МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рагимханов В. Р.

Дискретная математика. Часть II. Элементы комбинаторики

Махачкала
2019

Издается по решению РИСа ДГУ.

Рагимханов В. Р.
Дискретная математика. Часть II. Элементы комбинаторики. — Махачкала: Издательство ДГУ, 2019. — 60 с.

В настоящем учебном пособии изложены основные понятия перечислительной комбинаторики. Пособие предназначено студентам физико-математических направлений. Оно может быть использовано при изучении соответствующего раздела дисциплины «Дискретная математика», а также базирующихся на ней специальных дисциплин.

Рецензенты: *Раджабов К. Я.* — декан фак. ИТиУ ДГУНХ,
кандидат экономических наук, доцент

© Издательство ДГУ, 2019

Оглавление

Введение 5
1 Напоминания и обозначения 7
1.1 Множества и функции 7
1.2 Мультимножества 9
1.3 Упорядоченные множества 10
1.4 Алфавит 12
1.5 Дизъюнктное покрытие множества и разбиения 14
2 Основные правила перечисления 15
2.1 Выборки 16
2.2 Основные правила перечисления 19
3 Перестановки и сочетания 25
3.1 Перестановки без повторений 26
3.2 Перестановки с повторениями 30
3.3 Сочетания без повторений 33
3.4 Сочетания с повторениями 39
3.5 Итоговые формулы 43
4 Биномиальные и полиномиальные коэффициенты 45
4.1 Основные свойства биномиальных коэффициентов и биномиальная теорема 45
4.2 Полиномиальные коэффициенты и полиномиальная теорема 52
5 Упорядоченные и неупорядоченные разбиения числа 58
5.1 Упорядоченные разбиения числа 58

5.2 Неупорядоченные разбиения числа 63
6 Числа Стирлинга второго рода и числа Белла 68
6.1 Числа Стирлинга второго рода 68
6.2 Числа Белла 76
7 Формула включений и исключений 78
7.1 Формула включений и исключений 78
7.2 Задача о совпадениях 82
Литература 84

Введение

Комбинаторика является одной из древних областей математики. Несмотря на то, что некоторые комбинаторные задачи имеют четырехтысячелетнюю историю, до появления компьютеров комбинаторика занималась, в основном, проблематикой развлекательного характера (головоломки, азартные игры и др.).

В связи с развитием вычислительной техники в математике началось смещение интересов в сторону дискретных методов. Как следствие, в этот период стала пробуждаться комбинаторика.

В настоящее время комбинаторика является динамически и плодотворно развивающейся областью математики и находит многочисленные приложения в самых различных (порой неожиданных) разделах математики, компьютерных наук, физики, биологии и др.

Тематика современной комбинаторики весьма разнообразна — перечислительные и экстремальные задачи, комбинаторные алгоритмы, проблемы существования, выбора и расположения, геометрические и алгебраические интерпретации. Историей и становлением комбинаторики можно ознакомиться в [10].

Данное пособие посвящено началам *перечислительной комбинаторики.*

Одну из типичнейших задач перечислительной комбинаторики можно сформулировать следующим образом. Пусть даны конечные множества $A_1, A_2, \ldots$, элементы которого хорошо описаны, и мы знаем количество элементов в каждом из A_k. Рассмотрим новые конечные множества $B_1, B_2, \ldots$, элементы которого конструируются (= комбинируются) по определённым правилам из элементов множеств $A_1, A_2, \ldots$. Вопрос, который относится к компетенции перечислительной комбинаторики, звучит просто: «Сколько элементов во множествах B_k, $k = 1, 2, \ldots$»?

Как уже отмечено, данное пособие посвящено *началам* перечислительной ком-

бинаторики, то есть самым что ни на есть первичным её понятиям.

Пособие ориентировано на студентов математических специальностей и предназначено для первого знакомства с элементарными понятиями и методами перечислительной комбинаторики.

Для студентов, которым стиль изложения данного пособия кажется несколько занудным и которые предпочитают освоение материала через разбор задач, можно рекомендовать книги [2, 3, 18].

Для студентов, которые хотели бы глубже вникнуть в предмет, получить более систематическое и современное представление о перечислительной комбинаторике, автор настоятельно рекомендует прекрасно организованные книги [1, 12, 13, 17], написанные известными специалистами.

1. Напоминания и обозначения

В данном параграфе мы для удобства читателя приводим определения, факты и обозначения, которые используются в дальнейшем.

1.1. Множества и функции

✓*Мощностью* множества называется количество элементов в этом множестве; мощность множества M обозначается через $|M|$ или через $\#M$. Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов.

✓Пусть n — целое число $\geqslant 0$; *n-множеством* называется множество мощности, равной n, т.е. множество, состоящее из n элементов; *n-подмножеством* множества M называется подмножество M мощности n.

✓Множество, состоящее из всех подмножеств множества M мощности k, будем обозначать через $M^{(k)}$ или $\binom{M}{k}$. Множество всех подмножеств множества M называется *булеаном* множества M и обозначается через $\mathcal{B}(M)$ или 2^M.

✓*Функцией*, или *отображением*, из множества N во множество R называется правило f, согласно которому каждому элементу из множества N сопоставляется один определённый элемент из множества R. Функция f из N в R обозначается через $f\colon N \to R$; при этом, если элементу x из N сопоставляется элемент y из R, то пишут $y = f(x)$ или $f\colon x \mapsto y$.

✓*Стандартным представлением* называется представление функции $f\colon N \to R$ в виде таблицы

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix},$$

где в верхнюю строку вписаны (в произвольном порядке) элементы области определения $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, а в нижнюю строку — соответствующие им значения функции.

Функция $f\colon N \to R$ называется

✓ *инъекцией* (*взаимно однозначной функцией из* N *в* R), если она различные элементы из N переводит в различные элементы в R:

$$\Big(f\colon N \to R - \text{инъекция}\Big) := \Big(\text{из } n_1 \neq n_2 \text{ следует } f(n_1) \neq f(n_2)\Big);$$

✓ *сюръекцией* (*надъективной функцией* или *функцией из* N *на* R), если в каждый элемент из R отображается хотя бы один элемент из N:

$$\Big(f\colon N \to R - \text{сюръекция}\Big) := \big(\text{для любого } r \in R \text{ найдется } n \in N, \text{ что } r = f(n)\big);$$

✓ *биекцией* (*взаимно однозначной функцией из* N *на* R), если она одновременно является инъекцией и сюръекцией:

$$\Big(f\colon N \to R - \text{биекция}\Big) := \Big(f - \text{инъекция и } f - \text{сюръекция}\Big).$$

Напомним также обозначения:

✓ $\mathbf{Map}\,(N, R)$ — множество всех функций из N в R;

✓ $\mathbf{Inj}\,(N, R)$ — множество всех инъекций из N в R;

✓ $\mathbf{Sur}\,(N, R)$ — множество всех сюръекций из N в R;

✓ $\mathbf{Bij}\,(N, R)$ — множество всех биекций из N в R.

1.2. Мультимножества

✓ *Мультимножеством над множеством* A называется пара $S = (A, k_S)$, где A — множество, а k_S — «выбирающая» функция

$$k_S \colon A \to \mathbb{Z}_+.$$

Пример 1.1. Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$ и

$$k_S = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Тогда $S = (A, k_S)$ — мультимножество над A.

Неформально это мультимножество можно представлять как «множество», составленное с помощью элементов множества A, из которого элемент a «выбирается/копируется» два раза, элемент b вообще не выбирается, элемент c «выбирается/копируется» один раз, элемент d «выбирается/копируется» три раза, а элемент e — пять раз.

В случае, когда множество A конечное (именно с этим случаем мы в основном и будем иметь дело),

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

мультимножество $S = (A, k_S)$ будем обозначать и так:

$$S = \{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}\}, \quad \text{где} \quad k_i = k_S(a_i),\ i = 1, 2, \quad , n,$$

или даже

$$S = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n},$$

если это не будет приводить к двусмысленности. При этом договоримся, что если $k_i = k_S(a_i) = 0$, то a_i^0 в записи $S = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$ можем пропускать, а если $k_i = k_S(a_i) = 1$, то вместо a_i^1 в записи $S = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$ разрешается писать просто a_i.

Так, например, для записи мультимножества из предыдущего примера приемлем любой из следующих вариантов:

$$\{a^2b^0c^1d^3e^5\},\ \{a^2c\,d^3e^5\},\ a^2b^0c^1d^3e^5,\ a^2cd^3e^5,\ c\,a^2e^5d^3 \quad \text{и т. д.}$$

✓*Мощностью* мультимножества $S = (A, k_S)$ называется число $\sum_{a\in A} k_S(a)$. Мощность мультимножества $S = (A, k_S)$ будем обозначать через $|S|$. Таким образом, $|S| := \sum\limits_{a\in A} k_S(a)$.

Если $S = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$, то $|S| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

✓*r-мультимножеством* называется мультимножество мощности r.

✓Множество всех r-мультимножеств над множеством M будем обозначать через $M^{[r]}$ или $\left(\!\binom{M}{r}\!\right)$.

1.3. Упорядоченные множества

✓*Упорядоченным множеством* называется пара $(P, \leqslant)$, где P — множество, а $\leqslant$ — бинарное отношение на P, такое, что для всех x, y, z из P выполняются

условия

(P1) $x \leqslant x$ (*рефлексивность*);

(P2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$ (*антисимметричность*);

(P3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (*транзитивность*).

✓Если, кроме того, для любых x, y из P

(P4) $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ (*симметричность*),

то говорят, что $(P, \leqslant)$ *линейно упорядочено* или, что $(P, \leqslant)$ является *цепью*.

Конечное упорядоченное множество P является линейно упорядоченным (цепью) тогда и только тогда, когда все его элементы можно выписать «одной цепью»:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n.$$

Для конечных линейно упорядоченных множеств P будем применять запись

$$P = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_n\} \quad \text{или} \quad P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}_<$$

При этом естественно называть элемент a_1 — первым, a_2 — вторым, ..., a_n — последним элементом линейно упорядоченного множества P.

Пусть $(N, \leqslant)$ и $(R, \preceq)$ — упорядоченные множества. Отображение $f\colon N \to R$ называется

✓*монотонным*, если из $a \leqslant b$ следует $f(a) \preceq f(b)$;

✓*строго монотонным*, если из $a < b$ следует $f(a) \prec f(b)$.

Обозначения:

- ✓ **Mon** (N, R) — множество всех монотонных отображений из N в R;
- ✓ **SMon** (N, R) — множество всех строго монотонных отображений из N в R.

1.4. Алфавит

- ✓ *Алфавитом* называется непустое множество $\mathcal{A}$. Его элементы называются *буквами* или *символами* алфавита $\mathcal{A}$.
- ✓ *Словом* в алфавите $\mathcal{A}$ называется конечная последовательность элементов из $\mathcal{A}$. Отметим, что порядок следования букв в слове существенен. Так, например, если $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ — алфавит, то слова $aabb$ и $bbaa$ являются различными.
- ✓ Слово, не содержащее ни одного символа, называется *пустым словом* и обозначается греческой буквой ламбда Λ.
- ✓ Слово называется точным, если оно составлено из попарно различных букв.
- ✓ *Длиной* слова называется число букв в этом слове, причем каждая буква считается столько раз, сколько раз она встречается в этом слове. Длину слова w будем обозначать через $|w|$. Так, например, $|abbccaa| = 7$, а длина пустого слова равна нулю: $|\Lambda| = 0$.
- ✓ Через $|w|_a$ будем обозначать количество вхождений буквы a в слово w. Например, $|baacca|_a = 3, |baacca|_b = 1, |baacca|_c = 2, |baacca|_d = 0$.
- ✓ Пусть E — подмножество алфавита $\mathcal{A}$. Через $|w|_E$ будем обозначать количество

вхождений букв из множества E в слово w. Иначе говоря, если $E = \{a_1, \ldots, a_k\}$, то

$$|w|_E = |w|_{a_1} + \cdots + |w|_{a_k}.$$

Например, если $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ и $E = \{a, c, e\}$, то

$$|\,baacca|_E = |\,baacca|_a + |\,baacca|_c + |\,baacca|_e = 3 + 2 + 0 = 5.$$

✓ *Упорядоченным алфавитом* называется непустое *линейно упорядоченное* множество $\mathcal{A}$.

Для обозначения упорядоченного алфавита будем пользоваться символами $\mathcal{A}_<$, $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}_<$ или $\mathcal{A} = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_n\}$. Так, например, в упорядоченном алфавите $\mathcal{A} = \{a < 1 < b < \heartsuit\}$ буква a является первой, буква 1 — второй, буква b — третьей, а буква $\heartsuit$ — четвертой буквой алфавита.

✓ Слово $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$ в упорядоченном алфавите $\mathcal{A} = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_n\}$ называется *монотонным*, если $a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_k}$.

