**4.5. Системы линейных уравнений**

**1. Основные определения. Матричная запись.**

Определение 1. Системой m линейных уравнений с n независимыми х1, х2, …, хn называется система вида:

 (1)

где числа *aij* называются коэффициентами системы, *bi* – свободные члены.

Определение 2. Решением системы (1) называется совокупность n чисел с1, с2, …, сn, при постановке которых вместо х1, х2, …, хn соответственно, обращаются все уравнения в верные равенства.

Определение 3. Система (1) называется совместимой, если она имеет хотя бы одно решение и несовместимой, если не имеет решений.

Определение 4. Совместимая система называется определенной, если она имеет единственное решение и неопределенной, если она имеет множество решений.

Определение 5. Две системы линейных уравнений называется равносильными или эквивалентными, если они имеют одинаковые решения.

Определение 6. Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называется:

1) перестановка местами уравнений системы;

2) умножение уравнений системы на любое число, неравное лицо;

3) прибавление к одному уравнению системы другого его уравнения, умноженного на любое число.

При элементарных преобразованиях получается система, равносильная первоначальной.

Введем матрицы:

, , 

где *А* – называется матрица системы, *х* – матрица-столбец неизвестных, *b* – матрица-столбец свободных членов.

С учетом правила умножения матриц, систему (1) записывается в матричной форме:

*АХ=В* (2)

**2. Матричное решение системы линейных уравнений.**

Пусть уравнение содержит n уравнений с n неизвестными. Запишем систему в матричной форме:

*АХ=В*

где квадратная матрица n-го порядка, х – матрица-столбец неизвестных, b- матрица-столбец свободных членов, т.е.

, , 

Если определитель матрицы ∆≠0, то для матрицы ∆ существует обратная А-1.

Умножим матричное равенство (2) на А-1 слева:

АА-1х=А-1В.

Так как АА-1=Е, ЕХ=Х, то получаем отсюда матричное решение:

Х= А-1В (3)

Пример. Решить матричным методом следующую систему:



Решение. Выпишем матрицы:

; ; 

Находим определитель системы ∆:



Находим обратную по алгоритму (4.3):

, , 

Решение



Ответ: х1=1; х2=⅔

**3. Решение системы методом определителей (формула Крамера).**

Как и в пункте 5.2 система содержит n уравнений с n неизвестными и определитель системы ∆≠0. Тогда решение такой системы можно получить по формулам:

, *i=1, 2,…, n* (4)

Формула (4) называется формулой Крамера. В ней ∆ - определитель матрицы системы, а ∆i – тот же определитель, в котором *i*-ый столбец заменен столбцом свободных членов.

Пример. Решить методом определителей систему:



Решение. Выпишем определитель системы и вычислим его:



Следовательно, система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

, 

Вычислим ∆1 и ∆2 запишем решение:

, 

, 

**4. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли.**

Метод Гаусса – метод последовательного исключения неизвестных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований (см. п.5.1) данная система приводится к равносильной системе ступенчатого или треугольного вида, из которой находятся неизвестные (прямой и обратный ход).

Преобразования удобно проводить над расширенной матрицей системы.

Расширенной матрицей системы называется матрица В, получаемая приписыванием к матрицы системы А справа столбца свободных членов. Этот столбец определяют вертикальной чертой. Так, расширенная матрица системы (1) имеет вид:



Далее решается вопрос о совместимости системы. Для этого используется теорема Кронекера-Капелли.

Теорема. Для того, чтобы система уравнений (1) была совместима, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, т.е. *r(A)=r(B)*.

При этом возможны следующие случаи:

1). Если *r(A)* *≠r(B)*, то система не совместима (не имеет решений);

2). Если *r(A)=r(B)=n*, где n – число неизвестных в системе, то элементарные преобразования приводят данную матрицу к равносильной системе треугольного вида, из которой «обратным» ходом находят решение системы.

3). Если *r(A)=r(B)<n*, то в этом случае составляется ступенчатая система уравнений (ступенчатая матрица), имеющее бесчисленное множество решений.

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений:



Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и выполним следующие преобразования: первую строку умножим на (-3) и сложим со второй (символически -3I+II), а затем первую строку умножим на (-2) и сложим с третьей (-2I+III). Получим:



(-III) ↔ (II) означает, что третья строка умножена на -1 и меняет местами II и III строки.

Далее вторую строку сложим с первой (II+I) и умножив ее на -5, сложим с третьей:

 (последняя строка умножена на )

В результате мы получили систему треугольного вида:



Ответ: , , .