.*

2. *$s(x)$ имеет почти всюду производную, равную нулю.*

◀ Свойство 1 следует из теоремы 2.1 и предложения 1.2. Свойство 2 вытекает из теоремы 3.2, если учесть, что неопределенная полная вариация, неопределенная положительная вариация и неопределенная отрицательная вариация функции $s(x)$ также являются функциями скачков с неотрицательными односторонними скачками (см. лемму 3.1), а их производные равны нулю (см. следствие 1.2). ▶

Предложение 3.2. *Всякая функция $f(x)$ с ограниченной вариацией может быть представлена в виде суммы непрерывной функции $g(x)$ с ограниченной вариацией и функции скачков $s(x)$. (Функции $g(x)$ и $s(x)$ при этом называются соответственно* непрерывной составляющей *и* функцией скачков функции $f(x)$*).*

◀ Пусть $\{x_n\} \subset (a, b)$ — множество точек разрыва функции и u_n, v_n — соответственно левые и правые скачки функции $f(x)$ в точках x_n $(n = 1, 2, \dots)$. Зададим функцию скачков $s(x)$ формулой

$$s(x) = \sum_{x_n \leqslant x} u_n + \sum_{x_n < x} v_n, \quad (x \in (a, b)).$$

Как мы знаем функция $s(x)$ в точках x_n имеет левые и правые скачки, равные соответственно u_n и v_n $(n = 1, 2, \dots)$ (см. предложение 1.2), а в остальных точках она непрерывна. Тогда функция

$$g(x) = f(x) - s(x),$$

как разность двух функций с ограниченной вариацией, является функцией ограниченной вариации на (a, b). Ее непрерывность в любой точке $x \neq x_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ очевидна. Докажем непрерывность $g(x)$ в любой точке $x_m \in \{x_n\}$. Это следует из

$$u_m \doteqdot f(x_m) - f(x_m - 0), \quad v_m \doteqdot f(x_m + 0) - f(x_m),$$
$$g(x_m) \doteqdot f(x_m) - s(x_m) = f(x_m) - \Big(\sum_{x_n \leqslant x_m} u_n + \sum_{x_n < x_m} v_n \Big),$$
$$g(x_m + 0) = f(x_m + 0) - s(x_m + 0) =$$
$$= f(x_m + 0) - \big[v_m + s(x_m) \big] =$$
$$= f(x_m + 0) - \big[f(x_m + 0) - f(x_m) + s(x_m) \big] =$$
$$= f(x_m) - \Big(\sum_{x_n \leqslant x_m} u_n + \sum_{x_n < x_m} v_n \Big),$$
$$g(x_m - 0) = f(x_m - 0) - s(x_m - 0) =$$
$$= f(x_m - 0) - \big[s(x_m) - u_m \big] =$$
$$= f(x_m - 0) - \big[s(x_m) - (f(x_m) - f(x_m - 0)) \big] =$$
$$= f(x_m) - s(x_m) = f(x_m) - \Big(\sum_{x_n \leqslant x_m} u_n + \sum_{x_n < x_m} v_n \Big),$$

Таким образом,

$$g(x_m) = g(x_m - 0) = g(x_m + 0),$$

т. е. $g(x)$ непрерывна в точке x_m.

Итак, $f(x) = g(x) + s(x)$ при $x \in (a, b)$ и $g(x)$ на (a, b) непрерывна и имеет ограниченную вариацию, а $s(x)$ — функция скачков на (a, b) для функции $f(x)$. ►

Замечание 3.3. Пусть в условиях предложения 3.2 функция f задана на отрезке $[a, b]$ и $\{x_n\} \subset [a, b]$. Если в этом случае $x_n = a$ (соответственно $x_n = b$) при некотором $n \in \mathbb{N}$, то в определении $s(x)$ полагается $v_n = 0$ (соответственно $u_n = 0$).

Согласно лемме 3.1 и предложению 3.1 производные функции скачков и ее неопределенной полной вариации равны нулю всюду. Это совпадение соответствует частичному случаю следующего предложения, относящегося к произвольным функциям с ограниченной вариации.