Например, в алфавите $\mathcal{A} = \{a < b < c < d < e < f\}$ слова

$$bbbceef,\ aabccccdef,\ abcdef,\ aaaaa,\ aabbccddeeff$$

являются монотонными, а слова

$$abbacd \quad (\text{т.к. } b \not\leqslant a),\ aacedee \quad (\text{т.к. } e \not\leqslant d),\ bccdaae \quad (\text{т.к. } d \not\leqslant a)$$

не являются монотонными.

✓ Слово $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$ в упорядоченном алфавите $\mathcal{A} = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ называется *строго монотонным*, если $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k}$.

Например, в алфавите $\mathcal{A} = \{a < b < c < d < e < f\}$ слова

$$abcdef,\ as,\ ace,\ cdef$$

являются строго монотонными, а слова

$$ab\underline{cc}cd \quad (\text{т.к. } c \not< c),\ bc\underline{fd}ee \quad (\text{т.к. } f \not< d),\ abc\underline{db}ae \quad (\text{т.к. } d \not< b)$$

не являются строго монотонными.

1.5. Дизъюнктное покрытие множества и разбиения

✓ *Разбиением множества* M называется дизъюнктное покрытие $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ множества M такое, что $A_i \neq \varnothing$ для всех $i \in I$. Таким образом, семейство $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ образует разбиение множества M, если

1) $M = \bigcup_{i\in I} A_i$;

2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

3) $A_i \neq \varnothing$ при всех $i \in I$.

Пример 1.2. Пусть $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Тогда семейство

$$\mathcal{A} = \big\{\{a\}, \{b, e, d\}, \{c, f\}, \{g\}\big\}$$

составляет разбиение множества M, т. к.

$$M = \{a\} \cup \{b, e, d\} \cup \{c, f\} \cup \{g\},$$

и любые два различных множества из семейства $\mathcal{A}$ не имеют общих элементов. Это разбиение $\mathcal{A}$ множества M мы обозначаем следующим образом:

$$\mathcal{A} = a\big|b, e, d\big|c, f\big|g.$$

Каждое разбиение множества M является, конечно, его дизъюнктным покрытием. С другой стороны, каждое дизъюнктное покрытие $\mathcal{A}$ множества M единственным образом определяет разбиение $\mathcal{A}'$ этого множества M. Неформально говоря, разбиение $\mathcal{A}'$ получается из дизъюнктного покрытия $\mathcal{A}$ вычеркиванием пустых множеств из семейства $\mathcal{A}$. Формально: разбиение $\mathcal{A}'$ множества M, порожденное дизъюнктным покрытием $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ множества M, является подсемейством $\mathcal{A}' = \{A_i\}_{i\in I'}$ семейства $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, где $I' = \{i \in I \mid A_i \neq \varnothing\}$.

2. Основные правила перечисления

Данный параграф посвящён изложению нескольких приемов, применяемых при подсчёте мощности множеств, элементы которых имеют относительно несложную комбинаторную природу. Эти приёмы являются столь обыденным арсеналом

исследователя и используются им так часто при решении различных перечислительных задач, что их называют основными правилами комбинаторики.

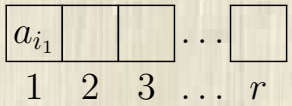
2.1. Выборки

В качестве элементарного конструктивного приема построения новых множеств из заданного множества N мы примем процедуры *выборок*: мы будем выбирать элементы из множества N, а затем *комбинировать* их, руководствуясь определёнными правилами. Перейдем к точным определениям.

Определение 2.1. Пусть $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — заданное множество и r — целое неотрицательное число. *Выборкой объема r из множества N*, или *(N, r)-выборкой*, называется последовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, состоящая из r элементов, где $a_{i_k} \in N$.

Саму последовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ мы представляем себе как результат следующей «процедуры–выборки»:

1) выбираем «копию» элемента a_{i_1} из N и располагаем её на 1-м месте:



2) выбираем «копию» элемента a_{i_2} из N и располагаем её на 2-м месте:

a_{i_1}	a_{i_2}		$\ldots$	
1	2	3	$\ldots$	r

. . . . . .

r) выбираем «копию» элемента a_{i_r} из N и располагаем её на r-м месте:

a_{i_1}	a_{i_2}	a_{i_3}	$\ldots$	a_{i_r}
1	2	3	$\ldots$	r

Что касается правил комбинирования выбранных элементов, то у нас их будет два: мы будем следить за *порядком* комбинирования (= расположения) элементов и за *повторениями* выбираемых элементов.

✓ *Упорядоченные* (N, r)*-выборки* (= (N, r)*-перестановки*).

Если в (N, r)-выборке $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ нам важен порядок следования элементов, то говорим об *упорядоченной* (N, r)*-выборке.*

Таким образом, *переставляя* местами различные элементы в выборке $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, мы будем получать разные упорядоченные (N, r)-выборки. По этой причине упорядоченные выборки будем называть (N, r)*-перестановками.*

✓ *Неупорядоченные* (N, r)*-выборки* $(= (N, r)$*-сочетания*$)$.

Если в (N, r)-выборке $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ нам не важен порядок следования элементов, то говорим о *неупорядоченной* (N, r)*-выборке.*

В неупорядоченной (N, r)-выборке, переставляя местами выбранные элементы, мы не будем получать новые неупорядоченные (N, r)-выборки. Таким образом, в неупорядоченных выборках важно лишь как *сочетаются* выбранные элементы. Поэтому неупорядоченные (N, r)-выборки будем называть (N, r)*-сочетаниями.*

✓ (N, r)*-выборка без повторений.*

Если в (N, r)-выборке $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ не допускаются повторения элементов, то она называется (N, r)*-выборкой без повторений.*

✓ (N, r)*-выборка с повторениями.*

Если в (N, r)-выборке $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ разрешаются повторения элементов, то она называется (N, r)*-выборкой с повторениями.*

Таким образом, мы имеем четыре основных класса (N, r)-выборок, представленных на следующей диаграмме:

В следующем параграфе мы научимся подсчитывать количества всевозможных (N, r)-выборок. Но прежде остановимся на основных правилах перечислительной комбинаторики, которыми мы постоянно будем пользоваться при решении различных задач комбинаторики.

2.2. Основные правила перечисления

Существует несколько стандартных приёмов для подсчёта числа элементов во множествах, элементы которых имеют не очень сложное описание. По традиции мы сформулируем эти приёмы в виде трёх правил: правило равенства, правило суммы и правило произведения.

ПРАВИЛО РАВЕНСТВА. *Число элементов во множестве M равно числу элементов во множестве N в том и только в том случае, если между множествами M и N можно установить биективное соответствие:*

$$\Big(\text{существует биекция } f\colon M \to N\Big) \Longleftrightarrow \Big(|M| = |N|\Big).$$

ПРАВИЛО СУММЫ. *Если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — попарно непересекающиеся множества, то*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. *Пусть M множество, каждый элемент которого можно построить в k шагов, причём*

на 1-м шаге имеется $\boxed{n_1}$ способов выбора этого шага,
на 2-м шаге имеется $\boxed{n_2}$ способов выбора этого шага,
. . . . . .
на k-м шаге имеется $\boxed{n_k}$ способов выбора этого шага.

При этом, если на «выходе этой процедуры» при различных выборах шагов получаются различные элементы множества M, то число элементов во множестве M равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Сделаем некоторые комментарии к приведённым правилам.

Комментарий к правилу равенства. Представьте себе следующую ситуацию: вы заходите в зал кинотеатра, садитесь на свое место и видите, что все места заняты. Вопрос: что больше число кресел или число зрителей в зале? Не нужно знать комбинаторику или какую-либо другую «науку», чтобы уверенно утверждать, что число кресел равно числу зрителей. *Мы не знаем, сколько мест и сколько зрителей в зале, но правильный вывод о равенстве этих чисел мы можем сделать.* Это, пожалуй, самый древний из известных человечеству способов сравнения двух множеств. Но где же здесь математика? А математика здесь такая: пусть M — множество всех зрителей в зале, а N — множество всех кресел в зале. Тогда выписанные кассиром билеты определяют способ рассадки зрителей (элементов множества M) по креслам (элементам множества N), т. е. некоторую функцию $f\colon M \to N$ ($f(x) = y$ означает, что зритель x сидит в кресле y).

Далее, так как разные зрители сидят в разных креслах, то f — инъекция, а так как все места заняты, то f — сюръекция. Таким образом, $f\colon M \to N$ — биективное отображение и с точки зрения математики (и, как видно, это вполне соответствует здравому смыслу), из биективности f мы можем сделать вывод, что $|M| = |N|$.

Описанная ситуация является типичной при использовании правила равенства: пусть нам нужно узнать число элементов множества M (= «зрителей в зале»). Если удастся установить биективное соответствие между множеством M и некоторым множеством N (= «множеством кресел»), то по правилу равенства число элементов во множестве M такое же, как во множестве N; при этом найти количество элементов множества N может оказаться проще. (В описанной выше ситуации со зрителями в зале, чтобы узнать количество кресел мы можем, например, обратиться к администратору кинотеатра).

Комментарий к правилу суммы. Это правило ещё более очевидное. Поэтому в

качестве комментария к нему ограничимся задачей для первоклассников. Бабушка возвращается с рынка с двумя сумками. В одной сумке (множество A_1) находится 20 яблок, а в другой (множество A_2) — 25 яблок. Сколько яблок несёт бабушка?

Комментарий к правилу произведения. Из трёх правил перечисления правило произведения является, вероятно, наименее очевидным. Для доказательства этого правила мы сведём его к другой задаче (по правилу равенства!).

Сопоставим процедуре построения множества M в этом правиле дерево T_M следующим образом:

(0) Фиксируем корень дерева (назовём его вершиной уровня 0).

(1) Выпустим из вершины уровня 0 n_1 рёбер (получающееся дерево обозначим через $T_M^{(1)}$, а его листья назовём вершинами уровня 1 дерева T_M).

Напомним, что *листьями* дерева называются его вершины степени 1.

(2) Выпустим из каждой вершины уровня 1 по n_2 рёбер (получающееся дерево обозначим через $T_M^{(2)}$, а его листья назовём вершинами уровня 2 дерева T_M).

. . . . . .

(k) Выпустим из каждой вершины уровня $k-1$ по n_k рёбер (получающееся дерево обозначим через $T_M = T_M^{(k)}$, а его листья назовём вершинами уровня k дерева T_M).

Тогда число элементов множества M равно количеству листьев построенного дерева T_M.

Дерево T_M назовем *деревом выборов* множества M, а число k — *глубиной дерева* T_M.

Поясним приведённые рассуждения примером.

Пример 2.1. Подсчитать число различных точных слов длины 3 в алфавите $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$.

Решение. Пусть M — множество слов длины 3 в алфавите $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$. Каждое слово из M можно однозначно построить в три шага:

1-й шаг: выберем первую букву слова — это можно сделать 4-мя способами,
2-й шаг: выберем вторую букву слова — это можно сделать 3-мя способами, т. к. нельзя повторять букву, выбранную на первом шаге,
3-й шаг: выберем третью букву слова — это можно сделать 2-мя способами, т. к. нельзя повторять две буквы, выбранные на первом и втором шаге.

По правилу произведения количество искомых слов равно $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Соответствующее дерево T_M представлено на рисунке 2.1.

