**4.4. Ранг матрицы и его вычисления**

Пусть дана матрица А=(а=ij)mn. Выделим в ней k произвольных строк и k произвольных столбцов.

Определитель k-го порядка, составленный из элементов выделенных строк и столбцов называется минором k-го порядка данной матрицы.

Число миноров k-го порядка равно Ckm∙Ckn.

Пример. Дана прямоугольная матрица



Выписать некоторые миноры различных порядков.

Решение. Миноры первого порядка являются элементами матрицы, например, M1=1.

Выделяя любые две строки и любые два столбца, получим миноры второго порядка:

, ,  и т.д.

Миноры четвертого порядка равны нулю.

Определение. Рангом матрицы А называется наибольший порядок минора, отличного от нуля.

Обозначается ранг матрицы r(A) или rangA.

Если r(A)=r(B), то матрицы А и в называются эквивалентными. В этом случае пишут А~В.

Если А квадратная матрица n-го порядка, то r(A)≤n r(A)=n в том случае, когда определитель |A|≠0.

Для вычисления ранга матрицы используют элементарные преобразования матрицы. К ним относятся:

1. умножение элементов строки (столбца матрицы на любое число;
2. прибавление к элементам строки (столбца) матрицы соответствующих элементов ее другой строки (столбца, предварительно умножив их на любое число;
3. перестановка местами двух строк (столбцов) матрицы.

При вычислении ранга матрицы надо знать следующие теоремы.

Теорема 1. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Теорема 2. Если какой-нибудь минор k-го порядка не равен нулю, а все миноры k+1-го порядка равны нулю, то ранг матрицы r(A)=k.

Существует два метода вычисления ранга матрицы: метод элементарных преобразований и метод окаймляющих миноров.

Метод элементарных преобразований – данную матрицу приводят к элементарной матрице ступенчатого вида, из которой ранг матрицы легко определяется.

Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров покажем на следующем примере.

Пример. Вычислить ранг матрицы

.

Решение. Элемент а11=4≠0, его окаймляющим минором второго порядка есть следующий минор.



Данные миноры второго порядка не вычисляются, а вычисляется минор третьего порядка, окаймляющий М2, т.е.

, так как содержит две пропорциональные строки 2-ю и 3-ю. Также равняются нули все остальные миноры 3-го порядка.

Таким образом, среди миноров второго порядков, есть отличные от нуля, а все миноры третьего порядка, равны нулю.

Следовательно, r(A)=2.