**Финансовые операции в условиях неопределенности**

**Матрицы последствий и рисков**

Степень неопределенности ситуации может быть различной. Если информация отсутствует, ситуация является полностью неопределенной. Если известны, скажем, вероятности различных исходов, ситуация вероятностна и лишь частично неопределенна. Рассмотрим обе ситуации и возможное поведение в них инвестора. Предположим, рассматривается вопрос о проведении финансовой операции. Результат ее неясен, поэтому анализируется несколько возможных решений и их последствий. Ситуация неопределенна, известно лишь, что реализуется какой-то из рассматриваемых вариантов. Если будет принято i-е решение, а ситуация есть J-я, то инвестор получит доход $q\_{ij}$ . Матрица ||$q\_{ij}$|| называется матрицей последствий (возможных решений). (Альтернативной матрице последствий, составленной из возможных доходов, является матрица последствий, составленная из возможных доходностей). Какое решение должен принять инвестор? В этой неопределенной ситуации могyт быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты инвестором. Многое будет зависеть, например, от eгo склонности к риску. Оценим риск в данной схеме. Начнем с риска, который несет i-e решение. Реальная ситуация неизвестна, но если бы инвестор ее знал, то выбрал бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход. Если ситуация j-я, то было бы принято решение, дающее доход $q\_{j}=\max\_{i}q\_{ij}$. Значит, принимая i-e решение, мы рискуем получить не qj, а только qij, т.е. принятие i-гo решения несет риск недобрать rij=qj – qij. Матрицa R= $\left‖r\_{ij}\right‖$называется матрицей рисков.

Пример. Пусть матрица последствий есть

Q=$ \left(\begin{matrix} & \\ &\begin{matrix}3&4&5\\10&6&7\\2&5&9\end{matrix} \begin{matrix}6\\8\\1\end{matrix} \end{matrix}\right)$

Составим матрицу рисков, вычитая данный элемент из максимального в каждом столбце. Для максимального в каждом столбце элемента имеем:

$q\_{1}=maxq\_{i1}=10$; $q\_{2}=maxq\_{i2}=6 $;$ q\_{3}=maxq\_{i3}=9$; $q\_{4}=maxq\_{i4}=8$.

Теперь можем записать матрицу рисков как

R=$\left(\begin{matrix} & \\ \begin{matrix}7&2&4\\0&0&2\\8&1&0\end{matrix} \begin{matrix}2\\0\\7\end{matrix}& \end{matrix}\right)$

**Принятие решений в условиях полной неопределенности**

Ситуация полной неопределенности характеризуется отсутствием любой дополнительной информации (например, о вероятностях тех или иных вариантов, реальной ситуации). Вместе с тем существуют правила-рекомендации по принятию решений в данной ситуации.

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма).

Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая неплохая, т.е приносящая самый малый доход:

$a\_{i}=minq\_{ij}\left(работаем с матрицей последствий \right)$. Но теперь выберем решение $i\_{0} с наибольшим a\_{i0}$ . Итак, правило Вальда рекомендует принять решение $i\_{0}$ такое, что$ i\_{0}=max⁡(minq\_{ij})$. Так, в нашем примере имеем $a\_{1}=3, a\_{2}=6,a\_{3}=1.$ Теперь из чисел 3,6,1 находим максимальное: 6. Значит, правило Вальда рекомендует принять второе решение.

Правило Сэвиджа (правило минимального риска).

При применении этого правила анализируется матрица рисков R=$\left‖r\_{ij}\right‖$ Рассматривая i-e решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b\_{i}=\max\_{j} r\_{ij}$ Но теперь выберем решение $i\_{0} $с наименьшим $b\_{i0}$ .Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение $i\_{0}$такое, что $b\_{i0}=\min\_{i}\max\_{j}r\_{ij}$.

В нашем примере имеем $b\_{1}=7:b\_{2}=2:b\_{3}=8$. Теперь из чисел 7,8,2 находим минимальное: 2. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять второе решение.

Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Принимается решение i, при котором достигается максимум

$\left[λminq\_{ij}+(1-λ)maxq\_{ij}\right]$ , где 0≤$ λ$≤1

Значение $λ $выбирается из субъективных соображений. Если $λ$ приближается к 1, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда; при приближении $λ $к 0 правило Гурвица приближается к правилу «розового оптимизма».