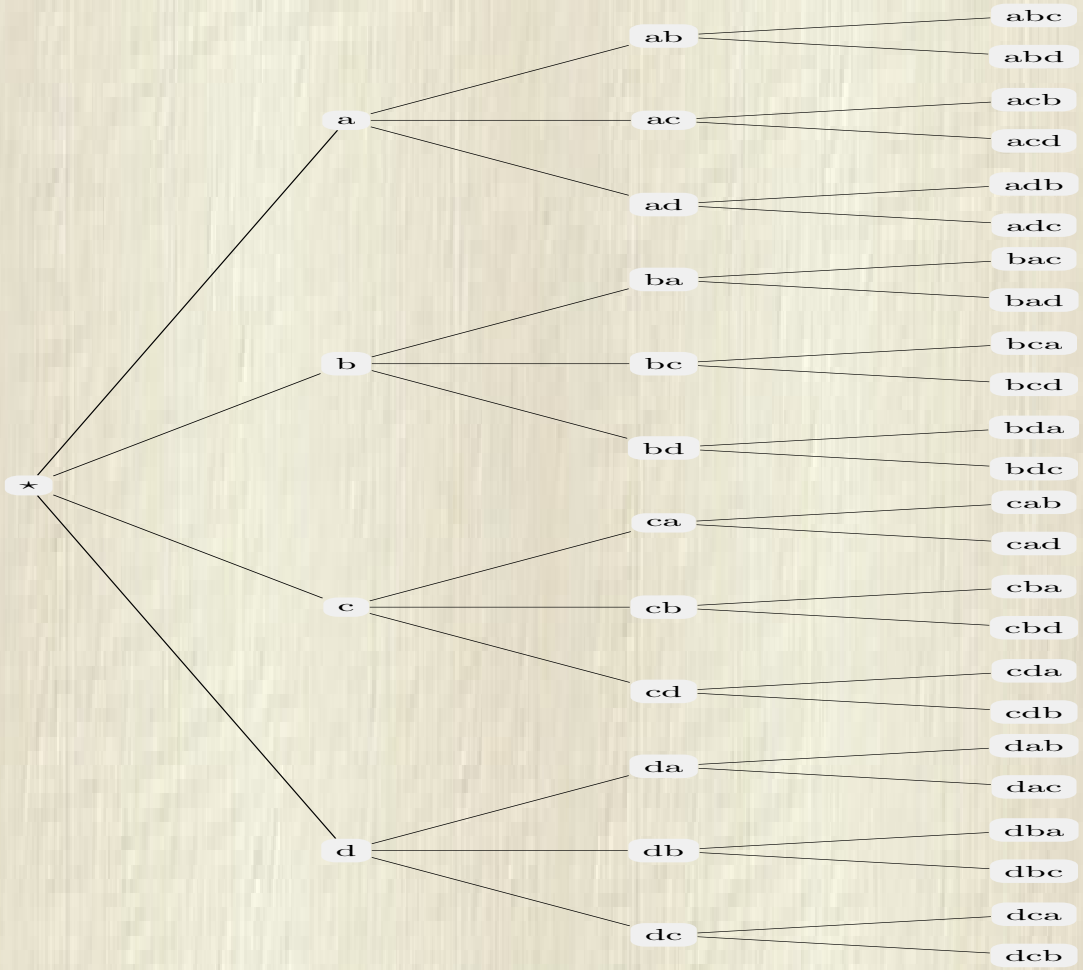


Рис. 2.1. Дерево выборов множества M

Возвращаясь к общему случаю правила произведения, докажем индукцией по глубине дерева, что количество листьев дерева T_M глубины k равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

◀Для дерева $T_M^{(1)}$ глубины 1 всё ясно — количество листьев равно количеству рёбер n_1, выходящих из корня.

Пусть для дерева $T_M^{(k-1)}$ глубины $k-1$ доказано, что количество его листьев равно $m = n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-1}$.

Так как дерево $T_M = T_M^{(k)}$ получается из дерева $T_M^{(k-1)}$ глубины $k-1$, если из каждого листа дерева $T_M^{(k-1)}$ выпустить по n_k ребер, то число листьев дерева $T_M^{(k)}$ равно $m \cdot n_k = n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-1} \cdot n_k$. ▶

3. Перестановки и сочетания

В данном параграфе рассматриваются одни из самых примитивных (и потому очень важных!) комбинаторных объектов: перестановки и сочетания с повторениями и без повторений.

Следующие четыре пункта имеют одинаковую структуру: сначала мы напоминаем определение, приводим простой пример, затем в предложении мы утверждаем, что между множеством соответствующих (N, r)-выборок и некоторыми другими множествами существует биективное соответствие — при этом заметим, что мы явно указываем отображение, устанавливающее биекцию, и потому доказательство этих утверждений становится тривиальным и по этой причине опускается, — далее, мы доказываем теорему о количестве соответствующих (N, r)-выборок, и, наконец,

на основании правила равенства выводим следствие о числе элементов некоторых множеств.

3.1. Перестановки без повторений

Определение 3.1. Пусть $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — n-элементное множество и r — целое положительное число. (N, r)-*перестановкой без повторений* называется выборка $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ элементов множества N объёма r, в которой важен порядок и не допускаются повторения элементов.

Пример 3.1. Если $N = \{a, b, c, d\}$ и $r = 2$, то все $(N, 2)$-перестановки без повторений перечислены ниже:

$$\begin{array}{cccc} a,b & b,a & c,a & d,a \\ a,c & b,c & c,b & d,b \\ a,d & b,d & c,d & d,c \end{array}$$

Множество всех (N, r)-перестановок без повторений будем обозначать через $\mathbf{ПбП}(N, r)$.

Предложение 3.1. *Пусть* $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — n-*элементное множество, а* $R = \{1, 2, \ldots, r\}$[1]. *Тогда*

[1] Вместо $R = \{1, 2, \ldots, r\}$ можно взять произвольное r-элементное множество

(i) *Между множеством* $\boldsymbol{\Pi\text{б}\Pi}(N,r)$ *и множеством* $\boldsymbol{Inj}(R,N)$ *всех инъективных отображений из* R *в* N *существует биективное соответствие:*

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_r} \end{pmatrix}$$

(ii) *Между множеством* $\boldsymbol{\Pi\text{б}\Pi}(N,r)$ *и множеством всех точных слов*[2] *длины* r *в алфавите* N *существует биективное соответствие:*

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \longleftrightarrow a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_r}$$

Теорема 3.1. *Пусть* N *— n-элементное множество и* r *— положительное целое число. Тогда*

$$\left|\boldsymbol{\Pi\text{б}\Pi}(N,r)\right| = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).$$

◀ Подсчитаем число всех (N,r)-перестановок без повторений с помощью правила произведения. Построение любой из (N,r)-перестановок без повторений $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ однозначно характеризуется следующей процедурой, состоящей из r шагов:

1 шаг: выберем 1-й элемент a_{i_1} нашей (N,r)-перестановки без повторений — это можно сделать n способами (так как на этом шаге можно выбрать любой из n элементов множества N);

2 шаг: выберем 2-й элемент a_{i_2} нашей (N,r)-перестановки без повторений — это можно сделать $(n-1)$ способами (так как по условию в (N,r)-перестановке без повторений нельзя повторять элемент, выбранный на первом шаге);

[2]Напомним, что точное слово — это слово, в котором нет повторяющихся букв

3 шаг: выберем 3-й элемент a_{i_3} нашей (N,r)-перестановки без повторений — это можно сделать $\boxed{(n-2)}$ способами (так как по условию в (N,r)-перестановке без повторений нельзя повторять элемент, выбранный на первом и втором шаге);

. . . . . .

r шаг: выберем r-й элемент a_{i_r} нашей (N,r)-перестановки — это можно сделать $\boxed{(n-r+1)}$ способами (так как по условию в (N,r)-перестановке без повторений нельзя повторять $r-1$ элементов, выбранных на предыдущих шагах).

По правилу произведения количество всех (N,r)-перестановок равно числу $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$. ▶

Число $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ называется *убывающим факториалом числа n длины r* и обозначается через $n^{\underline{r}}$. Таким образом,

$$n^{\underline{r}} := n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1).$$

Например,

$$\begin{aligned} 8^{\underline{5}} &= 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4, \\ 8^{\underline{8}} &= 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1, \\ 8^{\underline{9}} &= 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Убывающий факториал длины 0 любого числа n по определению полагается равным 1:

$$n^{\underline{0}} := 1.$$

Заметим, что число $n^{\underline{n}} := n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1$ равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n и этим числом выражается количество всех (N,n)-перестановок без повторений, т. е. число всех перестановок n-элементного множества. Число $1\cdot 2\cdot 3\dots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$ называется *факториалом числа* n и обозначается $n!$ (читается: n факториал). Таким образом,

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)\cdot n.$$

Заметим, что

$$n! = \\ = \underbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}_{=n^{\underline{r}}}\cdot\underbrace{(n-r)(n-r-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{=(n-r)!} = \\ = n^{\underline{r}}\cdot(n-r)!$$

Отсюда,

$$n^{\underline{r}} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Из теоремы 3.1 и предложения 3.1 по правилу равенства сразу получаем следующий результат.

Следствие 3.1. *Пусть N — n-элементное множество.*

(i) *Для любого r-элементного множества R количество инъективных отображений из R в N даётся числом $n(n-1)\dots(n-r+1)$:*

$$\left|\mathbf{Inj}\,(R,N)\right| = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1).$$

(ii) *Количество точных слов длины r в n-буквенном алфавите N равно $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$.*

(iii) *Число всех перестановок n-множества равно $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$.*

Замечание 3.1. (N,r)-перестановки без повторений часто называют *размещениями из n по r*, где n — число элементов множества N.

3.2. Перестановки с повторениями

Определение 3.2. Пусть $N=\{a_1,\dots,a_n\}$ — n-элементное множество и r — целое положительное число. *(N,r)-перестановкой с повторениями* называется выборка $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ элементов множества N объёма r, в которой важен порядок и допускаются повторения элементов.

Пример 3.2. Если $N=\{a,b,c,d\}$ и $r=2$, то все $(N,2)$-перестановки с повторениями перечислены ниже:

$$\begin{array}{cccc} a,a & b,a & c,a & d,a \\ a,b & b,b & c,b & d,b \\ a,c & b,c & c,c & d,b \\ a,d & b,d & c,d & d,d \end{array}$$

Множество всех (N,r)-перестановок с повторениями будем обозначать через $\mathbf{ПсП}(N,r)$.

Предложение 3.2. *Пусть $N=\{a_1,\ldots,a_n\}$ — n-элементное множество, а $R=\{1,2,\ldots,r\}$[3]. Тогда*

(i) Между множеством $\mathbf{ПсП}(N,r)$ и множеством $\mathbf{Map}(R,N)$ всех отображений из R в N существует биективное соответствие:

$$a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_r} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_r} \end{pmatrix}.$$

(ii) Между множество $\mathbf{ПсП}(N,r)$ и множеством всех слов длины r в алфавите N существует биективное соответствие:

$$a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_r} \longleftrightarrow a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_r}.$$

[3]Вместо $R=\{1,2,\ldots,r\}$ можно взять произвольное r-элементное множество

(iii) Между множеством $\boldsymbol{\Pi c \Pi}(N, r)$ *и множеством* N^r *всех упорядоченных* r*-ок множества* N *существует биективное соответствие:*

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \longleftrightarrow (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}).$$

Теорема 3.2. *Пусть* N *—* n*-элементное множество и* r *— положительное целое число. Тогда*

$$\left|\boldsymbol{\Pi c \Pi}(N, r)\right| = n^r.$$

◀ Подсчитаем число всех (N, r)-перестановок с повторениями с помощью правила произведения. Построение любой из (N, r)-перестановок с повторениями $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ однозначно характеризуется следующей процедурой, состоящей из r шагов:

1 шаг: выберем 1-й элемент a_{i_1} нашей (N, r)-перестановки с повторениями — это можно сделать n способами (так как на этом шаге можно выбрать любой из n элементов множества N);

2 шаг: выберем 2-й элемент a_{i_2} нашей (N, r)-перестановки с повторениями — это можно сделать n способами (так как по условию в (N, r)-перестановках с повторениями можно повторять элементы; значит и на этом шаге можно выбрать любой из n элементов множества N);

3 шаг: выберем 3-й элемент a_{i_3} нашей (N, r)-перестановки — это можно сделать n способами (по той же причине, что и на втором шаге);

. . . . . .

r шаг: выберем r-й элемент a_{i_r} нашей (N, r)-перестановки с повторениями — это можно сделать n способами.

По правилу произведения количество всех (N, r)-перестановок равно числу $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{n \text{ раз}} = n^r$.

▶

Из предыдущей теоремы и предыдущего предложения по правилу равенства получаем следующие результаты.

Следствие 3.2. *Пусть N — n-элементное множество.*

(i) Для любого r-элементного множества R количество всех отображений из R в N даётся числом n^r:

$$\big|\mathit{Map}(R,N)\big| = n^r.$$

(ii) Количество слов длины r в n-буквенном алфавите N равно n^r.

(iii) Количество упорядоченных r-ок элементов множества N равно n^r:

$$\Big|\underbrace{N\times N\times\cdots\times N}_{r\ \ раз}\Big| = n^r.$$

3.3. Сочетания без повторений

Определение 3.3. Пусть $N=\{a_1,\ldots,a_n\}$ — n-элементное множество и r — целое неотрицательное число. *(N,r)-сочетанием без повторений* называется выборка $a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_r}$ элементов множества N объёма r, в которой не важен порядок и не допускаются повторения элементов.

Пример 3.3. Если $N=\{a,b,c,d\}$ и $r=2$, то все $(N,2)$-сочетания без повторений перечислены ниже:

$$\begin{array}{lll} a,b & b,c & c,d \\ a,c & b,d & \\ a,d & & \end{array}$$

Множество всех (N,r)-сочетаний без повторений будем обозначать через $\mathbf{СбП}(N,r)$.