Теорема 3.4. *Если $f(x)$ — функция с ограниченной вариацией на $|a, b|$, а $V_f(x)$ — неопределенная полная вариация функции f, то почти всюду $V_f'(x) = \left|f'(x)\right|$.*

◄ Выберем последовательность разбиений $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ интервала (a, b) таким образом, чтобы суммы

$$\Sigma_{a,b} = \sum_{1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1}\right|,$$

соответствующие разбиениям Δ_n, отличались от полной вариации $V\left((a,b),f\right)$ меньше чем на 2^{-n}. Имея разбиение Δ_n интервала (a,b) на частичные интервалы $x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k$, построим функции $f_n(x)$, положив на каждом таком частичном интервале $f_n(x)$ равной

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) + \text{const}, & \text{если } f(x_k) - f(x_{k-1} \geqslant 0; \\ -f(x) + \text{const}, & \text{если } f(x_k) - f(x_{k-1} < 0. \end{cases}$$

Постоянные слагаемые const выберем так, чтобы $f_n(a)$ равнялась 0, а в точках x_k значения $f_n(x)$ были бы согласованы.

Тогда будем иметь

$$f_n(x_k) - f_n(x_{k-1}) = \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right|$$

и, следовательно,

$$V\left((a,b),f\right) - f_n(b) = V\left((a,b),f\right) - \sum_k \left[f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})\right] \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

С другой стороны, функция $V\left((a,x],f\right) - f_n(x)$ возрастающая, это можно установить, показав, что при $x < \xi$

$$V\left((a,\xi],f\right) - V\left((a,x],f\right) \geqslant f_n(\xi) - f_n(x).$$

В этом случае, когда x и ξ принадлежат одному и тому же отрезку $[x_{k-1}, x_k]$, это неравенство вытекает из того, что

$$V\left((a,\xi],f\right) - V\left((a,x],f\right) \geqslant \left|f(\xi) - f(x)\right|.$$

В общем случае, когда

$$x < x_k < \dots < x_p < \xi,$$

мы просуммируем соответствующие неравенства для отрезков $[x, x_k], [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_p, \xi]$

Ряд

$$\sum \left[V\left((a,x],f\right) - f_n(x) \right]$$

сходится, так как он мажорируется рядом $\sum 2^{-n}$. В силу теоремы Фубини (см. следствие 1.1), ряд из производных сходится почти всюду; следовательно, почти всюду

$$V'\left((a,x],f\right) - f_n'(x) \to 0.$$

Согласно определению функций f_n:

$$f_n'(x) = \pm f'(x),$$

а так как $V'\left((a,x],f\right) \geqslant 0$, в силу того, что $V\left((a,x],f\right)$ — возрастающая функция, мы приходим к заключению, что почти всюду $V'\left((a,x],f\right) = \left|f'(x)\right|$. ►

Метод, который мы использовали только что, применим также и к изучению *разрывов* функции f и ее неопределенной полной вариации $V\left((a,x],f\right)$. Обозначим через $V_f(x)$ неопределенную полную вариацию
.

Теорема 3.5. *Функции $f(x)$и $V_f(x)$ имеют одни и те же точки разрыва, и их скачки в точках разрыва совпадают с точностью до знака, т. е. в любой точке x*

$$V_f(x) - V_f(x-0) = \big|f(x) - f(x-0)\big|,$$
$$V_f(x+0) - V_f(x) = \big|f(x+0) - f(x)\big|.$$

◀ При $x < \xi$ имеем

$$\big|V_f(\xi) - V_f(x) - f_n(\xi) + f_n(x)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \big|V_f(\xi) - f_n(\xi)\big| + \big|V_f(x) - f_n(x)\big| < 2 \cdot 2^{-n};$$

в пределе, когда ξ стремится к x, получим

$$\big|V_f(x+0) - V_f(x) - f_n(x+0) + f_n(x)\big| \leqslant 2^{1-n}.$$

Отсюда, при $n \to \infty$, вытекает, что

$$f_n(x+0) - f_n(x) \to V_f(x+0) - V_f(x)$$

Так как, очевидно, скачки $f_n(x)$ равны, с точностью до знака, скачкам функции $f(x)$, то

$$\big|f(x+0) - f(x)\big| = V_f(x+0) - V_f(x).$$

Утверждение, касающееся пределов слева, устанавливается точно так же. ▶

Определение 3.2. Непрерывная функция с ограниченной вариацией называется *сингулярной*, если ее производная равна нулю почти всюду.

