Тема 9. Приложения в теории аппроксимаций

План:

1. Системы функций Чебышева.

На отрезке [-1,1] определим многочлены Чебышева:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), n = 0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

Найдем несколько первых многочленов Чебышева по формуле (1):

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Далее используем формулу тригонометрии:

$$2\cos\varphi\cos n\varphi = \cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi \Rightarrow \cos(n+1)\varphi = 2\cos\varphi\cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi \qquad (2)$$

Полагая в (1) $\varphi = \arccos x$ и подставляя в (2), получаем:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (3)$$

Формула (3) – рекуррентная формула для полиномов Чебышева. Из (3) в частности следует, что $T_n(x)$ - многочлен n-ой степени. Последовательно получаем:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1;$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x\left(2x^2 - 1\right) - x = 4x^3 - 3x,$$

и т.д.

2. Свойства многочленов Чебышева.

1. Система $\{T_n(x)\}_{n=0,1,\ldots}$ ортогональна на отрезке [-1,1] с весом $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Имеем:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\arccos x)\cos(m\arccos x)dx = \left\{\begin{aligned} &\arccos x = \varphi \\ &d\varphi = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\} =$$

$$= -\int_{\pi}^{0}\cos n\varphi\cos m\varphi d\varphi = \int_{0}^{\pi}\cos n\varphi\cos m\varphi d\varphi = 0, n \neq m,$$

в силу ортогональности системы $\{\cos n\varphi\}$ на отрезке [0, π].

Вычислим норму:

$$\|T_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n^2(x)dx = \left\{ \begin{matrix} \arccos x = \varphi; \\ d\varphi = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix} \right\} = \int_0^{\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi = \begin{cases} \pi, n = 0 \\ \pi/2, n \geq 1 \end{cases}.$$

2. Для четных (нечетных) n многочлен $T_n(x)$ содержит только четные (нечетные) степени x, то есть является четной (нечетной) функцией.
Доказывается по индукции с помощью рекуррентной формулы (3).

3. Коэффициент при старшей степени x^n многочлена $T_n(x)$ равен 2^{n-1}.
Доказывается по индукции с помощью рекуррентной формулы (3).

4. Многочлен $T_n(x)$ имеет на интервале (-1, 1) ровно n различных действительных корней, определяемых формулой:

$$x_i = \cos(2i+1) \cdot \frac{\pi}{2n}, i = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (4)$$

Действительно,

$$T_n(x_i) = \cos(n \arccos x_i) = \cos(n \arccos(\cos \frac{2i+1}{2n}\pi)) = \cos(\frac{2i+1}{2n}\pi n) =$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} + i\pi) = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n-1.$$

5. $\max\limits_{[-1,1]} |T_n(x)| = 1$, причем максимум достигается в точках

$$\hat{x}_m = \cos \frac{m\pi}{n}, m = 0,1,\ldots,n \qquad (5)$$

При этом $T_n(\hat{x}_m) = (-1)^m$.

Из определения (1) следует, что $|T_n(x)| \leq 1$ для любого $x \in [-1;1]$. Очевидно, что

$$T_n(\hat{x}_m) = \cos(n \arccos(\cos \frac{m\pi}{n})) = \cos \frac{m\pi}{n} n = (-1)^m.$$

Замечание.

Нетрудно убедиться, что нули $T_n(x)$ (формула (4)) и точки максимума $\hat{x}$ полинома $T_n(x)$ (формула (5)) образуют чередующуюся последовательность, а именно:

$\hat{x}_0 = 1, \hat{x}_n = -1$, а для остальных значений: $x_m < \hat{x}_m < x_{m-1}$, или

$\hat{x}_{k+1} < x_k < \hat{x}_k, \quad k = 0,1,\ldots,n-1$

6. Многочлен $\hat{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), n \geq 1$ среди всех многочленов n-ой степени с a_n=1 обладает тем свойством, что $\max\limits_{[-1,1]} |P_n(x)| \geq \max\limits_{[-1,1]} |\hat{T}_n(x)| = 2^{1-n}$.

Доказывается от противного: пусть существует
$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$, что

$$\max_{[-1,1]}|P_n(x)| < \max_{[-1,1]}|\hat{T}_n(x)| = 2^{1-n}. \qquad (6)$$

Разность ($\hat{T}_n(x) - P_n(x)$) - многочлен (n-1)-ой степени, причем в силу (6) $\hat{T}_n(x) - P_n(x) \neq 0$.