Предложение 3.3. *Пусть $N=\{a_1,\ldots,a_n\}$ — n-элементное множество, а r — целое неотрицательное число. Тогда*

(i) Между множеством $\mathbf{СбП}(N,r)$ и множеством $\binom{N}{r}$ всех r-подмножеств множества N существует биективное соответствие:

$$a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_r} \longleftrightarrow \{a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_r}\}$$

(ii) Пусть $N=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}_<$ и $R=\{1,2,\ldots,r\}_<$[4] — линейно упорядоченные множества, содержащие соответственно n и r элементов. Тогда между множеством $\mathbf{СбП}(N,r)$ и множеством $\mathbf{SMon}(R,N)$ строго монотонных отображений из R в N существует биективное соответствие:

$$a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_r} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ \hat{a}_{i_1} & \hat{a}_{i_2} & \ldots & \hat{a}_{i_r} \end{pmatrix},$$

где $\hat{a}_{i_1},\hat{a}_{i_2},\ldots,\hat{a}_{i_r}$ — это те же элементы, что и $a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_r}$, но расположенные по возрастанию:

$$\hat{a}_{i_1}<\hat{a}_{i_2}<\cdots<\hat{a}_{i_r}.$$

[4]Вместо $R=\{1,2,\ldots,r\}_<$ можно взять произвольное r-элементное линейно упорядоченное множество

(iii) Если на множестве N зафиксировать линейный порядок $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}_<$, то между множеством **СбП**(N, r) *и множеством всех строго монотонных слов длины r в алфавите N существует биективное соответствие:*

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \longleftrightarrow \hat{a}_{i_1}\hat{a}_{i_2}\ldots\hat{a}_{i_r},$$

где $\hat{a}_{i_1}, \hat{a}_{i_2}, \ldots, \hat{a}_{i_r}$ — это те же элементы, что и $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, но расположенные по возрастанию:

$$\hat{a}_{i_1} < \hat{a}_{i_2} < \cdots < \hat{a}_{i_r}.$$

Теорема 3.3. *Пусть N — n-элементное множество и r — целое неотрицательное число, $0 \leqslant r \leqslant n$. Тогда*

$$\big|\textbf{СбП}\,(N, r)\big| = \frac{n^{\underline{r}}}{r!}.$$

◀ (N, r)-сочетания без повторений и соответствующие (N, r)-перестановки без повторений различаются тем, что в сочетаниях без повторений не учитывается порядок записи элементов. Это означает, что каждому (N, r)-сочетанию без повторений соответствует $r!$ различных (N, r)-перестановок без повторений. Поэтому число (N, r)-перестановок без повторений в $r!$ раз больше, чем число (N, r)-сочетаний без повторений:

$$\big|\textbf{ПбП}\,(N, r)\big| = r! \cdot \big|\textbf{СбП}\,(N, r)\big|.$$

Отсюда

$$\big|\textbf{СбП}\,(N, r)\big| = \frac{\big|\textbf{ПбП}\,(N, r)\big|}{r!} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!}. \quad ▶$$

Число $\frac{n^{\underline{r}}}{r!}$ обозначается через $\binom{n}{r}$ и называется *биномиальным коэффициентом*:

$$\binom{n}{r} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Отметим, что: $\binom{n}{0} = 1$.

Биномиальный коэффициент $\binom{n}{r}$ у нас определен для целых n и r таких,что $0 \leqslant r \leqslant n$. При отрицательных значениях n у биномиальных коэффициентов нет комбинаторного смысла. Но можно определить значение выражения $\binom{n}{r}$ для отрицательных n (и даже при любых вещественных или комплексных n) формально, воспользовавшись определением убывающих факториалов:

$$\binom{-n}{r} = \frac{(-n)^{\underline{r}}}{r!} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!} =$$
$$= (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}.$$

Выражение $n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)$ называется *возрастающим факториалом числа n длины r* и обозначается через $n^{\overline{r}}$:

$$n^{\overline{r}} = n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1).$$

Для $r = 0$ принято соглашение:

$$n^{\overline{0}} = 1.$$

Справедливы следующие формулы:

$$(-n)^{\underline{r}} = (-1)^r n^{\overline{r}},$$
$$(-n)^{\overline{r}} = (-1)^r n^{\underline{r}}.$$

Отметим также, что

$$\frac{n^{\overline{r}}}{r!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Действительно,

$$n^{\overline{r}} = n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)(n+r-1) =$$
$$= (n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+2)(n+1)n = (n+r-1)^{\underline{r}}.$$

Отсюда

$$\frac{n^{\overline{r}}}{r!} = \frac{(n+r-1)^{\underline{r}}}{r!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Из предыдущей теоремы и предыдущего предложения по правилу равенства получаем следующие результаты.

Следствие 3.3. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Количество r-подмножеств данного n-множества N равно $\binom{n}{r}$:*

$$\left|\binom{N}{r}\right| = \binom{|N|}{r}.$$

(ii) *Количество строго монотонных отображений из r-элементного линейно упорядоченного множества R в n-элементное линейно упорядоченное множество N равно $\binom{n}{r}$:*

$$\left|\mathbf{SMon}\,(R, N)\right| = \binom{|N|}{|R|}.$$

(iii) *Число строго монотонных слов длины r в n-буквенном алфавите N равно $\binom{n}{r}$.*

Замечание 3.2. Отметим, что (N, r)-сочетания без повторений часто просто называют *сочетаниями из n по r* (здесь $n = |N|$).

Замечание 3.3. Для обозначения биномиальных коэффициентов используют также символ C_n^r:

$$C_n^r = \binom{n}{r}.$$

3.4. Сочетания с повторениями

Определение 3.4. Пусть $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество и r — целое неотрицательное число. (N, r)-*сочетанием с повторениями* называется выборка $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ элементов множества N объёма r, в которой не важен порядок и допускаются повторения элементов.

Пример 3.4. Если $N = \{a, b, c, d\}$ и $r = 2$, то все $(N, 2)$-сочетания с повторениями перечислены ниже:

$$\begin{array}{llll} a,a & b,b & c,c & d,d \\ a,b & b,c & c,d & \\ a,c & b,d & & \\ a,d & & & \end{array}$$

Множество всех (N, r)-сочетаний с повторениями будем обозначать через $\mathbf{CcП}(N, r)$.

Предложение 3.4. *Пусть $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — n-элементное множество, а r — целое неотрицательное число. Тогда*

(i) Между множеством $\mathbf{CcП}(N, r)$ и множеством $\left(\!\binom{N}{r}\!\right)$ всех r-мультимножеств над множеством N существует биективное соответствие:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \longleftrightarrow \{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}\},$$

где k_j — целое неотрицательное число, показывающее кратность вхождения элемента a_j в выборку $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$.

(ii) Пусть $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}_<$ и $R = \{1, 2, \ldots, r\}_<$ — линейно упорядоченные множества, содержащие соответственно n и r элементов[5]. Тогда между множеством $\mathbf{СсП}(N, r)$ и множеством $\mathbf{Mon}(R, N)$ монотонных отображений из R в N существует биективное соответствие:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ \hat{a}_{i_1} & \hat{a}_{i_2} & \ldots & \hat{a}_{i_r} \end{pmatrix},$$

где $\hat{a}_{i_1}, \hat{a}_{i_2}, \ldots, \hat{a}_{i_r}$ — это те же элементы, что и $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, но расположенные по нестрогому возрастанию:

$$\hat{a}_{i_1} \leqslant \hat{a}_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant \hat{a}_{i_r}.$$

(iii) Если на множестве N зафиксировать линейный порядок $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}_<$, то между множеством $\mathbf{СсП}(N, r)$ и множеством всех монотонных слов длины r в алфавите N существует биективное соответствие:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \longleftrightarrow \hat{a}_{i_1}\hat{a}_{i_2}\ldots\hat{a}_{i_r},$$

где $\hat{a}_{i_1}, \hat{a}_{i_2}, \ldots, \hat{a}_{i_r}$ — это те же элементы, что и $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, но расположенные по нестрогому возрастанию:

$$\hat{a}_{i_1} \leqslant \hat{a}_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant \hat{a}_{i_r}.$$

[5]Вместо $R = \{1, 2, \ldots, r\}_<$ можно взять произвольное r-элементное линейно упорядоченное множество

Теорема 3.4. *Пусть N — n-элементное множество и r — целое неотрицательное число. Тогда*

$$\left|\mathit{CcП}(N,r)\right| = \frac{n^{\overline{r}}}{r!}.$$

◀ По предыдущему предложению нам достаточно подсчитать число монотонных слов длины r в алфавите $N = \{1,2,\dots,n\}_<$. Для решения этой задачи мы каждому такому монотонному слову $a_1a_2\dots a_r$ сопоставим *строго* монотонное слово $\overline{a}_1\overline{a}_2\dots\overline{a}_r$ в алфавите $\overline{N} = \{1,2,\dots,n+r-1\}_<$ по правилу $\overline{a}_j = a_j + (j-1)$, то есть

$$a_1a_2\dots a_r \longmapsto a_1(a_2+1)(a_3+2)\dots(a_r+(r-1)).$$

То, что слово $\overline{a}_1\overline{a}_2\dots\overline{a}_r$ действительно является строго монотонным, следует из импликации

$$a_j \leqslant a_{j+1} \implies \overline{a}_j = a_j + (j-1) < a_{j+1} + j = \overline{a}_j.$$

Приведённое соответствие легко обращается: отображение

$$\overline{a}_1\overline{a}_2\dots\overline{a}_r \longmapsto \overline{a}_1(\overline{a}_2-1)(\overline{a}_3-2)\dots(\overline{a}_r-(r-1))$$

сопоставляет каждому строго монотонному слову в алфавите $\overline{N} = \{1,2,\dots,n+r-1\}_<$, вообще говоря, (нестрого) монотонное слово в алфавите $N = \{1,2,\dots,n\}_<$ и является, как легко видеть, обратным к приведённому выше отображению.

Таким образом, мы установили биективное соответствие между множеством монотонных слов длины r в алфавите $N = \{1,2,\dots,n\}_<$ и множеством строго монотонных слов длины r в алфавите $\overline{N} = \{1,2,\dots,n+r-1\}_<$.

Так как по следствию 3.3 число строго монотонных слов длины r в $(n+r-1)$-буквенном алфавите равно $\binom{n+r-1}{r} = \frac{n^{\overline{r}}}{r!}$, то теорема полностью доказана. ▶

Из предыдущей теоремы и предыдущего предложения по правилу равенства получаем следующие результаты.

Следствие 3.4. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Число r-мультимножеств над данным n-множеством N равно* $\frac{n^{\overline{r}}}{r!}$*:*

$$\left|\left(\!\binom{N}{r}\!\right)\right| = \frac{n^{\overline{r}}}{r!}.$$

(ii) *Число монотонных отображений из r-элементного линейно упорядоченного множества R в n-элементное линейно упорядоченное множество N равно* $\frac{n^{\overline{r}}}{r!}$*:*

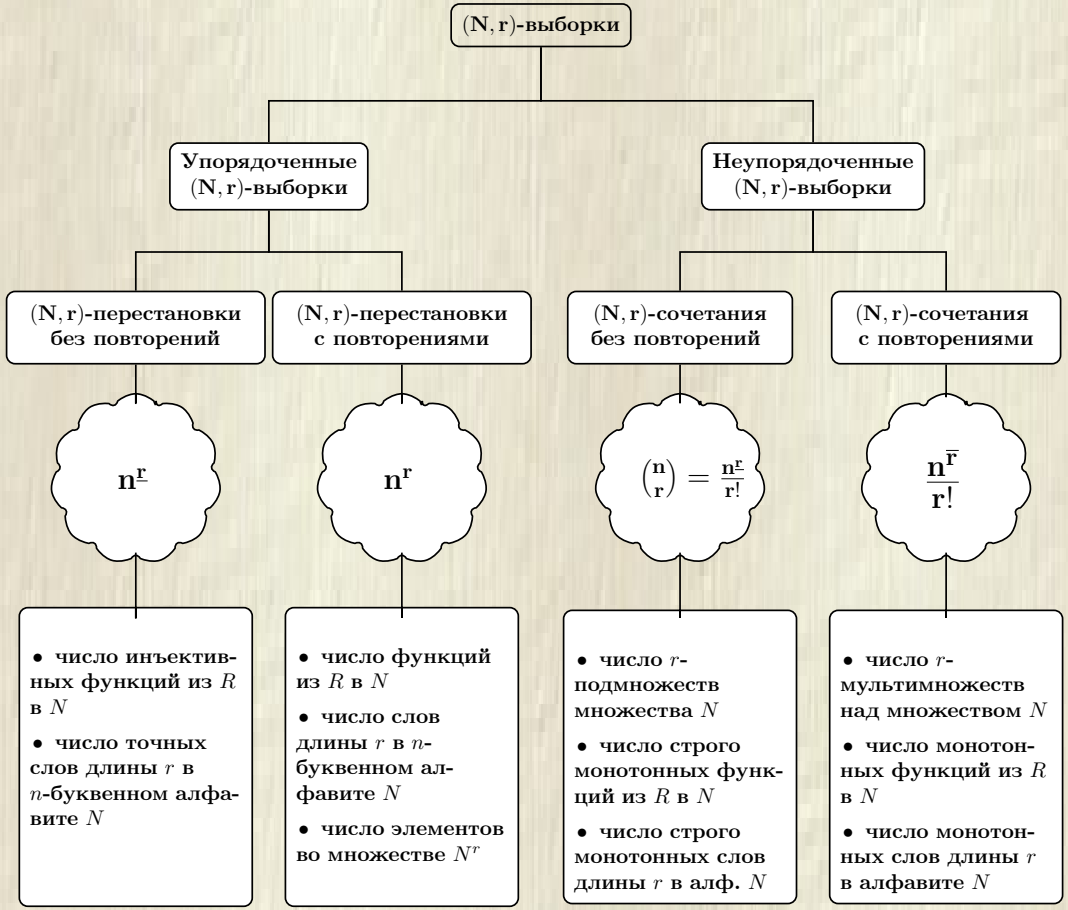
$$\left|\,\mathbf{Mon}\,(R,N)\,\right| = \frac{n^{\overline{r}}}{r!}.$$

(iii) *Число монотонных слов длины r в n-буквенном алфавите N равно* $\frac{n^{\overline{r}}}{r!}$.

