Тема 8. Понятие интеграла Лебега-Стилтьеса

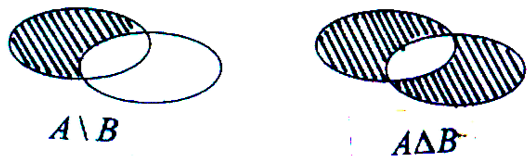
План:

1. Мера Лебега-Стильеса.

Прежде всего отметим, что наряду с объединением и пересечением над множествами определяются также две операции вычитания.

Разностью $A \setminus B$ двух множеств A и B называется множество, каждый элемент которого принадлежит множеству A и не принадлежит множеству B.

Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество $A\Delta B$, равное объединению двух разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$.



Заметим, что если мысленно двигать множества A и B относительно друг друга, то ясно, что чем меньше симметрическая разность двух данных множеств (т.е. площадь заштрихованной части), тем больше их пересечение (площадь общей части этих множеств), а значит, тем «ближе» эти множества друг к другу. Этим свойством симметрической разности мы воспользуемся для «измерения» множеств, а начнем с обобщения понятия конечного промежутка и определения его меры.

Промежутком $P = \langle a,b \rangle$ будем называть любое из следующих множеств: (a,b) - интервал, $[a,b]$ - сегмент, $[a,b)$, $(a,b]$ - полуинтервалы, причем, если не оговорено противное, будем считать a и b *действительными числами* и необязательно $a \le b$. Будем считать промежуток $P = \langle a,b \rangle$ пустым множеством $\varnothing$, если $b < a$, или если $a = b$, а промежуток P представляет собой интервал (a,b) или один из полуинтервалов $(a,b]$ и $[a,b)$.

Множество $A \subset \mathrm{R}$ называется *элементарным*, если его можно представить в виде конечного объединения некоторых промежутков:

$$A = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n .$$

Мерой промежутка $P = \langle a,b \rangle$ называется его длина $\mu P = b - a$; если $P = \varnothing$, то $\mu P = 0$.

Внешней мерой ограниченного множества $E \subset \mathrm{R}$ назовем величину

$$\mu^* E = \inf_{E \subset \bigcup_k P_k} \sum_k \mu P_k ,$$

где инфимум берется по всем конечным или счетным покрытиям множества E промежутками $P_1, P_2, ...$

Заметим, что любое ограниченное множество $E \subset \mathrm{R}$ имеет конечную внешнюю меру.

Действительно, для такого множества E существует покрытие из одного промежутка $[\inf E, \sup E]$; при этом множество сумм $\sum_k \mu P_k$ ограничено снизу нулем.

Отметим два важных свойства внешних мер:

1) *монотонность*: из $E_1 \subset E_2$ следует $\mu^* E_1 \le \mu^* E_2$ (т.к. для покрытия $E_2 \setminus E_1$ нужны дополнительные промежутки);

2) *полуаддитивность:* $\mu^*(E_1 \cup E_2) \le \mu^* E_1 + \mu^* E_2$ (т.к. если $E_1 \cap E_2 \ne \emptyset$, то промежутки для его покрытия в правой части могут встречаться два раза).

Множество $E \subset \mathrm{R}$ называется *измеримым по Лебегу*, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует элементарное множество A такое, что $\mu^*(E \Delta A) < \varepsilon$. Если множество E измеримо по Лебегу, то *мерой множества E по Лебегу* называется его внешняя мера:

$$\mu E = \mu^* E .$$

Значит, измеримые множества - это множества, близкие к элементарным множествам: они сколь угодно мало отличаются от элементарных множеств (в смысле внешней меры).

Простейшим примером измеримого множества служит любое конечное множество $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Действительно, в качестве элементарного множества A при $\forall \varepsilon > 0$ можно взять само множество E, так как

$$E = [x_1, x_1] \cup ... \cup [x_n, x_n].$$

Тогда из $E \Delta A = \emptyset$ следует, что $\mu^*(E \Delta A) = 0 < \varepsilon$. Очевидно, $\mu E = 0$.