Теорема 3.6. *Всякая функция* $\mathrm{BV}\left([\mathrm{a}, \mathrm{b}]\right)$ *может быть представлена в виде суммы трех компонент*

$$f = \varphi + \psi + s,$$

где функции φ *и* ψ *соответственно абсолютно непрерывна и сингулярна, а* s *— функция скачков для* f*.*

◀ Функция f можно представить как сумму функции скачков s и $g \in \mathrm{BV}\left([\mathrm{a}, \mathrm{b}]\right) \cap \mathrm{C}_{([a,b])}$

$$f = g + s \qquad \text{(см. предложение 3.2).}$$

Положим

$$\varphi(x) \doteqdot \int\limits_a^x g'(t)\, dt.$$

Очевидно, что $\varphi \in \mathrm{AC}\left([a, b]\right)$, а разность

$$\psi \doteqdot \mathrm{BV}\left([\mathrm{a}, \mathrm{b}]\right) \cap \mathrm{C}_{([a,b])},$$

причем $\psi' = 0$ почти всюду на $[a, b]$. Следовательно, $f = \varphi + \psi + s$. ▶

Замечание 3.4. Можно показать, что каждое из слагаемых в разложении $f = \varphi + \psi + s$ определяется самой функцией f однозначно с точностью до константы. Если функции φ, ψ и s нормировать, потребовать обращения двух из них в нуль в точке $x = a$, то разложение $f = \varphi + \psi + s$ будет уже в точности единственным.

Отметим также, что при интегрировании производной от f восстанавливается не сама эта функция, а только ее абсолютно непрерывная компонента.

Замечание 3.5. Теорема 3.5 верна и для функций f из пространства $\mathrm{BV}\,(|\mathrm{a}, \mathrm{b}|)$.

Следующая теорема Хелли часто используется в функциональном анализе и его приложениях.

Теорема 3.7 (Хелли). *Пусть E — множество функций ограниченной вариации на $[a, b]$, причем существует такое положительное число L, что для всех функций g, принадлежащих E, имеют место неравенства*

$$\big|g(x)\big| \leqslant L; \quad V\left([a, b], g\right) \leqslant L, \tag{3.3}$$

т. е. все функции g по абсолютной величине ограничены и их вариации на $[a, b]$ также ограничены некоторым числом. При этом из любой бесконечной последовательности $g_n(x)$ функций, принадлежащих E, можно выделить подпоследовательность $g_{n_k}(x)$, которая во всех точках $[a, b]$ стремится к некоторой функции $g(x)$ ограниченной вариации.

◀ Каждую функцию ограниченной вариации $g \in E$ можно представить в виде разности возрастающих функций

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[V\left([a,x],g\right) + g(x)\right] - \frac{1}{2}\left[V\left([a,x],g\right) - g(x)\right], \qquad (3.4)$$

причем, в силу (3.3), обе эти возрастающие функции по абсолютной величине не превосходят числа L. Применяя упражнение 6, можно утверждать, что из последовательности $g_n(x)$ можно такую последовательность, для которой уменьшаемое в правой части (3.4) во всех точках $[a,b]$ стремится к предельной функции, которая не убывает на $[a,b]$. Применяя еще раз упражнение 6, можно утверждать, что из полученной последовательности можно выделить подпоследовательность, для которой и вычитаемое правой части (3.4) во всех точках $[a,b]$ стремится к неубывающей функции. Таким образом, получим такую последовательность g_{n_k}, которая во всех точках $[a,b]$ стремится к предельной функции, представимой в виде разности двух неубывающих функций. Теорема доказана. ▶

Замечание 3.6. Теорема Хелли справедлива и в случае, когда функции g семейства E задана на $(-\infty,+\infty)$ и при этом ясно, что неравенства (3.3) принимают вид

$$\left|g(x)\right| \leqslant L; \quad V\left((-\infty,+\infty),g\right) \leqslant L.$$

(Здесь $V\left((-\infty,+\infty),g\right) \doteqdot \lim\limits_{n\to\infty} V\left([-n,n],g\right)$). В самом деле, рассмотрим последовательность отрезков

$$[-1,1] \subset [-2,2] \subset [-3,3] \subset \dots \subset [-n,n] \subset$$

Из E выделяется последовательность $\left(g_k^{(1)}\right)_{k\geqslant 1}$, сходящаяся на $[-1,1]$. Из этой последовательности выделяется последовательность $\left(g_k^{(2)}\right)_{k\geqslant 1}$, сходящаяся на отрезке $[-2,2]$ и т.д. (отметим, что порядок следования элементов в $\left(g_k^{(2)}\right)$ такой же, как и в $\left(g_k^{(1)}\right)$). Построив последовательность последовательностей

$$\left(g_k^{(1)}\right) \supset \left(g_k^{(2)}\right) \supset \left(g_k^{(3)}\right) \supset \dots$$

и рассмотрев «диагональную» последовательность $g_n = g_n^{(n)}$, мы получим требуемое, ибо ясно, что полная вариация предельной функции не больше L.

Известно, что неубывающая непрерывная слева (или справа) функция, заданная на любом промежутке числовой оси, порождает неотрицательную меру на этом промежутке (см. упражнения 8, 9, 7 – 14). Оказывается, что множество всех мер (как действительных, так и комплексных) можно описать с помощью множества функций ограниченной вариации (см. следующую теорему).

