**Роль равномерного и нормального распределений**

**Роль равномерного распределения**

Важная роль равномерного распределения связана с двумя факторами:

1) Это распределение является важнейшим из всех распределения и в ситуации, когда истинное распределение вероятностей неизвестно, равномерное распределение используется для первичной (пусть и грубой) оценки числовых характеристик случайных величин;

2) Целый ряд ситуаций обладает симметрией, делающей равномерное распределении хорошим приближением реального распределения, так что расчеты с помощью этого распределения подобных ситуациях вполне оправданы.

Приведем несколько обоснованных формул для равномерного (одномерного) распределения (на отрезке [*a,b*]):

- плотность распределения:

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{b-a}, x\in [a,b]\\0, x \notin [a,b]\end{array}\right. ;$$

- функция распределения:

$$F\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}0, x<a\\\frac{x-a}{b-a},x\in \left[a,b\right]\\1, x>b\end{array}\right.;$$

- математическое ожидание (среднее):

$$M\left(x\right)=\frac{a+b}{2};$$

- дисперсия:

$$D\left(x\right)=\frac{\left(b-a\right)^{2}}{12};$$

- стандартное отклонение:

$σ\left(x\right)=\sqrt{D\left(x\right)}$*=*$\frac{\left(b-a\right)}{2√3}$ .

**Выделенная роль нормального распределения.**

Особая роль нормального распределения теоретически обоснована центральной предельной теоремой, которую идеологически можно сформулировать следующим образом: закон распределения среднеарифметического большого числа случайных величин при достаточно общих условиях близок к нормальному. Общие условия сводятся к тому, что отдельные отклонения каждой случайной величины должны быть одного порядка малости и малы по сравнению с суммарным отклонением (отклонением суммы случайных величин). Поскольку в экономических и финансовых приложениях довольно часто имеют дело со среднеарифметическими (или суммами) большего числа случайных величин, важность нормального распределения трудно переоценить: по этому закону распределены величины финансовых потоков, доходы компаний, зависящие от большого числа факторов, ошибки измерения различных величин и т.д.

Приведем несколько обоснованных форму для нормального одномерного распределение, которые могут оказаться полезными:

- плотность распределения:

$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2π}σ}exp[-{(x-m)^{2}}/{2σ^{2}]}$;

- функция распределения:

$$F\left(x\right)=0,5+Ф\left(\frac{x-m}{σ}\right)$$

- математические ожидание (среднее):

$$M\left(x\right)=m;$$

- дисперсия:

$D\left(x\right)=σ^{2}$.

Здесь $Ф \left(\frac{x-m}{σ}\right)$ – функция Лапласа, $σ$ - стандартное отклонение.

**Коррелированность финансовых операций**

Понятие коррелированности, взаимосвязи, взаимозависимости финансовых операций являются одними из важнейших в финансовом анализе. Это связано с тем, что в реальном бизнесе коррелированные, взаимосвязанные финансовые операции встречаются значительно чаще, чем независимые и некоррелированные. При хеджировании, например, необходимо подбирать только коррелированные операций, причем коррелированные с основой операцией отрицательно. При диверсификации необходимо проводить либо независимые (некоррелированные) операции, либо отрицательно коррелированные.

Случайные величины X и Y называется коррелированными, если их корреляционный момент (или ковариация)

$$K\_{xy}=Cov\left(X,Y\right)=M[\left(x-M\left(x\right)\right)\left(y-M\left(y\right)\right)]=M\left(XY\right)-M\left(X\right)∙M\left(Y\right)$$

отличен от нуля и некоррелированными, если равен нулю. Корреляционный момент $K\_{xy}$ и коэффициент корреляции $ρ\_{xy}$ связаны между собой следующим соотношением $K\_{xy}=σ\_{x}σ\_{y}ρ\_{xy}; $ независимые случайные величины некоррелированы, обратное утверждение неверно.

 Пусть операции $Q^{\left(1\right)} и Q^{\left(2\right)} $некоррелированы, тогда дисперсия их суммы равна сумме дисперсий, поэтому риск суммарной операции равен $r=\sqrt{r\_{1}^{2}+r\_{2}^{2}}$.