В нашем примере:

1.При $λ=1/2$ имеем

$с\_{1}=\frac{1}{2}\left(3+6\right)=4,5$; $ с\_{2}=\frac{1}{2}\left(6+10\right)=8$;$ с\_{3}=\frac{1}{2}\left(1+9\right)=5$.

 Выбирая максимальное значение $с\_{i}$, равное 8, приходим к выводу, что правило Гурвица рекомендует второе решение.

2. Если выбрать $λ=1/4$ , то

$$c\_{1}=\frac{1}{4}\*3+\frac{3}{4}\*6=5.25 ; c\_{2}=\frac{1}{4}\*6+\frac{3}{4}\*10=9; c\_{3}=\frac{1}{4}\*1+\frac{3}{4}\*9=7.$$

Выбирая максимальное значение $с\_{i}$ , равное 9, приходим к выводу, что правило Гурвица и в этом случае рекомендует второе решение.

3. Если выбрать $λ=3/4 $, получим

$$с\_{1}=\frac{3}{4}\*3+\frac{1}{4}\*6=3,75; c\_{2}=\frac{3}{4}\*6+\frac{1}{4}\*10=7; c\_{3}=\frac{3}{4}\*1+\frac{1}{4}\*9=3.$$

Выбирая максимальное значение $с\_{i}$, равное 7, приходим к выводу, что правило Гурвица и в этом случае рекомендует второе решение.

Итак, все три правила (а правило Гурвица во всех трех значениях $λ$) рекомендуют второе решение, так его и выбираем.

**Принятие решений в условиях частичной неопределенности**

Предположим, что в рассматриваемой схеме известны вероятности того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется частичной неопределенностью. Решение в такой ситуации принимается в соответствии с одним из следующих правил.

Правило максимизации среднего ожидаемого дохода

Доход, получаемый фирмой при реализации i-го решения, является случайной величиной $Q\_{i}$ с рядом распределения $p\_{j}(qi\_{ij})$ Математиче­ское ожидание $M(Q\_{i})$и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый также $Q\_{i}$. Итак, правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

 Предположим, в нашем примере вероятности есть 1/5, 4/15, 4/15, 4/15. Тогда средний ожидаемый доход при каждом решении равен

 $M\left(Q\_{1}\right)=\frac{1}{5}\*3+\frac{4}{15}(4+5+6)$=4,6;

 $M\left(Q\_{2}\right)=\frac{1}{5}\*10+\frac{4}{15}\left(6+7+8\right)=7,6;$

 $M\left(Q\_{3}\right)=\frac{1}{5}\*2+\frac{4}{15}\left(5+9+1\right)=4,4;$

Максимальный средний ожидаемый доход равен 7,6 и соответствует второму решению.

Правило минимизации сpeднeгo ожидаемого риска

Риск фирмы при реализации i-го решения является случайной величиной $R\_{i} $с рядом распределения$ p\_{j}(r\_{ij})$. Математическое ожидание$ M(R\_{i})$и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также $\overbar{R}\_{i}$ . Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск. Вычислим средние ожидаемые риски при указанных выше вероятностях:

 $M\left(R\_{1}\right)=\frac{1}{5}\*7+\frac{4}{15}\left(2+4+2\right)=3,5\left(3\right);$

$$M\left(R\_{2}\right)=\frac{1}{5}\*0+\frac{4}{15}\left(0+2+0\right)=0,5\left(3\right);$$

$$M\left(R\_{3}\right)=\frac{1}{5}\*8+\frac{4}{15}\left(1+0+7\right)=3,7\left(3\right);$$

Получаем $\overbar{R}\_{1}=3,5\left(3\right);\overbar{R} \_{2}=0,5\left(3\right);\overbar{R} \_{3}=3,7\left(3\right);$ . Минимальный средний ожидаемый риск равен 0,5(3) и соответствует все тому же второму решению. Отличием частичной (вероятностной) неопределенности от полной очень существенно. Конечно, принятие решений по правилам Вальда, Сэвиджа, Гурвица не является окончательным, лучшим (приведенный пример - исключение). Это только лишь первый шаг, некоторые предварительные соображения. Далее пытаются что-то узнать о вариантах реальной ситуации, прежде всего о возможности того или иного варианта, о его вероятности. Но когда мы начинаем оценивать вероятность варианта, это уже предполагает повторяемость рассматриваемой схемы принятия решений: это уже было в прошлом или это будет в будущем, или это повторяется где-то, например, в филиалах фирмы.