В связи с утверждением (i) предыдущего следствия обосновано следующее обозначение: для неотрицательного целого n и любого неотрицательного целого r символом $\left(\!\binom{n}{r}\!\right)$ обозначается число r-мультимножеств n-элементного множества. Таким образом, мы нашли, что $\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \frac{n^{\overline{r}}}{r!}$.

3.5. Итоговые формулы

В этом разделе мы для удобства читателя приведём таблицу, в которой собрали основные результаты данного параграфа.


(N, r)-выборки
Упорядоченные (N, r)-выборки
Неупорядоченные (N, r)-выборки
(N, r)-перестановки без повторений
(N, r)-перестановки с повторениями
(N, r)-сочетания без повторений
(N, r)-сочетания с повторениями
$n^{\underline{r}}$
n^{r}
$\binom{n}{r} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!}$
$\frac{n^{\overline{r}}}{r!}$
• число инъективных функций из R в N
• число точных слов длины r в n-буквенном алфавите N
• число функций из R в N
• число слов длины r в n-буквенном алфавите N
• число элементов во множестве N^r
• число r-подмножеств множества N
• число строго монотонных функций из R в N
• число строго монотонных слов длины r в алф. N
• число r-мультимножеств над множеством N
• число монотонных функций из R в N
• число монотонных слов длины r в алфавите N

4. Биномиальные и полиномиальные коэффициенты

Биномиальные коэффициенты часто называют главными числами комбинаторики. В данном параграфе мы приводим самые основные свойства этих чисел, а также рассматриваем их непосредственное обобщение — полиномиальные коэффициенты.

4.1. Основные свойства биномиальных коэффициентов и биномиальная теорема

Теорема 4.1. *Для любых целых неотрицательных n и k справедливы равенства:*

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(2) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

◀ Приведем по два доказательства утверждений теоремы: одно комбинаторное, а другое аналитическое.

(1) *Комбинаторное доказательство.* Пусть N — n-элементное множество и $0 \leqslant k \leqslant n$. Напомним, что $\binom{N}{k}$ обозначает множество подмножеств множества мощности k и согласно следствию 3.4 (i) $\#\binom{N}{k} = \binom{n}{k}$.

Рассмотрим отображение $\varphi\colon \binom{N}{k} \to \binom{N}{n-k}$, определённое равенством $\varphi(A) = N \setminus A$:

$$\binom{N}{k} \ni A \overset{\varphi}{\longmapsto} N \setminus A \in \binom{N}{n-k}.$$

Отображение φ инъективно: если $A, B \subset N$ и $A \neq B$, то $N \setminus A \neq N \setminus B$; в частности, если $A, B \in \binom{N}{k}$ и $A \neq B$, то $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. Отображение φ сюръективно: для любого множества $A \subset N$ справедливо равенство $N \setminus (N \setminus A) = A$ и, если $B \in \binom{N}{n-k}$, то $N \setminus B \in \binom{N}{k}$; следовательно, для любого множества $B \in \binom{N}{n-k}$ имеем $\varphi(A) = B$, где $A = N \setminus B$.

Таким образом, отображение φ является биективным отображением и по правилу равенства $\#\binom{N}{k} = \#\binom{N}{n-k}$, то есть $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(1) *Аналитическое доказательство* совсем простое: нужно подсчитать левую и правую части предполагаемого равенства и убедиться, что они равны:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(2) *Комбинаторное доказательство.* Пусть $N = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ — $(n+1)$-элементное множество и $0 \leqslant k \leqslant n+1$. Подсчитаем количество элементов во множестве $\binom{N}{k}$ всех k-подмножеств множества N двумя способами. С одной стороны, по следствию 3.4 (i) оно равно $\binom{n+1}{k}$. С другой стороны, зафиксировав произвольный элемент из N — пусть это будет a_{n+1}, — заметим, что любое k-элементное подмножество N либо содержит a_{n+1}, либо не содержит a_{n+1}. Значит любое k-элементное подмножество множества $N = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ можно получить двумя взаимоисключающими способами:

1) либо из $(k-1)$-элементного подмножества множества $N \setminus \{a_{n+1}\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ добавлением к нему элемента a_{n+1}; — это можно сделать $\binom{n}{k-1}$ способами;

2) либо выбрав k-элементное подмножество из множества $N \setminus \{a_{n+1}\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами.

Применяя правило суммы, получаем, что количество элементов во множестве $\binom{N}{k}$ равно $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$; отсюда $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

(2) *Аналитическое доказательство* сводится к непосредственным вычислениям:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} + \frac{n^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} =$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!} =$$
$$= \frac{n^{\underline{k-1}}\big((n-k+1)+k\big)}{k!} = \frac{(n+1)n^{\underline{k-1}}}{k!} =$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{k!} = \frac{(n+1)^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n+1}{k}. \quad \blacktriangleright$$

Было замечено, что многие последовательности чисел, встречающиеся в комбинаторике, либо возрастают, либо убывают, либо возрастают до некоторого номера, а затем убывают. Такие последовательности называются унимодальными. Точнее, последовательность $v_0, v_1, \ldots, v_n$ вещественных чисел называется *унимодальной*, если существует целое число $M \geqslant 0$ такое, что

$$v_0 \leqslant v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_{M-1} \leqslant v_M \geqslant v_{M+1} \geqslant \ldots \geqslant v_n.$$

Заметим, что если в этом определении $M = 0$, то последовательность является убывающей, а если $M = n$, — возрастающей.

Теорема 4.2. *Последовательность биномиальных коэффициентов*

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n} \tag{4.1}$$

унимодальна. Точнее, если n — чётное, то

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > \dots > \binom{n}{n},$$

а если n — нечётное, то

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \dots > \binom{n}{n}.$$

◀ Оценим отношение двух соседних членов биномиальной последовательности:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(k-1)!}{n(n-1)\dots(n-k+2)} = \frac{n-k+1}{k}.$$

При $k < \frac{n+1}{2}$ имеем $\frac{n-k+1}{k} > 1$; поэтому $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} > 1$ при $k < \frac{n+1}{2}$. При $k > \frac{n+1}{2}$ имеем $\frac{n-k+1}{k} < 1$; поэтому $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} < 1$ при $k > \frac{n+1}{2}$. ▶

Следствие 4.1. *Максимальное значение $M(n)$ в последовательности (4.1) равно $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$:*

$$M(n) = \binom{n}{[\frac{n}{2}]}.$$

Теорема 4.3 (Биномиальная теорема). *Для любых чисел a, b и для любого целого $n \geqslant 0$ справедлива формула*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

◀ Мы приведем два доказательства этой теоремы: одно комбинаторное, а другое аналитическое.

Комбинаторное доказательство. Запишем $(a+b)^n$ в виде

$$\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n}$$

и раскроем скобки. Чтобы проследить, что при этом получится, пронумеруем парные скобки (назовём их «домиками»), как показано ниже:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)}_{1\text{ «домик»}}\underbrace{(a+b)}_{2\text{ «домик»}}\cdots\underbrace{(a+b)}_{n\text{ «домик»}}$$

Процесс раскрытия скобок заключается в следующем:

- выбираем из каждого «домика» по одному из слагаемых a или b;
- перемножаем выбранные элементы;
- складываем полученные произведения.

Таким образом, если мы раскроем скобки, то получим сумму выражений вида $a^k b^{n-k}$ для $k = 0, 1, \ldots, n$.

Нам остаётся подсчитать, сколько раз выражение вида $a^k b^{n-k}$ с фиксированным k встретится при раскрытии скобок. Для этого заметим, что $a^k b^{n-k}$ с фиксированным k может получиться только если число a выбирается из k «домиков» (из остальных $n-k$ «домиков» выбирается число b). Но выбор k «домиков» из имеющихся n «домиков» равносильно выбору k-подмножества из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, а это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами. Значит, $a^k b^{n-k}$ с фиксированным k появится при раскрытии скобок $\binom{n}{k}$ раз и, таким образом,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Аналитическое доказательство. Индукцией по n.

При $n=1$ формула верна: $(a+b)=\binom{1}{0}a^0b^1+\binom{1}{1}a^1b^0=a+b$. Допустим, что формула верна при n и докажем ее справедливость при $n+1$.

$$(a+b)=(a+b)(a+b)^n=a(a+b)^n+b(a+b)^n=$$
$$=a\left[\binom{n}{0}a^0b^n+\binom{n}{1}a^1b^{n-1}+\cdots+\binom{n}{k}a^kb^{n-k}+\cdots+\binom{n}{n}a^nb^0\right]+$$
$$+b\left[\binom{n}{0}a^0b^n+\binom{n}{1}a^1b^{n-1}+\cdots+\binom{n}{k+1}a^{k+1}b^{n-k-1}+\cdots+\binom{n}{n}a^nb^0\right]=$$
$$=\binom{n}{0}a^1b^n+\binom{n}{1}a^2b^{n-1}+\cdots+\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\cdots+\binom{n}{n}a^{n+1}b^0+$$
$$+\binom{n}{0}a^0b^{n+1}+\binom{n}{1}a^1b^n+\cdots+\binom{n}{k+1}a^{k+1}b^{n-k}+\cdots+\binom{n}{n}a^nb^1=$$
$$=\binom{n}{0}a^0b^{n+1}+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\right]a^1b^n+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]a^2b^{n-2}+\ldots$$
$$+\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right]a^{k+1}b^{n-k}+\cdots+\binom{n}{n}a^{n+1}b^0.$$

Из утверждения (ii) предыдущего предложения имеем

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1},\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2},\ldots,\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},\ldots.$$

и так как $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1$ и $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$, то получаем окончательно

$$(a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^0b^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^1b^n+\cdots+\binom{n+1}{k+1}a^{k+1}b^{n-k}+\ldots$$
$$+\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}.\ \blacktriangleright$$

Следствие 4.2. *Справедливы следующие равенства:*

(i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} = 0$.

◀ (i) В биномиальной теореме возьмём в качестве a и b числа, равные $a = 1$ и $b = 1$.
(ii) В биномиальной теореме возьмём в качестве a и b числа, равные $a = -1$ и $b = 1$. ▶

4.2. Полиномиальные коэффициенты и полиномиальная теорема

В этом разделе мы рассмотрим обобщение биномиальных коэффициентов. Чтобы было понятно это обобщение, рассмотрим сначала следующую задачу.

Задача 4.1. Показать, что число способов, которыми можно разбить множество $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$, состоящее из n элементов, на два блока $N = A_1 \big| A_2$ так, что в A_1 содержится k элементов, а в A_2 содержится $n - k$ элементов, равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{k}$.

Решение. Чтобы организовать такое разбиение, необходимо и достаточно сделать два шага:
1 шаг: выберем k элементов из N, которые поместим в блок A_1. Так как это равносильно выбору k-элементного подмножества из n-элементного множества N, то это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами;
2 шаг: выберем оставшиеся $n - k$ элементов множества N, которые поместим в блок A_2 — это можно сделать одним способом.

По правилу произведения получаем, что искомое число равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{k}$. ►

Решённая задача является обоснованием следующего определения.

Определение 4.1. Пусть N — n-элементное множество. Число способов упорядоченного разбиения этого множества на r блоков

$$N = A_1 \big| A_2 \big| \dots \big| A_r$$

такое, что в первом блоке A_1 содержится k_1 элементов множества N, во втором блоке A_2 содержится k_2 элементов множества N и т. д., r-й блок A_r содержит k_r элементов множества N, называется *полиномиальным коэффициентом* и обозначается через

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r}.$$

Из определения ясно, что при этом $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$.

Согласно задаче и определению

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}.$$

Поэтому полиномиальные коэффициенты действительно являются обобщением биномиальных коэффициентов.