В общем случае, т.е. для двух произвольных финансовых операций $Q^{(1)} и Q^{(2)}$, риск суммарной операции равен:

$r=\sqrt{r\_{1}^{2}+2r\_{1}r\_{2}ρ\_{12}+r\_{2}^{2}}$*,*

где $ρ\_{12}- коэфициент корреляции сучайных доходов операций.$

Это следует из свойства дисперсии суммы случайных величин

$$D\left(X+Y\right)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)+2Cov\left(X,Y\right).$$

Докажем, что $\left.\left|ρ\right.\_{12}\right|\leq 1.$ Рассмотрим неравенство

$$M\left[\left(\frac{X-m\_{x}}{σ\_{x}}\pm \frac{Y-m\_{y}}{σ\_{y}}\right)^{2}\right]>0.$$

Возводя в квадрат выражение под знаком математического ожидания, получим

$$M\left[\left(\frac{X-m\_{x}}{σ\_{x}}\pm \frac{Y-m\_{y}}{σ\_{y}}\right)^{2}\right]=$$

$$M\left[\left(\frac{X-m\_{x}}{σ\_{x}}\right)^{2}\pm 2\frac{X-m\_{x}}{σ\_{x}}\frac{Y-m\_{y}}{σ\_{y}}+\left(\frac{Y-m\_{y}}{σ\_{y}}\right)^{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{σ\_{X}^{2}}M(X-m\_{X})^{2}\pm \frac{2}{σ\_{X}σ\_{Y}}M\left[\left(X-m\_{X}\right)\left(Y-m\_{Y}\right)+\frac{1}{σ\_{Y}^{2}}M(X-m\_{Y})\right]=$$

=$\frac{D(x)}{σ\_{x}^{2}}\pm \frac{2Cov(X,Y)}{σ\_{x}σ\_{y}}+\frac{D(Y)}{σ\_{y}^{2}}=2\pm \frac{2Cov(X,Y)}{σ\_{X}σ\_{Y}}=2\pm 2ρ\_{12}=2(1\pm ρ\_{12})>0.$

Отсюда следует, что $\pm ρ\_{12}<1, т.е.$

$$\left|ρ\_{12}\right|\leq 1.$$

Из формулы $\left|ρ\_{12}\right|\leq 1$ вытекает, что риск суммарной операции может быть как больше величины $r=\sqrt{r\_{1}^{2}+r\_{2}^{2}}$ (если $ρ\_{12}>0$ - при так называемой положительной корреляции доходностей операций), так и меньше этой величины (если $ρ\_{12}<0$ при отрицательной корреляции доходностей операций). Вообще говоря, риск суммарной операции находится в пределах

$$\left|r\_{1}-r\_{2}\right|\leq r\leq r\_{1}+r\_{2}$$

При этом граничные значения $ \left( \left|r\_{1}-r\_{2}\right|, r\_{1}+r\_{2}\right)$ достигается при полной отрицательной $\left(ρ\_{12}=-1\right)$ и полной положительной $\left(ρ\_{12}=1\right)$ корреляции операций соответственно. Эти крайние случаи называются случаями полной антикорреляции и полной корреляции соответственно.

Рассмотрим две важные и наглядные коррелированные финансовые операции. Найдем коэффициент корреляции случайных величин $X и Y=αX.$
$$Cov\left(X,Y\right)=Cov\left(X,αX\right)=M\left(αX^{2}\right)-M\left(X\right)M\left(αX\right)=α\left[M\left(X^{2}\right)-M^{2}(X)\right]=αD\left(X\right).$$

Отсюда находим:

$$P\_{XY}= \frac{Cov(X,Y)}{σ\_{X}σ\_{Y}}=\frac{αD(X)}{\left|α\right|σ\_{X}^{2}}=signa,$$

где $signa=\left\{\begin{array}{c} 1,a>0\\-1,a<0.\end{array}\right.$

Операции $X и Y=aX при a>0$ положительно коррелированны с коэффициентом корреляции $ρ\_{XY}=1, а при α<0$ финансовые операции отрицательно положительно коррелированны с коэффициентом корреляции $ρ\_{XY}=-1$.

Значения $ρ\_{XY}=1$ и $ρ\_{XY}=-1$ означают самую сильную корреляцию и антикорреляцию, что, как известно, и имеет место при линейной зависимости между случайными величинами.