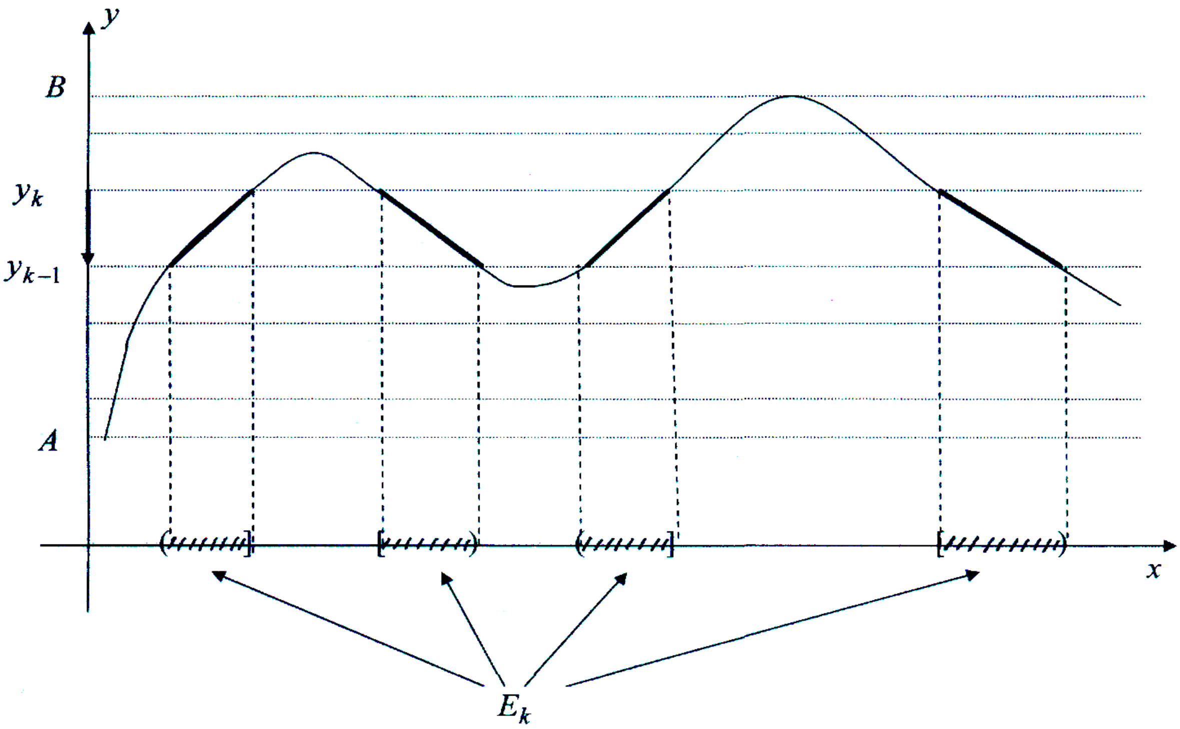
Замечание 1. Меру Лебега можно распространить и на случай неограниченных множеств E. Такое *множество E* называется *измеримым*, если измеримо любое множество вида $E \cap [-n, n]$ (n - натуральное число). Мерой множества E в этом случае называется следующий предел: $\mu E = \lim_{n \to \infty} \mu(E \cap [-n, n])$ (который может равняться и $+\infty$).

Замечание 2. Если в определении внешней меры сохранить лишь конечные покрытия ограниченного множества E промежутками, то по аналогии с мерами Лебега получим *внешнюю меру Жордана* m^*E и *меру Жордана* mE множества E.

Отметим, что мера Лебега является существенно более широким понятием, чем мера Жордана. Например, лебегова мера множества рациональных чисел равна нулю, в то время как это множество не является измеримым по Жордану.

2. Интеграл Лебега-Стилтьеса.

Пусть $f(x)$ ограничена и измерима на ограниченном множестве E. В силу ограниченности существуют конечные числа $A = \inf\limits_{x\in E} f(x)$ и $B = \sup\limits_{x\in E} f(x)$. Возьмем произвольное разбиение отрезка $[A, B]$ (по оси Oy) $T : A = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = B$. Тогда множества $e_k = E(y_{k-1} \le f < y_k)$, $k = 1,\ldots,n-1$, $e_n = E(y_{n-1} \le f \le y_n)$ также будут измеримы, т.е. существуют лебеговы меры μe_k $(k = 1,2,\ldots,n)$, и для разбиения T можно определить соответственно нижнюю и верхнюю суммы Лебега $s = \sum\limits_{i=1}^{n} y_{i-1}\mu e_i$ и $S = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \mu e_i$.



Аналогично свойствам сумм Дарбу доказываются следующие свойства сумм Лебега:

1) при добавлении новых точек разбиения нижние суммы не уменьшаются, а верхние не увеличиваются;

2) любая нижняя сумма s_1 не превосходит любой верхней суммы S_2, т.е. $s_1 \le S_2$.

Следовательно, для всевозможных разбиений T множество нижних сумм Лебега ограничено сверху, а множество верхних сумм ограничено снизу. Поэтому существуют конечные точные границы $J_* = \sup_T s$ и $J^* = \inf_T S$.