Теорема 4.4. *Для любых целых неотрицательных чисел n и $k_1, k_2, \ldots, k_r$, таких, что $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, справедлива формула*

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_r!}.$$

◀ Пусть N — n-элементное множество. Для того, чтобы построить упорядоченное разбиение $N = A_1 \big| A_2 \big| \ldots \big| A_r$, такое, что $|A_i| = k_i$, где $k_i \geqslant 0$ и $k_1 + \cdots + k_r = n$, необходимо и достаточно сделать следующие r шагов:

1 шаг — выберем k_1 элементов из N, которые поместим в блок A_1: это можно сделать $\binom{n}{k_1}$ способами;

2 шаг — выберем k_2 элементов из $N \setminus A_1$, которые поместим в блок A_2: это можно сделать $\binom{n-k_1}{k_2}$ способами;

3 шаг — выберем k_3 элементов из $N \setminus (A_1 \cup A_2)$, которые поместим в блок A_3: это можно сделать $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ способами;

. . . . . .

r шаг — выберем k_r элементов из $N \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{r-1})$, которые поместим в блок A_r: это можно сделать $\binom{n-k_1-\ldots-k_{r-1}}{k_r}$ способами.

По правилу произведения получаем

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} =$$

$$= \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-1}}{k_r} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)!}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{(n-k_1-\ldots-k_{r-1})!}}{k_r!\underbrace{(n-k_1-k_2-\ldots-k_r)!}_{=0}} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!0!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 4.5 (Полиномиальная теорема). *Для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и любого неотрицательного целого n справедлива формула*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_r=n \\ k_i \geqslant 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r}.$$

◀ Аналогично, как и для биномиальной теоремы, мы приведем два доказательства данной теоремы.

Комбинаторное доказательство. Запишем $(a_1 + \cdots + a_r)^n$ в виде произведения n сомножителей и перенумеруем скобки, как показано ниже,

$$(a_1 + \cdots + a_r)^n = \underbrace{(a_1 + \cdots + a_r)}_{1} \cdots \underbrace{(a_1 + \cdots + a_r)}_{n}.$$

Раскрытие скобок заключается в выборе из каждой скобки по одному из слагаемых a_i, их перемножению и сложению полученных произведений. Таким образом, если мы раскроем скобки, то получим сумму произведений вида

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r} \qquad (k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n,\ k_i \geqslant 0). \tag{4.2}$$

Далее, сомножитель вида $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r}$ с фиксированными $k_1, k_2, \ldots, k_r$ может получиться тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} a_1 &\text{ выбирается в } k_1 \text{ скобках,} \\ a_2 &\text{ выбирается в } k_2 \text{ скобках,} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_r &\text{ выбирается в } k_r \text{ скобках.} \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что сомножитель вида $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r}$ с фиксированными $k_1, k_2, \ldots, k_r$ может встретиться несколько раз; причём в точности столько раз, сколько существует способов разбиения множества «скобок» $\{1, 2, \ldots, n\}$ на r блоков $A_1 \big| A_2 \big| \ldots \big| A_r$, где

$$\begin{aligned} A_1 &\text{ содержит те } k_1 \text{ скобок из } \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ в которых выбирается } a_1; \\ A_2 &\text{ содержит те } k_2 \text{ скобок из } \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ в которых выбирается } a_2; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_r &\text{ содержит те } k_r \text{ скобок из } \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ в которых выбирается } a_r. \end{aligned}$$

Число таких способов, согласно определению полиномиальных коэффициентов, равно $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_r}$.

Аналитическое доказательство. Индукцией по числу слагаемых r. При $r=1$ предложение тривиально.

При $r=2$ — это биномиальная теорема:

$$(a_1+a_2)^n=\sum_{k_1+k_2=n}\binom{n}{k_1,k_2}a_1^{k_1}a_2^{k_2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_1^k a_2^{n-k}.$$

Допустим, что наше предложение справедливо, когда число слагаемых в скобках равно r, и докажем его справедливость, когда число слагаемых равно $r+1$.

$$(a_1+\cdots+a_r+a_{r+1})^n=((a_1+\cdots+a_r)+a_{r+1})^n=(\text{формула бинома})$$

$$=\sum_{\substack{s+t=n\\ s,t\geqslant 0}}\binom{n}{s,t}(a_1+\cdots+a_r)^s a_{r+1}^t=$$

$$=\sum_{\substack{s+t=n\\ s,t\geqslant 0}}\binom{n}{s,t}a_{r+1}^t\sum_{\substack{t_1+\cdots+t_r=s\\ t_i\geqslant 0}}\binom{s}{t_1,\ldots t_r}a_1^{t_1}\cdots a_r^{t_r}=$$

$$=\sum_{\substack{s+t=n\\ s,t\geqslant 0}}\sum_{\substack{t_1+\cdots+t_r=s\\ t_i\geqslant 0}}\binom{n}{s,t}\binom{s}{t_1,\ldots t_r}a_1^{t_1}\cdots a_r^{t_r}a_{r+1}^t=$$

$$=\sum_{\substack{t_1+\cdots+t_r+t=n\\ t\geqslant 0,t_i\geqslant 0}}\binom{n}{t_1,\ldots,t_r,t}a_1^{t_1}\cdots a_r^{t_r}a_{r+1}^t.$$

Обозначая $t_i=k_i$ для $i=1,\ldots,r$ и $t=k_{r+1}$, получаем по индукции доказательство. ▶

Следствие 4.3. *Справедливо следующее равенство:*

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_r=n \\ k_i \geqslant 0}} \binom{n}{k_1, k_2 \ldots, k_r} = r^n.$$

◀ Полагая в полиномиальной теореме $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 1$, получаем требуемое равенство. ▶

5. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения числа

5.1. Упорядоченные разбиения числа

Пусть n — целое положительное число. *Упорядоченным r- разбиением* числа n называется упорядоченный набор натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_r$ такой, что

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r.$$

Пример 5.1. Все упорядоченные 3-разбиения числа 5 — это

$$\begin{array}{ll} 5 = 3+1+1, & 5 = 1+3+1, \\ 5 = 2+2+1, & 5 = 1+1+3, \\ 5 = 2+1+2, & 5 = 1+2+2. \end{array}$$

Теорема 5.1. *Количество упорядоченных r-разбиений числа n равно*

$$\binom{n-1}{r-1}.$$

◀ Расположим в ряд n точек

$$\bullet\bullet\bullet\cdots\bullet\bullet$$

Между этими точками существует $n-1$ промежутков. Если мы сделаем $r-1$ отметок "|"в каких-нибудь $r-1$ промежутках из имеющихся $n-1$ промежутков, то мы получим некоторое разбиение этих n точек на r частей, то есть получим представление числа n в виде упорядоченной суммы

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — число точек в каждой части. Обратно, любое r-разбиение числа n можно интерпретировать как расстановку $r-1$ отметок в $n-1$ промежутках между n точками. Например,

$$\bullet\bullet\bullet|\,\bullet\,|\bullet \quad\longleftrightarrow\quad 5 = 3+1+1; \qquad 5 = 1+2+2 \quad\longleftrightarrow\quad \bullet|\,\bullet\bullet|\,\bullet\bullet.$$

Таким образом, количество упорядоченных r-разбиений числа n равно числу способов выбора $r-1$ промежутков из имеющихся $n-1$ промежутков, то есть равно $\binom{n-1}{r-1}$. ▶

Следствие 5.1. *Число всевозможных упорядоченных разбиений числа n равно 2^{n-1}.*

◀ Число всевозможных упорядоченных r-разбиений числа n есть сумма числа упорядоченных 1-разбиений числа n, числа упорядоченных 2-разбиений числа n и т. д., то есть равно

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}. \quad ▶$$

Ясно, что задача о количестве упорядоченных k-разбиений числа n эквивалентна задаче о количестве целочисленных решений задачи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, \\ x_i \geqslant 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

и, как мы выяснили, оно равно $\binom{n-1}{k-1}$.

Слегка обобщим последнюю задачу и поставим вопрос о количестве решений задачи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, \\ x_i \geqslant a_i, \end{cases} \tag{5.2}$$

где a_i — произвольно фиксированные целые числа, то есть зададимся вопросом о количестве упорядоченных представлений числа n в виде суммы k слагаемых, где i-е слагаемое должно быть $\geqslant a_i$.

Задача (5.1) является частным случаем задачи (5.2); назовём её *стандартной* задачей (в этом классе задач). Легко видеть, что любая задача типа (5.2) сводится

к стандартной задаче. Действительно,

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+\dots+x_k=n,\\ x_i\geqslant a_i,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x_1-a_1+1)+\dots+(x_k-a_2+1)+a_1+\dots+a_k-k=n,\\ x_i-a_i+1\geqslant 1,\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overbrace{(x_1-a_1+1)}^{t_1}+\dots+\overbrace{(x_k-a_2+1)}^{t_k}=n+k-a_1-\ldots-a_k,\\ x_i-a_i+1\geqslant 1,\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1+\dots+t_k=n+k-a_1-\ldots-a_k,\\ t_i\geqslant 1,\end{array}\right.$$

где $t_i=x_i-a_i+1$. Но последняя задача является стандартной, и количество её решений равно $\binom{n+k-a_1-\ldots-a_k-1}{k-1}$. Таким образом, установлена справедливость следующего предложения.

Предложение 5.1. *Для любых целых $a_1,\dots,a_k$ и n число решения задачи*

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+\dots+x_k=n,\\ x_i\geqslant a_i,\end{array}\right.$$

равно $\binom{n+k-a_1-\ldots-a_k-1}{k-1}$.

Пример 5.2. Найти число целочисленных решений задачи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 2018, \\ x_1 \geqslant -5, x_2 \geqslant -1, x_3 \geqslant 3, x_4 \geqslant 11, x_5 \geqslant 99, x_6 \geqslant 5. \end{cases}$$

Решение. Мы не будем сразу использовать готовую формулу из предложения 5.1. Вместо этого на конкретном примере ещё раз покажем, как сводится эта задача к стандартной.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 2018, \\ x_1 \geqslant -5, x_2 \geqslant -1, x_3 \geqslant 3, x_4 \geqslant 11, x_5 \geqslant 99, x_6 \geqslant 5. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{(x_1+6)}^{t_1} + \overbrace{(x_2+2)}^{t_2} + \overbrace{(x_3-2)}^{t_3} + \overbrace{(x_4-10)}^{t_4} + \overbrace{(x_5-98)}^{t_4} + \overbrace{(x_6-4)}^{t_6} - \\ \qquad - (6+2-2-10-98-4) = 2018, \\ t_i \geqslant 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + \cdots + t_6 + 106 = 2018, \\ t_i \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + \cdots + t_6 = 1912, \\ t_i \geqslant 1 \end{cases}$$

Последняя задача является стандартной, и количество её решений равно $\binom{1912-1}{6-1} = \binom{1911}{5}$. ▶

Заметим также, что задача о количестве r-мультимножеств над множеством $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ есть фактически задача типа (5.2). В самом деле, мощность мультимножества $\{a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}\}$ над множеством $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ равна r тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r, \\ k_i \geqslant 0. \end{cases}$$

Значит, согласно предыдущему предложению 5.1, количество r-мультимножеств над n-элементным множеством равно

$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r},$$

и, таким образом, мы получили другое доказательство формулы для числа (N, r)-сочетаний с повторениями.

5.2. Неупорядоченные разбиения числа

Пусть n — целое положительное число. *Неупорядоченным r- разбиением числа n* называется неупорядоченный набор натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_r$, таких, что

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r.$$

Пример 5.3. Все неупорядоченные 3-разбиения числа 5 такие:

$$5 = 3 + 1 + 1, \qquad 5 = 2 + 2 + 1.$$

Так как порядок слагаемых $a_1, a_2, \ldots, a_r$ в неупорядоченном r-разбиении числа n не важен, то мы вольны выбирать порядок так, как считаем удобным; чаще всего считают (и мы примем такое соглашение), что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_r$. Неупорядоченное разбиение

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$$

с $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_r$ будем называть *канонической записью* разбиения. Например, для неупорядоченного разбиения $18 = 3+3+5+7$ его канонической записью будет $18 = 7+5+3+3$.

Число неупорядоченных r-разбиений числа n обычно обозначают через $P_{n,r}$ или $P_r(n)$, а число всевозможных неупорядоченных разбиений числа n — через $p(n)$:

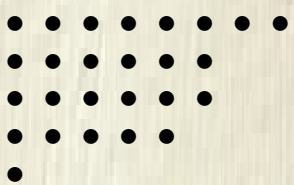
$$p(n) = P_{n,1} + P_{n,2} + \cdots + P_{n,n}.$$

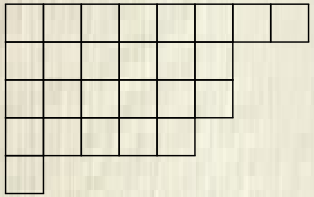
Укажем два весьма удобных во многих отношениях графических способа представления неупорядоченного разбиения $n = a_1 + \cdots + a_r$ (где, как договаривались, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_r$) — это *диаграмма Феррерса* и *диаграмма Юнга*.