Так как любая комплексная мера ν представима в виде $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, где ν_1, ν_2 — вещественные меры, то в следующей теореме можно считать рассматриваемые функции вещественными.

Теорема 3.8. *Для того чтобы функция f на $\mathbb{R}$ соответствовала некоторой мере ν по формуле*

$$f_\nu(t) \doteqdot \begin{cases} \nu\big([0,t]\big) & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t = 0; \\ -\nu\big([t,0]\big) & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям:

1) $f(0) = 0$*;*

2) f *непрерывна слева;*

3) f *имеет ограниченную вариацию на любом отрезке.*

◀ Достаточность следует из утверждений упражнения 7 и из представимости f в виде разности двух неубывающих функций f_1 и f_2. Ясно, что если f удовлетворяет условиям 1) и 2), то f_1 и f_2 можно выбрать так, чтобы они также удовлетворяли этим условиям. По утверждению упражнения 7 функции f_1 и f_2 соответствуют некоторым счетно аддитивным мерам μ_{f_1} и μ_{f_2}. Тогда функция $f = f_1 - f_2$ соответствует мере $\mu_{f_1} - \mu_{f_2}$.

Необходимость условия 1) очевидна, необходимость 2) доказывается так же, как и в упражнении 7. Докажем необходимость 3). Для этого заметим, что по определению вариации меры ν справедливо равенство $V([a,b), f_\nu) = v(\nu, [a,b))$ (см. упражнение 6). ▶

Упражнения

1. Пусть f — функция ограниченной вариации на промежутке J и c произвольная точка из J, не совпадающая с его правым концом. Доказать, что
$$\lim_{\varepsilon\to 0+} V\left((c, c+\varepsilon], f\right) = 0.$$

Решение. Если b — правый конец интервала J, то функция $V\left((c, c+\varepsilon], f\right)$ на интервале $0 < \varepsilon < b - c$ является неубывающей функцией ε. Поэтому мы можем провести доказательство от противного, предположив, что для некоторого положительного δ
$$V\left((c, c+\varepsilon], f\right) > \delta, \quad 0 < \varepsilon < b - c.$$

Таким образом, если $0 < \varepsilon_1 < b - c$, то на промежутке $(c, c+\varepsilon_1]$ найдутся n_1 точек a_i, b_i таких, что $c < a_{n-1} \leqslant b_{n_1} \leqslant \ldots \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant c + \varepsilon_1$ и что
$$\sum_{i=1}^{n_1} \left| f(b_i) - f(a_i) \right| > \delta.$$

Положим $\varepsilon_2 = a_{n_1} - c$. Так как $V\left((c, c+\varepsilon_2], f\right) > \delta$, то на $(c, c+\varepsilon_2] = (c, a_{n_1}]$ найдутся такие точки a_j, b_j, $j = n_1 + 1, \ldots, n_2$, что $c < a_{n_2} \leqslant b_{n_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{n_1+1} \leqslant b_{n_1+1} \leqslant c + \varepsilon_2 = a_{n_1}$ и что
$$\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left| f(b_i) - f(a_i) \right| > \delta.$$

Это рассуждение можно продолжить, полагая $\varepsilon_3 = a_{n_2} - c$ и выбирая соответствующим образом точки в $(c, c+\varepsilon_3]$. По индукции, ясно, что для каждого натурального $k = 1, 2, \ldots$ найдутся такие точки a_i, b_i, что $c < a_{n_k} \leqslant b_{n_k} \leqslant \ldots \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant c + \varepsilon_1$ и

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \big|f(b_i) - f(a_i)\big| > \delta, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Однако это противоречит тому, что f является функцией ограниченной вариации на J. ▶

2. Пусть $f \in \mathrm{BV}\,(\mathrm{J})$, где J — открытый интервал (a, b), который может быть как конечным, так и бесконечным, обладает свойством

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f\big(t + |\varepsilon|\big), \quad t \in J$$

(т. е. f непрерывна справа на J). Очевидно, что $\bar{J} = [a, b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ — компактное подмножество в расширенной области вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}}$; расширим область определения функции f до $\bar{J}$, полагая $f(a) = f(b) = 0$.

Пусть, далее, Σ есть алгебра всех конечных объединений

$$E = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n, \tag{3.5}$$

где каждое из интервалов I_j имеет один из двух видов $[a, d]$ или $(c, d]$, причем $a < c < d \leqslant b$.