Кроме того, заметим, что в силу (6) для $\hat{P}_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{2^{1-n}} \Rightarrow |\hat{P}_n(x)| < 1$.

Рассмотрим разность

$$\hat{T}_n(x) - P_n(x)\Big|_{x=\hat{x}_m} = \hat{T}_n(\hat{x}_m) - P_n(\hat{x}_m) = (-1)^m 2^{1-n} - 2^{1-n}\hat{P}_n(\hat{x}_m) = 2^{1-n}((-1)^m - \hat{P}_n(\hat{x}_m)) =$$

$$= \begin{cases} < 0, m - нечетное \\ > 0, m - четное \end{cases}$$

При переходе от $\hat{x}_m$ к $\hat{x}_{m+1}$ разность меняет знак. Всего произойдет n раз смена знака при переходе от точки $\hat{x}_0 = 1$ к точке $\hat{x}_0 = -1$. Отсюда следует, что многочлен $\hat{T}_n(x) - P_n(x)$ имеет n нулей на (-1;1) , что невозможно, так как это многочлен (n-1)-ой степени.

Замечание.

Благодаря свойству (6) многочлен $\hat{T}_n(x)$ называется *многочленом наименее отклоняющимся от нуля.*

3. Применения многочленов Чебышева к задаче интерполяции.

Задача. Оптимизировать интерполяцию полиномом Лагранжа с помощью выбора узлов интерполяции. Как выбрать узлы, чтобы минимизировать погрешность интерполяции?

Решение. Пусть [a, b]=[-1;1]. Как известно (из лекции 2) погрешность интерполяции оценивается с помощью остаточного члена: $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$. В лекции 2 была получена оценка:

$|R_n(x)| \leq \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|$, где $M_{n+1} = \max\limits_{[-1,1]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$,

$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$ - многочлен (n+1)-ой степени, с коэффициентом $a_{n+1} = 1$, построенный по узлам $\{x_n\}$, являющимся его нулями.

Имеем: $\max\limits_{[-1,1]}|R_n(x)| \leq \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max\limits_{[-1;1]}|\omega_n(x)|$.

Согласно свойству 6: $\max|\omega_n(x)| \ge \max|\hat{T}_{n+1}(x)| = 1/2^n$, а в силу свойства 5: если выбрать узлы интерполяции в точках $x_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, i = 0,1,\ldots,n$, то $\max|\hat{T}_{n+1}(x)| = 1/2^n$ и достигается в точках $\hat{x}_m$.

Но так как многочлен $\omega_n(x)$ построен по тем же нулям, что и $\hat{T}_{n+1}(x)$, и имеет коэффициент a_{n+1}=1, то $\omega_n(x) = \hat{T}_{n+1}(x)$.

Отсюда следует, что $\max\limits_{[-1,1]}|\omega_n(x)| = 1/2^n$ - наименьшее значение по сравнению с любыми другими вариантами выбора узлов интерполяции.

Вывод: выбор узлов интерполяции в качестве нулей полинома $T_{n+1}(x)$ является оптимальным по точности интерполяции многочленом $L_n(x)$.

Замечание. Для интерполяции на произвольном конечном отрезке $[a;b]$ предварительно нужно сделать замену переменной: $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \Rightarrow t \in [-1;1]$ и преобразовать формулу для узлов.

4. Равномерное приближение функций на отрезке.

Пусть $f(x) \in C[a;b]$-пространству непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций.

Введем норму: $\|f\|_C = \max\limits_{[a;b]}|f(x)|$.

Расстояние между элементами f и g , принадлежащих пространству C, порожденное данной нормой, вычисляется следующим образом:

$$\rho(f,g) = \|f - g\|_C = \max_{[a,b]}|f - g|.$$

Введенные таким образом норма и расстояние удовлетворяют всем необходимым свойствам.

Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=0,1,\ldots}$ - система многочленов.

Обозначим $Q_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$ - многочлен n-ой степени. Задача приближения функции в метрике C многочленами n-ой степени допускает 2 постановки:

1. Аппроксимация с заданной точностью: по заданному $\varepsilon > 0$ найти такой многочлен $\hat{Q}_n(x)$, что

$$\|f(x) - \hat{Q}_n(x)\|_C \le \varepsilon. \qquad (7)$$

2. Найти многочлен наилучшего равномерного приближения, то есть

$$\|f(x) - \hat{Q}_n(x)\|_C = \inf_{Q_n \in M_n}\|f - Q_n\|, \qquad (8)$$

где M_n- семейство многочленов n-ой степени.