Диаграмма Феррерса разбиения $n = a_1 + \cdots + a_r$ состоит из n точек, расположенных в r строках, выравненных по левому краю, причём в k-я строка состоит из a_k точек.

Таблица Юнга разбиения $n = a_1 + \cdots + a_r$ состоит из набора n клеток, расположенных в r строках, выравненных по левому краю, причём k-я строка состоит в точности из a_k клеток.

Понятно, что между разбиениями чисел и диаграммами Феррерса и Юнга существует биективное соответствие. Например, разбиению $26 = 8+6+6+5+1$ соответствуют следующие диаграммы Феррерса и Юнга:





Многие тождества для функции разбиения числа, подчинённые различным ограничениям на слагаемые, становятся более понятными, если пользоваться диаграммами Феррерса или Юнга. Хотя определения диаграмм Феррерса и Юнга совершенно аналогичны (в одних используются точки, а в других — клетки), однако диаграммы Юнга обладают большей гибкостью в связи с возможностью заносить в клетки, например, числа; это, в свою очередь, открывает более широкий простор для их комбинаторной интерпретации.

Теорема 5.2. *Для числа неупорядоченных r-разбиений числа n справедлива следующая рекуррентная формула:*

$$\begin{aligned} P_{n,1} &= P_{n,n} = 1, \\ P_{n,r} &= P_{n-r,1} + P_{n-r,2} + P_{n-r,3} + \cdots + P_{n-r,r} \qquad (n > r \geqslant 1). \end{aligned}$$

◀ $P_{n,1} = 1$, так как существует одно разбиение числа n на одну часть: $n = n$.
$P_{n,n} = 1$, так как существует одно разбиение числа n на n частей: $n = 1 + 1 + \cdots + 1$.
Пусть $n > r$. Рассмотрим разбиение числа $n - r$ на k частей:

$$n - r = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Тогда

$$n = (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \cdots + (a_k + 1) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{r-k}.$$

и мы получаем разбиение числа n на r слагаемых.
Обратно, имея r-разбиение числа n

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r,$$

мы можем получить

$$n - r = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_r - 1),$$

то есть получить некоторое разбиение числа $n - r$ на r или меньше частей (так как, если $a_i = 1$, то $a_i - 1 = 0$). Таким образом, если обозначить через $\mathcal{F}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ — множество всех неупорядоченных разбиений числа $n-r$ на k частей, а через $\mathcal{F}$ — множество всех неупорядоченных разбиений числа n на r частей, то мы получим биекцию:

$$n - r = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \longleftrightarrow n = (a_1 + 1) + \cdots + (a_k + 1) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{r-k}.$$

между множествами $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_r$ и $\mathcal{F}$. Значит

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| + \cdots + |\mathcal{F}_r|.$$

Так как $|\mathcal{F}| = P_{n,r}$, $|\mathcal{F}_k| = P_{n-r,k}$, то $P_{n,r} = P_{n-r,1} + P_{n-r,2} + \cdots + P_{n-r,r}$. Теорема доказана. ▶

Руководствуясь приведённой рекуррентной формулой, легко подсчитать количество неупорядоченных r-разбиений числа n при небольших n.

Числа разбиений $P_{n,r}$ и $p(n)$

	$P_{n,r} = P_{n-r,1} + P_{n-r,2} + \cdots + P_{n-r,r}$										
$r \to$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$p(n)$
$P_{1,r}$	1										1
$P_{2,r}$	1	1									2
$P_{3,r}$	1	1	1								3
$P_{4,r}$	1	2	1	1							5
$P_{5,r}$	1	2	2	1	1						7
$P_{6,r}$	1	3	3	2	1	1					11
$P_{7,r}$	1	3	4	3	2	1	1				15
$P_{8,r}$	1	4	5	5	3	2	1	1			22
$P_{9,r}$	1	4	7	6	5	3	2	1	1		30
$P_{10,r}$	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1	42

Замечание 5.1. Заметим, что под термином «разбиение числа» обычно понимается именно то, что мы назвали *неупорядоченным разбиением числа*. Эти числа возникают в самых различных разделах математики и её приложениях; им посвящена обширная литература и несколько монографий (см., например, [16]).

6. Числа Стирлинга второго рода и числа Белла

6.1. Числа Стирлинга второго рода

Пусть N — конечное множество. Напомним, что *разбиением* множества N называется дизъюнктное семейство $\pi = \{A_1, \ldots, A_k\}$, состоящее из непустых подмножеств $A_j \subset N$, таких, что

$$N = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_k.$$

При этом

- множества A_j мы называем *блоками* разбиения π;
- разбиение $\pi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ на k блоков называется *k-разбиением* множества N;
- тот факт, что $\pi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ образует k-разбиение множества N, будем обозначать $\pi = A_1|A_2|\ldots|A_k$.

Множество, состоящее из всех k-разбиений множества N, обозначим через $\left\{ {N \atop k} \right\}$.

Определение 6.1. *Числами Стирлинга* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ (второго рода) называется число k-разбиений n-элементного множества:

$$\left\{ {\#N \atop k} \right\} := \# \left\{ {N \atop k} \right\}.$$

Числами Белла B_n называется количество всех разбиений n-элементного множества:

$$B_n = \left\{ {n \atop 0} \right\} + \left\{ {n \atop 1} \right\} + \cdots + \left\{ {n \atop n} \right\}. \tag{6.1}$$

Непосредственно из определения, учитывая, что блоки разбиения должны быть непустыми множествами, получаем следующие частные случаи:

- $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ для всех $n \geqslant 0$. Действительно, при $n > 0$ существует только один способ разбиения n-элементного множества на n блоков: каждый блок должен содержать ровно один элемент; при $n = 0$ пустое семейство является единственным 0-разбиением пустого множества.
- $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ для всех $n > 0$: не существует 0-разбиения непустого множества.
- $\left\{ {0 \atop n} \right\} = 0$ для всех $n > 0$: не существует n-разбиения пустого множества.
- $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ для всех $k > n$: не существует k-разбиения n-элементного множества при $k > n$.
- $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$ для всех $n > 0$: существует только одно 1-разбиение n-элементного множества: оно состоит из одного блока, состоящего из самого множества.

Замечание 6.1. Несмотря на долгую историю и важность чисел Стирлинга, нет общепринятого обозначения для них. Обозначение для чисел Стирлинга, которого мы придерживаемся, было предложено Йовану Карамата. Другие распространённые обозначения: $S_{n,k}$ и $S(n,k)$.

Пример 6.1. $\left\{ {5 \atop 2} \right\} = 15$, так как у множества $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ существует пятнадцать 2-разбиений:

$1, 2, 3, 4 \mid 5$	$1, 2, 3 \mid 4, 5$	$1, 4, 5 \mid 2, 3$
$1, 2, 3, 5 \mid 4$	$1, 2, 4 \mid 3, 5$	$2, 3, 4 \mid 1, 5$
$1, 2, 4, 5 \mid 3$	$1, 2, 5 \mid 3, 4$	$2, 3, 5 \mid 1, 4$
$1, 3, 4, 5 \mid 2$	$1, 3, 4 \mid 2, 5$	$2, 4, 5 \mid 1, 3$
$2, 3, 4, 5 \mid 1$	$1, 3, 5 \mid 2, 4$	$3, 4, 5 \mid 1, 2$

Простой явной формулы для вычисления чисел $\left\{ {n \atop k} \right\}$, к сожалению, нет. Те явные формулы для $\left\{ {n \atop k} \right\}$, которые существуют, практически непригодны для их вычисления даже для маленьких n и k. К примеру, приведем одну из таких формул:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{\substack{l_1, l_2, \ldots, l_n \geqslant 0 \\ 1l_1 + 2l_2 + \cdots + nl_n = n \\ l_1 + l_2 + \cdots + l_n = k}} \frac{n!}{l_1! l_2! \cdots l_n! (1!)^{l_1} (2!)^{l_2} \cdots (n!)^{l_n}}$$

Однако мы докажем простую реккурентную формулу для чисел Стирлинга, которая позволяет без труда последовательно вычислять эти числа; кроме того, эта формула легко реализуема на компьютере.

Теорема 6.1. *Для произвольных неотрицательных n и k справедлива формула*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}. \tag{6.2}$$

◄ Доказательство основано на том простом наблюдении, что произвольное разбиение на k блоков множества $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ можно получить двумя способами:

1) либо из разбиения множества $N \backslash \{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ на $k-1$ непустых блоков и добавления затем k-го блока $\{a_n\}$:

$$A_1|A_2|\ldots|A_{k-1} \rightsquigarrow A_1|A_2|\ldots|A_{k-1}|a_n$$

2) либо из разбиения множества $N \setminus \{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots a_{n-1}\}$ на k непустых блоков и добавления затем к одному из этих k блоков нового элемента a_n:

$$A_1|A_2|\ldots|A_k \rightsquigarrow \overset{a_n}{\overset{\downarrow}{A_1}}|\overset{\downarrow}{A_2}|\ldots|\overset{\downarrow}{A_k}$$

(последнее можно осуществить k способами).

Отсюда, применяя правило суммы и произведения, получаем

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}. \quad ►$$

Формулы (6.2) и (6.1) позволяют построить таблицу для чисел Стирлинга $\left\{ {n \atop k} \right\}$ и чисел Белла B_n.

Числа Стирлинга $\left\{ {n \atop k} \right\}$ и Белла B_n

	$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$										
n	$\left\{ {n \atop 0} \right\}$	$\left\{ {n \atop 1} \right\}$	$\left\{ {n \atop 2} \right\}$	$\left\{ {n \atop 3} \right\}$	$\left\{ {n \atop 4} \right\}$	$\left\{ {n \atop 5} \right\}$	$\left\{ {n \atop 6} \right\}$	$\left\{ {n \atop 7} \right\}$	$\left\{ {n \atop 8} \right\}$	$\left\{ {n \atop 9} \right\}$	B_n
0	1										1
1	0	1									1
2	0	1	1								2
3	0	1	3	1							5
4	0	1	7	6	1						15
5	0	1	15	25	10	1					52
6	0	1	31	90	65	15	1				203
7	0	1	63	301	350	140	21	1			877
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		4140
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	21147

Докажем ещё одну рекуррентную формулу для чисел Стирлинга.

Теорема 6.2. *Для произвольных неотрицательных n и k справедлива формула*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left\{ {i \atop k-1} \right\}. \tag{6.3}$$

◀ Для доказательства этой формулы будем рассуждать следующим образом. Фиксируем какой-нибудь элемент из N, пусть это будет a_n, и представим все множество $\left\{ {N \atop k} \right\}$ в виде дизъюнктного объединения:

$$\left\{ {N \atop k} \right\} = \mathcal{P}_{k-1} \sqcup \mathcal{P}_k \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{P}_{n-1}, \tag{6.4}$$

где $\mathcal{P}_i \quad (k-1 \leqslant i \leqslant n-1)$ — это те разбиения из $\left\{ {N \atop k} \right\}$, у которых блок, содержащий элемент a_n, состоит из $n-1$ элементов. Чтобы подсчитать число разбиений во множестве $\mathcal{P}_i$, рассуждаем так:

1) сначала выберем $n-i-1$ элементов из $n-1$ элементов $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, которые вместе с a_n попадут в отмеченный блок: это можно сделать $\binom{n-1}{n-i-1} = \binom{n-1}{i}$ способами;

2) затем оставшиеся i элементов разобьем на $k-1$ непустых частей: это можно сделать $S_{i,k-1}$ способами:

$$\overbrace{a_n \underbrace{\sqcup\sqcup\ldots\sqcup}_{(n-i-1)\text{ элементов}}}^{(n-i)\text{ элементов}} \overbrace{|A_1|A_2|\ldots|A_{k-1}}^{i\text{ элементов}}$$

По правилу произведения получим $|\mathcal{P}_i| = \binom{n-1}{i} S_{i,k-1}$.

Далее, из равенства (6.4) получаем

$$\# \left\{ {N \atop k} \right\} = |\mathcal{P}_{k-1}| + |\mathcal{P}_k| + \ldots |\mathcal{P}_{n-1}|,$$

то есть

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left\{ {i \atop k-1} \right\}.$$

С учётом того, что $\left\{ {p \atop r} \right\} = 0$ при $p < r$, предыдущую формулу можно записать в виде

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left\{ {i \atop k-1} \right\}. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 6.3 (Унимодальность чисел Стирлинга). *Для всякого целого $n > 0$ последовательность чисел Стирлинга*

$$\left\{ {n \atop 0} \right\}, \left\{ {n \atop 1} \right\}, \left\{ {n \atop 2} \right\}, \ldots, \left\{ {n \atop n} \right\}$$

унимодальна. Иначе говоря, для всякого целого $n > 0$ существует номер $M(n)$, что

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} < \cdots < \left\{ {n \atop M(n)} \right\} \geqslant \left\{ {n \atop M(n)+1} \right\} > \cdots > \left\{ {n \atop n} \right\},$$

причём $M(n) = M(n-1)$ или $M(n) = M(n-1)+1$.