Если интервалы I_j, $j = 1, \ldots, n$, в 3.5 не пересекаются, то, по определению, для $E \in \Sigma$ положим

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu(I_j),$$

где $\mu([a,d]) = f(d) - f(a)$ и $\mu((c,d]) = f(d) - f(c)$ при $a < c < d \leqslant b$.

Доказать следующие утверждения:

a) $\mu(E)$ определена корректно, μ — а. ф. м. на Σ и ограничена на Σ; кроме того, если E состоит из единственного промежутка, то $v(E,\mu) = V(E,f)$.

b) μ регулярна на Σ.

c) μ имеет регулярное счетно аддитивное продолжение на σ-алгебру всех борелевских множеств из $[a,b]$.

(Сужение этого продолжения на σ-алгебру борелевских подмножеств интервала (a,b) называется *мерой Радона* или *мерой Бореля—Стилтьеса* на (a,b), определяемой функцией f).

Указание. Для доказательства утверждения 2b) использовать упражнение 1, а утверждение 2c) следует из теоремы 3.3. ▶

3. Напомним, что функция f называется *кусочно монотонной* на промежутке $|a,b|$, если $|a,b|$ является объединением конечного числа таких промежутков

$$|a_0,a_1], [a_1,a_2], \ldots, [a_{n-1},a_n|, \quad a_0 = a, a_n = b,$$

что в каждом из интервалов (a_i,a_{i+1}) эта функция монотонна (отметим, что обычно используемые функции кусочно монотонны на ограниченном промежутке).

Доказать, что если $|a,b|$ — некоторый промежуток на $\mathbb{R}$ и функция f на $|a,b|$ вещественна, ограничена и кусочно монотонна, то она имеет на $|a,b|$ ограниченную вариацию.

Решение. Предполагая, например, $|a, b| = (a, b)$, покажем

$$V\left((a,b),f\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left|f(a_{i+1}-0) - f(a_i+0)\right| + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\left|f(a_i) - f(a_i-0)\right| + \left|f(a_i+0) - f(a_i)\right|\Big).$$

Мы можем записать

$$V\left(|a,b|\,,f\right) = V\left(|a_0,a_1]\,,f\right) + V\left([a_1,a_2]\,,f\right) + \cdots + V\left([a_{n-1},a_n|\,,f\right).$$

Так как по условию f ограничена на (a, b), то

$$\left|f(a_i)\right| < \infty, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

и из ограниченности и монотонности f на (a_i, a_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, n-1$, вытекает существование конечных пределов

$$f(a_0+0), f(a_n+0) \ \text{ и } \ f(a_i-0), f(a_i+0), \ i = 1, \ldots, n-1.$$

Следовательно, a_i, $i = 1, \ldots, n-1$ — точки разрыва первого рода.

Найдем $V\left((a_0, a_1], f\right)$. Пусть $a_0 < c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_{m-1} \leqslant c_m = a_1$ — произвольная конечная последовательность. Тогда, учитывая монотонность f на (a_0, a_1) имеем

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left|f(c_{i+1}) - f(c_i)\right| = \left|f(c_{m-1}) - f(c_1)\right| + \left|f(a_1) - f(c_{m-1})\right|.$$

Отсюда и из определения полной вариации f на $(a_0, a_1]$, учитывая, что последовательность $c_1, \dots, c_{m-1}$ взята произвольно из $(a_0, a_1]$, при $c_1 \to a_0$ $(c_1 > a_0)$ и $c_{m-1} \to a_1$ $(c_{m-1} < a_1$, получим

$$V\left((a_0, a_1], f\right) = \left|f(a_1 - 0) - f(a_0 + 0)\right| + \left|f(a_1 - 0) - f(a_1)\right|.$$

Найдем теперь

$$V\left([a_i, a_{i+1}], f\right), \; i = 1, \dots, n-2.$$

Пусть $\xi_0 = a_i < \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \dots \leqslant \xi_{m-1} < \xi_m = a_{i+1}$. Для этого разбиения, учитывая монотонность f на (a_i, a_{i+1}), $i = 1, 2, \dots, n-2$, имеем

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left|f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)\right| =$$

$$= \left|f(a_i) - f(\xi_1)\right| + \left|f(\xi_{m-1}) - f(\xi_1)\right| + \left|f(a_{i+1}) - f(\xi_{m-1})\right|$$

Отсюда (поскольку последовательность (ξ_j) взята произвольно и при замене последовательности (ξ_j) конечной последовательностью, содержащей данную, сумма $\sum_{j=0}^{m-1} \left|f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)\right|$ не убывает) при $\xi_1 \to a_i$ $(\xi_1 > a_i)$ и $\xi_{m-1} \to a_{i+1}$ $(\xi_{m-1} < a_{i+1})$ имеем для всех $= 1, 2, \dots, n-2$:

$$V\left([a_i, a_{i+1}], f\right) = \left|f(a_i) - f(a_i + 0)\right| +$$
$$+ \left|f(a_{i+1} - 0) - f(a_i + 0)\right| + \left|f(a_{i+1}) - f(a_{i+1} - 0)\right|.$$