**Оптимальная (по Парето) финансовая операция**

Итак, при попытке выбрать наилучшее решение мы столкнулись с тем, что каждое решение имеет две характеристики — средний ожидаемый доход и средний ожидаемый риск. Теперь имеем оптимизационную двухкритериальную задачу по выбору наилучшего решения. Существует несколько способов постановки таких оптимизационных задач.

 Рассмотрим такую задачу в общем виде. Пусть А — некоторое множество операций, каждая операция **а** имеет две числовые характеристики Е(а), r(а) (эффективность и риск, например) и разные операции обязательно различаются хотя бы одной характеристикой. При выборе наилучшей операции желательно, чтобы Е было больше, а r меньше.

 Будем говорить, что операция а доминирует операцию b, и обозначать а > b, если Е(а) ≥ Е(b) и r(а) ≤ r(b) и хотя бы одно из этих неравенств строгое. При этом операция **а** называется доминирующей, а операция b — доминируемой. Ясно, что ни при каком разумном выборе наилучшей операции доминируемая операция не может быть признана таковой. Следовательно, наилучшую операцию надо искать среди недоминируемых операций. Множество этих операций называется множеством Парето, или множеством оптимальности по Парето.

 На множестве Парето каждая из характеристик E, r – (однозначная) функция другой. Другими словами, если операция принадлежит множеству Парето, то по одной ее характеристике можно однозначно определить другую. Пусть a, b – две операции из множества Парето, тогда r(a), r(b)- числа. Предположим, r(a)≤r(b), тогда E(a) не может быть равно E(b), так как обе точки a, b принадлежат множеству Парето. Доказано, что по характеристике r можно определить характеристику Е. Так же просто доказывается, что по характеристике E можно определить характеристику r .

Для нахождения лучшей операции иногда применяют подходящую взвешивающую формулу, которая выражает отношение инвестора к доходу и риску. Для операции Q с характеристиками ($\overbar{R},\overbar{Q}$) взвешивающая формула дает одно число, по которому и определяют лучшую операцию. Например, пусть взвешивающая формула есть $f\left(Q\right)=2\overbar{Q}-\overbar{R}.$ Это означает, что инвестор согласен на увеличение риска операции на две единицы, если доход операции увеличивается при этом не менее чем на одну единицу. Тогда для финансовых операций нашего примера имеем:

 $f\left(Q\_{1}\right)=2\*4,6-3,75=5,7$

 $f\left(Q\_{2}\right)=2\*7,63-0,5=14,7$;

$$f(Q\_{3})=2\*4,4-3,7=5,1;$$

Видно, что вторая операция - лучшая, а третья – худшая.

Правило Лапласа равновозможности

Такое правило применяют в условиях полной неопределенности: все неизвестные вероятности pj считают равными. После этого можно выбрать какое-нибудь из двух приведенных выше правил-рекомендаций принятия решений, т.е. правило максимизации среднего ожидаемого дохода, или правило минимизации среднего ожидаемого риска.

Контрольные вопросы и задания.

1.Дайте определение дохода, доходности и риска финансовой операции. .

2. Выразите доходность актива за два периода через доходности актива за каждый из периодов.

3. Выразите доходность актива за три периода в целом через доходность актива за каждый из них.

4. Выразите доходность актива за несколько периодов в целом через доходность актива за каждый из них (используйте метод математической индукции).

5. В чем состоит синергетический эффект при рассмотрении доходности актива за несколько периодов?

 6. В чем состоит выделенная роль равномерного и нормального распределений?

7. Докажите, что $\left|p\_{12}\right|$≤1.

8.Чем измеряется коррелированность финансовых операций?

9.Приведите известные вам меры риска.

10. Какие виды финансовых рисков вы знаете? Дайте им определение и краткую характеристику.

11. Дайте определение VaR.

12. Перечислите известные вам методы уменьшения риска финансовых операций, дайте им определение и краткую характеристику.

13. Дайте определение диверсификации. Приведите пример.

14. Дайте определение хеджирования. Приведите пример.

15. Дайте определение матрицам последствий и рисков.

16. Выберите матрицу последствий размерности 3 × 4, найдите матрицу рисков и проведите полный анализ ситуации.

17. Сформулируйте алгоритм принятия решений в условиях полной неопределенности.

18. Сформулируйте правила Вальда, Сэвиджа, Гурвица. Приведите примеры.

19. Сформулируйте правило максимизации среднего ожидаемого дохода. Приведите пример.

20. Сформулируйте правило минимизации среднего ожидаемого риска. Приведите пример.

21. Сформулируйте правило Лапласа равновозможности. Приведите пример.