◀ Докажем индукцией по n. При $n = 1, n = 2$ утверждение очевидно (см. таблицу для чисел Стирлинга). Допустим, что доказана унимодальность чисел Стирлинга для всех $i \leqslant n-1$, и докажем справедливость для n.

Рассмотрим два случая: $2 \leqslant k \leqslant M(n-1)$ и $M(n-1)+2 \leqslant k \leqslant n$.

а) Пусть $2 \leqslant k \leqslant M(n-1)$. Используя равенство (6.2), получаем

$$\left\{ {n \atop k} \right\} - \left\{ {n \atop k-1} \right\} =$$

$$= \left(\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \right) - \left(\left\{ {n-1 \atop k-2} \right\} + (k-1) \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \right) =$$

$$= \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} - \left\{ {n-1 \atop k-2} \right\} + k \left(\left\{ {n-1 \atop k} \right\} - \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \right) + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} > 0$$

по предположению индукции.

b) Пусть $M(n-1)+2 \leqslant k \leqslant n$. Используя (6.3) и учитывая, что $M(i) \leqslant M(n-1)$ при $i < n-1$, получаем

$$\left\{ {n \atop k} \right\} - \left\{ {n \atop k-1} \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(\left\{ {i \atop k-1} \right\} - \left\{ {i \atop k-2} \right\} \right) < 0$$

по предположению индукции.

Сравним теперь величины $\left\{ {n \atop M(n-1)} \right\}$ и $\left\{ {n \atop M(n-1)+1} \right\}$. Если $\left\{ {n \atop M(n-1)} \right\} \geqslant \left\{ {n \atop M(n-1)+1} \right\}$, то полагаем $M(n) = M(n-1)$. Если же $\left\{ {n \atop M(n-1)} \right\} < \left\{ {n \atop M(n-1)+1} \right\}$, то полагаем $M(n) = M(n-1)+1$. ▶

Теорема 6.4. *Число сюръективных отображений из n-элементного множества N в r-элементное множество R равно $r! \left\{ {n \atop r} \right\}$. То есть*

$$\#\mathbf{Sur}(N,R) = r! \left\{ {\#N \atop \#R} \right\}.$$

◀ Пусть $R = \{1, 2, \ldots, r\}$. Тогда любое сюръективное отображение $f\colon N \to R$ порождает однозначно разбиение π_f множества N на r блоков, а именно:

$$\pi_f = f^{-1}(1) | f^{-1}(2) | \ldots | f^{-1}(r).$$

Обратно, любому разбиению π множества N на r блоков соответствует ровно $r!$ сюръективных отображений $f : N \to \{1, 2, \ldots, r\}$, у которых $\pi_f = \pi$ (они получаются при перестановке элементов множества $R = \{1, 2, \ldots, r\}$). ▶

6.2. Числа Белла

Приведём рекуррентную формулу для чисел Белла.

Теорема 6.5. *Справедливы равенства*

$$B_0 = 1,$$
$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_{n-k-1}, \quad \textit{при} \quad n \geqslant 1.$$

◀ $B_0 = 1$, так как пустое семейство является единственным 0-разбиением пустого множества.

Пусть $n > 0$. Чтобы подсчитать число B_n всех возможных разбиений n-элементного множества $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$, будем рассуждать следующим образом. Фиксируем какой-нибудь элемент из N — пусть это будет a_n — и обозначим через A блок разбиения, который содержит этот элемент. Далее, для $0 \leqslant k \leqslant n-1$ обозначим через $\mathcal{P}_k$ все разбиения множества N, в которых блок A, кроме элемента a_n, содержит ещё какие-нибудь k элементов из N. Понятно, что если через $\mathcal{P}(N)$ обозначить все разбиения множества N, то

$$\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \ldots \mathcal{P}_k \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{P}_{n-1}. \tag{6.5}$$

Любое разбиение из множества $\mathcal{P}_k$ однозначно строится в два шага:

1 шаг: выберем k элементов из $N \setminus \{a_n\} = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, которые добавим к элементу a_n в блок A, — это можно сделать $\binom{n-1}{k}$ способами;

2 шаг: возьмём какое-нибудь разбиение оставшихся $n-1-k$ элементов — это можно сделать B_{n-1-k} способами.

По правилу произведения $|\mathcal{P}_k| = \binom{n-1}{k} B_{n-1-k}$. Теперь из (6.5) по правилу суммы получаем

$$B_n = |\mathcal{P}(N)| = |\mathcal{P}_0| + |\mathcal{P}_1| + \ldots |\mathcal{P}_k| + \cdots + |\mathcal{P}_{n-1}| = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_{n-k-1}. \quad \blacktriangleright$$

Приведём без доказательства одно неожиданное равенство, связанное с числами Белла.

Теорема 6.6. *Для любого неотрицательного целого числа n справедлива формула*

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!},$$

где e — основание натурального логарифма.

Например, из данного равенства и приведённой выше таблицы для чисел Стирлинга и Белла, получаем следующие равенства:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = 2e, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^7}{k!} = 877e \quad \text{или} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^9}{k!} = 21147e.$$

7. Формула включений и исключений

Принцип включения-исключения — одно из фундаментальных средств перечислительной комбинаторики. Важность этого принципа лежит не в самом результате, а в его широкой применимости.

7.1. Формула включений и исключений

Лемма 7.1. *Пусть N — конечное множество и A, P, Q — его подмножества. Тогда*

(i) $\big|N \setminus A\big| = \big|N\big| - \big|A\big|$;

(ii) $\big|P \cup Q\big| = \big|P\big| + \big|Q\big| - \big|P \cap Q\big|$.

◀ (*i*) Имеем $N = A \cup (N \setminus A)$. Отсюда, так как множества A и $N \setminus A$ не пересекаются, то по правилу суммы $|N| = |A| + |N \setminus A|$.

(*ii*) Имеем $P \cup Q = (P \setminus (P \cap Q)) \sqcup (Q \setminus (P \cap Q)) \sqcup (P \cap Q)$. По правилу суммы и по доказанному утверждению (i) получаем требуемое равенство. ▶

Теорема 7.1 (Формула включений и исключений).
Пусть N — конечное множество и $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — его подмножества. Тогда

$$|N \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)| = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots (-1)^k S_k, \qquad (7.1)$$

где

$$
\begin{aligned}
S_0 &= |N|,\\
S_1 &= \sum_{i=1}^{k} |A_i|,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
S_m &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant k} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_m}|\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
S_k &= |A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|.
\end{aligned}
$$

◀Покажем, что

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k| = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{k-1}S_k. \tag{7.2}$$

Тогда наша теорема будет следовать из предыдущей леммы (i), если мы положим $A = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$. Формулу (7.2) докажем индукцией по числу k подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Если $k = 1$, то все ясно: $|A_1| = S_1$.

Допустим, что формула (7.2) доказана для $k = 1, k = 2, \ldots, k = m$ подмножеств. В таком предположении докажем ее справедливость для $k = m + 1$. Имеем

$$|\underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_m}_{P} \cup \underbrace{A_{m+1}}_{Q}| \overset{\text{лемма (ii)}}{=\!=} |P| + |Q| - |P \cap Q| =$$

$$|\underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_m}_{P}| + |\underbrace{A_{m+1}}_{Q}| - |\underbrace{(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \cap A_{m+1}}_{P \cap Q}|.$$

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_m| \overset{\text{по предп. индукц.}}{=\!=}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_m|.$$

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \cap A_{m+1}| = |(A_1 \cap A_{m+1}) \cup \cdots \cup (A_m \cap A_{m+1})| \overset{\text{по предп. индукц.}}{=\!=}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i \cap A_{m+1}| - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{m+1}| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{m+1}|.$$

Подставляя полученные выражения для $|P|$ и $|P \cap Q|$ в исходную формулу и группируя члены, получим

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_{m+1}| = \sum_{i=1}^{m+1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant m+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \cdots +$$

$$+ (-1)^m |A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{m+1}|. \quad \blacktriangleright$$

Приведём другую (иногда более удобную форму) формулы включений и исключений.

Теорема 7.2 (Формула включений и исключений).
Пусть имеется n предметов и k свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Каждый из этих предметов может обладать или не обладать любым из этих свойств. Обозначим через $\mathcal{N}(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_m})$ число предметов, обладающих свойствами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_m}$ (и, быть может, некоторыми другими). Тогда число $\mathcal{N}(\varnothing)$ предметов, не обладающих ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, определяется равенством

$$\mathcal{N}(\varnothing) = S_0 - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^k S_k,$$

где $S_0 = n$, а

$$S_m = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant k} \mathcal{N}(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_m}) \qquad (m = 1, \ldots, k).$$

◀ Пусть $N = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — множество данных n предметов, и пусть
A_1 — подмножество N, обладающих свойством α_1,
. . . . . .
A_k — подмножество N, обладающих свойством α_k.
Тогда $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m}$ — это подмножество N, элементы которого обладают свойствами $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}$.

По условию теоремы $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m}| = \mathcal{N}(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})$. Теперь теорема 7.2 следует непосредственно из теоремы 7.1. ▶

7.2. Задача о совпадениях

Применим формулу включений и исключений к решению следующей задачи. [6]

Задача 7.1. Пусть колода состоит из n карт, пронумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Сколькими способами можно расположить карты в колоде так, чтобы ни для одного i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ карта с номером i не занимала i-е место?

Решение. Рассмотрим множество N, состоящее из всевозможных расположений карт в колоде. Ясно, что $|N| = n!$. Рассмотрим далее на этом множестве n свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, где свойство α_i имеет вид: «i-я карта занимает в колоде i-е место».

Расположение карт в колоде удобно обозначать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

где верхняя строка указывает номер места в колоде, а нижняя — номер карты на этом месте.

Число $\mathcal{N}(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})$ расположений, при которых карта с номером i_s занимает место i_s для $s = 1, 2, \ldots, m$, равно $(n-m)!$, что легко усмотреть из того, что такое расположение должно иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & i_1 & \ldots & i_2 & \ldots & i_m & \ldots & n \\ j_1 & \ldots & i_1 & \ldots & i_2 & \ldots & i_m & \ldots & j_n \end{pmatrix},$$

при котором m карт $i_1, i_2, \ldots, i_m$ остаются на «своих местах», а перемещаться могут только остальные $(n-m)$ карт. Отсюда делаем вывод, что

$$S_0 = |N| = n!$$

[6] Эта задача, известная в различных вариантах, была впервые предложена Монтмором (1708) и была обобщена Лапласом и многими другими математиками.

$$S_m = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} \mathcal{N}(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m}) = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} (n-m)! =$$

$$= (n-m)! \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} 1 = (n-m)!\times$$

$$\times(\text{число строго монот. слов } i_1, i_2, \ldots, i_m, \text{ в алф. } \{1,2,\ldots,n\}) =$$

$$= (n-m)!\binom{n}{m} = (n-m)!\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!}.$$

Теперь по формуле включений и исключений получаем, что число расположений, в которых i-я карта $(i = 1,\ldots,n)$ не занимает i-е место, равно:

$$n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

Задача решена. ▶

Литература

1. *Айгнер М. Комбинаторная теория.* — М.: Мир, 1982. — 558 с.

2. *Андерсон Д. А. Дискретная математика и комбинаторика.* — М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. — 960 с.

3. *Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика.* — М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. — 400 с.

4. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике.* — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с.

5. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика.* — М.: Мир, 1998. — 703 с.

6. *Липский В. Комбинаторика для программистов.* — М.: Мир, 1988. — 199 с.

7. *Новиков Ф. А. Дискретная математика. 2-е изд.* — СПб.: Питер, 2013. — 432 с.

8. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика.* — М.: Мир, 1980. — 476 с.

9. *Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ / 2-е изд.* — М.: Изд. МГУ, 1985. — 308 с.

10. *Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ. Очерки истории.* — М.: Изд. МГУ, 1996. — 125 с.

11. *Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики.* — М.: Наука, 1982. — 384 с.

12. *Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Том I.* — М.: Мир, 1990. — 440 с.

13. *Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Том II.* — М.: Мир, 2009. — 767 с.

14. *Холл М. Комбинаторика.* — М.: Мир, 1970. — 328 с.

15. *Ху Т. Ч., Шинг М. Т. Комбинаторные алгоритмы.* — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004. — 330 с.

16. *Эндрюс Г. Теория разбиений.* — М.: Наука, 1982. — 256 с.

17. *Aigner M. A Course in Enumeration.* — Berlin: Springer, 2007. — 575 p.

18. *Mariconda C., Tonolo A. Discrete Calculus. Methods for Counting.* — Springer, Unitext, 2016. — 674 p.

Вадим Римиханович Рагимханов

Дискретная математика. Часть II. Элементы комбинаторики

Учебное пособие

Издательство ДГУ
г. Махачкала, ул. М. Ярагского, 59^e

Email автора для отзывов и замечаний:
Отзывы и замечания