Наконец, найдем $V\left([a_{n-1}, a_n], f\right)$. Пусть, как и выше, $\xi_0 = a_{n-1} < \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \dots \leqslant \xi_{m-1} \leqslant \xi_m < a_n$ — произвольная последовательность. Тогда

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left|f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)\right| = \left|f(\xi_1) - f(a_{n-1})\right| + \left|f(\xi_m) - f(\xi_1)\right|$$

Отсюда, рассуждая как выше, получим

$$V\left([a_{n-1}, a_n], f\right) = \bigl|f(a_{n-1} - 0) - f(a_{n-1})\bigr| + \bigl|f(a_n - 0) - f(a_{n-1} + 0)\bigr|.$$

Следовательно, выражение для $V\left((a, b), f\right)$ получено.

Отметим, что если ограниченная функция f кусочно монотонна на (a, b) и непрерывна слева (соотв. справа) в точках $a_1, \ldots, a_{n-1}$, то в выражении для $V\left((a, b), f\right)$ слагаемые

$$\bigl|f(a_i) - f(a_i - 0)\bigr| \quad \Bigl(\text{соотв. } \bigl|f(a_i) - f(a_i - 0)\bigr|\Bigr), \ i = 1, \ldots, n - 1,$$

равны нулю. ►

4. Пусть функция g интегрируема на $[a, b]$ по Риману и

$$f(x) \doteqdot \int\limits_a^x g(t)\, dt,$$

$$g^+(x) \doteqdot \max\{g(x), 0\}, \quad g^-(x) \doteqdot -\min\{g(x), 0\}.$$

Показать, что f — функция ограниченной вариации на $[a, b]$ и ее неопределенные вариации (полная, положительная и отрицательная) для всех $x \in [a,b]$ задаются равенствами

$$V([a,x],f) = \int\limits_a^x |g(t)|\,dt,$$

$$p(x) = \int\limits_a^x g^+(t)\,dt, \quad q(x) = \int\limits_a^x g^-(t)\,dt,$$

Указание. Так как $\sup\limits_{[a,b]} |g(t)| = M < \infty$, то

$$\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]\colon \big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leqslant M \cdot |x_1 - x_2|,$$

Следовательно, $f \in \mathrm{BV}([\mathrm{a},\mathrm{b}])$.
Мы покажем, что

$$V([a,b],f) = \int\limits_a^b |g(t)|\,dt,$$

Отсюда будет следовать, что

$$\forall\, x \in [a,b]\colon V([a,x],f) = \int\limits_a^x |g(t)|\,dt$$

ибо рассуждения для $[a,b]$ и $[a,x]$ одинаковые.

Пусть $\Delta = \{a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b\}$ — произвольное разбиение $[a, b]$. Тогда

$$\Sigma_\Delta \doteqdot \sum_{i=0}^{n-1} \left|f(c_{i+1}) - f(c_i)\right| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} g(t)\,dt \right| \leqslant \int\limits_a^b \left|g(t)\right| dt,$$

откуда, переходя в суммах Σ_Δ к точной верхней грани, получим

$$V\left([a, b], f\right) \leqslant \int\limits_a^b \left|g(t)\right| dt$$

Докажем, что в этом неравенстве вместо знака «$\leqslant$» будет знак «$=$». Для этого мы получим противоположное неравенство последнему. Сначала предположим, что g непрерывна на $[a, b]$. Тогда g равномерно непрерывна на $[a, b]$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что из $|x' - x''| \leqslant \eta$ следует

$$\left|g(x') - g(x'')\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Пусть теперь Δ — некоторое разбиение интервала $[a, b]$: $a = c_0 \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_{n-1} \leqslant c_n = b$, максимальная из длин промежутков в котором $\leqslant \eta$. Тогда для $c_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ имеем

$$\left||g(x)| - |g(c_i)|\right| \leqslant \left|g(x) - g(c_i)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Теперь можно установить следующие соотношения:

$$f(c_{i+1}) - f(c_i) = \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} g(t)\,dt = g(c_i)\int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} dt + \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} [g(t) - g(c_i)]\,dt,$$

$$\left|f(c_{i+1}) - f(c_i)\right| \geqslant |g(c_i)| \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} dt - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} dt.$$