Рассмотрим простейший вариант решения задачи 1-ого типа.

Пусть отрезок $[a,b]$=[-1;1] и $f(x)$ достаточно гладкая функция, например, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$. Тогда найдется такое n (такая степень интерполяционного полинома), что выполняется (7).

Покажем решение подобной задачи на примере.

Пример 1.

Пусть $f(x) = \sqrt{x+2},\ x \in [-1,1].$

Приблизить функцию f(x) многочленом n-ой степени так, чтобы выполнялось условие $\|f - P_n(x)\|_C < \varepsilon = 10^{-3}.$

Установить порядок полинома, реализующего данное условие.

Очевидно, что для данной f(x) существуют производные любого порядка на [-1,1]. В качестве аппроксимирующего полинома возьмем полином Лагранжа $L_n(x)$, построенный по нулям полинома Чебышева $T_{n+1}(x)$.

В силу свойств полинома Чебышева, имеем следующую оценку остаточного члена:

$$\max_{[-1,1]}\left|R_{n+1}(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{[-1,1]}\left|\omega_n(x)\right| = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n}, \quad где\ M_{n+1} = \max_{[-1,1]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Вычисляя производные заданной функции f(x), последовательно получаем:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = (-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(x+2)^{-\frac{3}{2}}, \ldots,$$

$$f^{(n+1)} = (-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}(x+2)^{-\frac{2n+1}{2}};$$

$$M_{n+1} = \max_{[-1,1]}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|f^{(n+1)}(-1)\right| = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}.$$

Отсюда получаем оценку $\max\limits_{[-1,1]}\left|R_{n+1}(x)\right| \le \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{2n+1}(n+1)!}.$

Учитывая, что $\max\limits_{[-1,1]}\left|R_{n+1}(x)\right| = \max\limits_{[-1,1]}\left|f(x) - L_n(x)\right| = \|f(x) - L_n(x)\|_C$,

достаточно выбрать порядок полинома Лагранжа $L_n(x)$ из условия: $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{2n+1}(n+1)!} < 10^{-3}.$

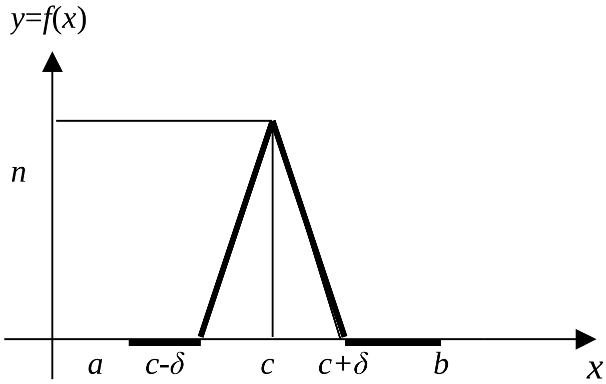
Нетрудно убедиться, что n=4 удовлетворяет поставленному условию.

Следовательно полином Лагранжа $L_4(x)$, построенный по нулям полинома Чебышева $T_5(x)$, аппроксимирует функцию $f(x)=\sqrt{x+2}$ *на* $[-1,1]$ с заданной точностью.

Для произвольной $f(x)$ (не достаточно гладкой) задача 1 решается уже не так просто.

Заметим, что характер близости в норме C сильно отличается от среднеквадратической близости (в норме L_2), что демонстрирует следующий пример.

Пример 2. Пусть *f(x)*- кусочно-линейная на отрезке $[a,b]$ – изображена на рисунке.



$\max\limits_{[a;b]} f(x)=n=f(c),\ c\in(a;b).$

Показать, что при $\delta=1/2n^3$ $\|f-0\|_C=n$ и $\|f-0\|_{L_2}=1/\sqrt{n}$.

Вывод: при $n\to\infty$ $\|f-0\|_C\to\infty, \|f-0\|_{L_2}\to 0$, то есть среднеквадратическая близость не гарантирует близости в норме С. С другой стороны, очевидно, что если, например, $\|f-g\|_C\le\varepsilon \Rightarrow \|f-g\|_{L_2}^2=\int\limits_a^b (f-g)^2\,dx\le\varepsilon^2(b-a)\Rightarrow \|f-g\|_{L_2}\le\sqrt{b-a}\|f-g\|_C$.

Таким образом, близость в норме C более жесткое условие, чем близость в норме L_2.