Однако

$$|g(c_i)| \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} dt \geqslant \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} |g(t)|\,dt \geqslant - \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} |g(t) - g(c_i)|\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} |g(t)|\,dt - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} dt.$$

Окончательно,

$$\left|f(c_{i+1}) - f(c_i)\right| \geqslant \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} |g(t)|\,dt - \frac{\varepsilon}{b-a} \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} dt.$$

Отсюда получим

$$V([a,b], f) \geqslant \Sigma_\Delta \geqslant \int\limits_a^b |g(t)|\,dt - \frac{\varepsilon}{b-a}\int\limits_a^b dt = \int\limits_a^b |g(t)|\,dt - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$V\left([a,b],f\right) \geqslant \int\limits_a^b \left|g(t)\right| dt.$$

Пусть теперь g — произвольная интегрируемая по Риману функция на $[a,b]$. Тогда при заданном $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a,b]$ функция φ, что

$$\int\limits_a^b \left|g(t)-\varphi(t)\right| dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(см., например, []).}$$

По доказанному имеем

$$V\left([a,b],f\right) \leqslant \int\limits_a^b \left|g(t)\right| dt, \quad V\left([a,b],\psi\right) \leqslant \int\limits_a^b \left|\varphi(t)\right| dt,$$

где $\psi(x) \div \int_a^x \varphi(t)\,dt$ и $V\left([a,b],f-\psi\right) \leqslant \int_a^b \left|g(t)-\varphi(t)\right| dt.$

Из

$$V\left([a,b],\psi\right) \geqslant V\left([a,b],\psi-f\right) + V\left([a,b],f\right)$$

получим

$$V\left([a,b],f\right) \geqslant V\left([a,b],\psi\right) - V\left([a,b],\psi-f\right).$$

Следовательно,

$$V\left([a,b],f\right) \geqslant \int\limits_a^b \bigl|\varphi(t)\bigr|\,dt - \int\limits_a^b \bigl|g(t)-\varphi(t)\bigr|\,dt \geqslant \int\limits_a^b \bigl|\varphi(t)\bigr|\,dt - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_a^b \bigl|g(t)\bigr|\,dt - \int\limits_a^b \bigl|g(t)-\varphi(t)\bigr|\,dt - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \int\limits_a^b \bigl|g(t)\bigr|\,dt - \varepsilon.$$

Отсюда, поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, вытекает

$$V\left([a,b],f\right) \geqslant \int\limits_a^b \bigl|g(t)\bigr|\,dt.$$

Итак,

$$V\left([a,b],f\right) = \int\limits_a^b \bigl|g(t)\bigr|\,dt.$$

Так как

$$f(0)=0,\ f(x) \div \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x g^+(x)\,dt - \int_a^x g^-(x)\,dt,$$
$$V\left([a,x],f\right) = \int_a^x \bigl|g(t)\bigr|\,dt = \int_a^x g^+(x)\,dt + \int_a^x g^-(x)\,dt$$

и при $x \in [a,b]$

$$2p(x) = V\left([a,x],f\right) + f(x), \quad 2q(x) = V\left([a,x],f\right) - f(x),$$

то, очевидно,

$$p(x) = \int_a^x g^+(x)\,dt \;\text{ и }\; q(x) = \int_a^x g^-(x)\,dt.$$

Утверждение доказано. ▶

5. Пусть $g \in \mathrm{L}^1_{([a,b])}$ и $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Доказать, что для $f(t)$ справедливы все утверждения упражнения 4.

   Указание. Доказывается по той же схеме, что и доказательство упражнения 4. ▶

6. Доказать, что вариация вещественной и комплексной меры конечна и σ-аддитивна.

7. Пусть f — вещественная функция ограниченной вариации на $[a,b]$, p и q — неопределенные положительная и отрицательная вариации функции f, p_1 и q_1 — возрастающие функции на $[a,b]$ и $f = p_1 - q_1$. Доказать,

$$V\left([a,b],p\right) \leqslant V\left([a,b],p_1\right) \;\text{ и }\; V\left([a,b],q\right) \leqslant V\left([a,b],q_1\right).$$

8. Пусть функция $f(x) = \sqrt{x}$ при $x \in [0,1]$, а на отрезке $[0,1]$ функция $g(y)$ имеет вид

$$g(y) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0; \\ 0 & \text{при } x = \frac{1}{2n},\ n = 1, 2, \dots; \\ 1/n^2 & \text{при } x = \frac{1}{2n-1},\ n = 1, 2, \dots; \\ \text{линейна} & \text{на оставшихся интервалах.} \end{cases}$$

Показать, что обе эти функции абсолютно непрерывны, в то время как композиция $f\big(g(y)\big) = \sqrt{g(y)}$ даже не является функцией ограниченной вариации.

9. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = \alpha \in [0,1]; \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \{\alpha\}. \end{cases}$$

Представить $f(x)$ в виде разности двух неубывающих на $[0,1]$ функций.

Указание. Положим, например, $f_1(x) = \chi_{[\alpha,1]}(x)$ и $\chi_{(\alpha,1]}(x)$. ▶

10. Пусть $f(x)$ — конечная функция на $[a,b]$, а $\varphi(x)$ — строго возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$, причем $\varphi(a) = a$ и $\varphi(b) = b$. Доказать, что $f \in \mathrm{BV}\left([\mathrm{a},\mathrm{b}]\right)$ тогда и только тогда, когда $g(x) = f\big(\varphi(x)\big) \in \mathrm{BV}\left([\mathrm{a},\mathrm{b}]\right)$.

11. Построить такие функции $f.g \in \mathrm{BV}\left([0,1]\right)$, что

$$V\left([0,1], f+g\right) < V\left([0,1], f\right) + V\left([0,1], g\right).$$

Указание. Например, $f(x) = x$ и $g(x) = -x$ на $[0, 1]$. ▶

12. Пусть f и $g \in \mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$. Доказать, что $f \cdot g \in \mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ и

$$V([a, b], fg) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in[a,b]} \big|g(x)\big| \cdot V([a, b], f) + \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| \cdot V([a, b], g).$$

13. Пусть $f \in \mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ и $\big|f(x)\big| \geqslant C > 0$ при $x \in [a, b]$. Доказать, что

$$\frac{1}{f(x)} \in \mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}]).$$

14. Пусть $f, g \in \mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$. Доказать, что

$$h(x) = \max\{g(x), f(x)\} \in \mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}]).$$

Указание. Использовать неравенство

$$\forall\, \alpha, \beta \in [a, b] \colon \Big|\max\big(f(\beta), g(\beta)\big) - \max\big(f(\alpha), g(\alpha)\big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \max\big(|f(\beta) - f(\alpha)|, |g(\beta) - g(\alpha)|\big).$$

▶

15. Доказать, что если $f \in \mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$, то $|f| \in \mathrm{BV}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ и

$$V([a, b], |f|) \leqslant V([a, b], f).$$

16. Построить $f \notin \mathrm{BV}([0,1])$, для которой $|f| \in \mathrm{BV}([0,1])$.

17. Пусть $0 < \alpha < 1$. Можно ли утверждать, что если $f \in \mathrm{Lip}_{(\alpha)}([0,1])$, то $f \in \mathrm{BV}([0,1])$.

Указание. Нет (см., например, задачу 14.28 из []). ▶

18. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin x^{\beta} & \text{при } x \in (0,1]; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta < 0$. Найти, при каких α и β имеет место $f \in \mathrm{BV}([0,1])$.

Указание. $f \in \mathrm{BV}([0,1]) \Leftrightarrow \alpha + \beta \geqslant 0$. ▶

19. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin x^{\beta} & \text{при } x \in (0,1]; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta < 0$. Доказать, что

$$f \in \mathrm{BV}([0,1]) \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0.$$

+

20. Пусть $f \in \mathrm{BV}([0,2\pi])$ и $f(2\pi) = f(0)$. Доказать, что каждый из интервалов

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

не превосходит $V([0,2\pi], f)/n$ по абсолютной величине.

Литература

1. *Федоров И. М. Теория функций и функциональный анализ.* — ч.I. — И.: МГУ, 2000.

2. *Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология.* — М.: Высшая школм, 1979.

3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы.* — Т.1. — М.: ИЛ, 1962.

4. *Константинов Р. В. Лекции по функциональному анализу.* — М.: МФ-ТИ, 2009.

5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.* — М.: Наука, 1981.

6. *Рисс Ф., Секевальфи-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.

7. *Шварц Л.* Анализ. — *Т.1.* — М.: Мир, 1972.

8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.

9. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979.

10. *Ульянов П. Л., Бахвалов А. Н., Дьяченко М. И., Казарян К. С., Сифуэнтес П.* Действительный анализ в задачах. — М.: Физматлит, 2005.

11. *Халмош П.* Теория меры. — М.: ИЛ, 1953.

Рамазанов Абдул–Рашид Кехриманович,
Рагимханов Римихан Курбанович,
Рагимханов Вадим Римиханович

Аддитивные функции множества и смежные вопросы

Учебное пособие

Издательство ДГУ
г. Махачкала, ул. М. Ярагского, 59^{e}