Общее значение $J_* = J^*$ этих точных границ называется *интегралом Лебега* от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается так: $\int_E f(x)dx$ или $(L)\int_E f(x)dx$.

Известно, что интегралы Дарбу I_* и I^* не для всякой ограниченной на данном отрезке функции совпадают между собой. Как будет доказано ниже, значения J_* и J^* совпадают между собой для любой ограниченной измеримой на множестве Е функции $f(x)$; другими словами, *интеграл Лебега существует и конечен в случае любой ограниченной измеримой функции*.

Действительно, по аналогии с интегралами Дарбу легко получается неравенство $s \le J_* \le J^* \le S$ для любого разбиения $T: A = y_0 < y_1 < ... < y_n = B$. Отсюда получим $0 \le J_* - J^* \le S - s = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{i-1})\mu e_i$.

Определим теперь шаг разбиения $\lambda_T = \max_{i=1,...,n}(y_i - y_{i-1})$. Тогда получим $0 \le J_* - J^* \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_T \mu e_i = \lambda_T \sum_{i=1}^{n}\mu e_i$.

Заметим, что множества $e_1, e_2, ..., e_n$ попарно не пересекаются между собой и $E = \bigcup_{i=1}^{n} e_i$. В силу аддитивности меры Лебега получим равенство $\mu E = \sum_{i=1}^{n}\mu e_i$.

Следовательно, выполняется неравенство $0 \le J_* - J^* \le \lambda_T \mu E$.

Так как шаг разбиения λ_T можно выбрать сколь угодно малым, отсюда получим $J^* - J_* = 0$ или $J^* = J_*$, т.е. интеграл Лебега $(L)\int_E f(x)dx$ существует и конечен.

Заметим, что в случае $E=[a,b]$ для интегралов Лебега принято также обозначение $\int_a^b f(x)dx$. Чтобы различать интегралы Римана и Лебега, приняты обозначения: $(R)\int_a^b f(x)dx$ (для интеграла Римана), $(L)\int_a^b f(x)dx$ (для интеграла Лебега).

3. Основные свойства интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции

В этом параграфе речь идет лишь об интегралах по *ограниченным* множествам.

Следующее утверждение называется *теоремой о среднем* для интеграла Лебега.

1^0. Если функция $f(x)$ измерима на данном множестве E и $C_1 \le f(x) \le C_2$ для данных $C_1, C_2 \in \mathrm{R}$ и $\forall x \in E$, то выполняется неравенство

$$C_1\mu E \le \int_E f(x)dx \le C_2\mu E. \qquad (1)$$

Отметим некоторые важные *следствия* из неравенства (1).

1) Если функция $f(x)=C$ ($x \in E$) постоянна, то $\int_E f(x)dx = C\mu E$.

Для доказательства достаточно в неравенстве (1) взять $C_1=C_2=C$; измеримость функции $f(x)\equiv C$ очевидна.

2) Если $\mu E=0$, то для любой функции $f(x)$, определенной на E, интеграл равен нулю: $\int_E f(x)dx=0$.

3) Если $f(x)\ge 0$ и $f(x)$ ограничена и измерима на E, то $\int_E f(x)dx \ge 0$; если же $f(x)\le 0$, то $\int_E f(x)dx \le 0$.

Следующее свойство называется *полной аддитивностью интеграла*.

2^0. Если (ограниченное) множество E представляет собой объединение $\bigcup_n E_n$ конечного или счетного множества непересекающихся между собой измеримых множеств E_n, то для любой ограниченной измеримой на E функции $f(x)$ выполняется равенство: $\int_E f(x)dx = \sum_n \int_{E_n} f(x)dx$.

3^0. Если две ограниченные измеримые функции эквивалентны между собой $f(x) \sim g(x)$ на множестве E, то $\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E g(x)dx.$

Действительно, по определению эквивалентности функций $\mu E(f(x) \neq g(x)) = 0$. Тогда для множеств $E_1 = E(f(x) \neq g(x))$ и $E_2 = E \setminus E_1$ получим равенства $\int\limits_{E_2} f(x)dx = \int\limits_{E_2} g(x)dx$, $\int\limits_{E_1} f(x)dx = 0 = \int\limits_{E_1} g(x)dx$. Остается почленно сложить эти равенства.

4^0. Интеграл Лебега обладает *линейностью*: если две функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и измеримы на данном множестве E, то для любых действительных чисел α и β выполняется равенство

$$\int\limits_E (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_E f(x)dx + \beta \int\limits_E g(x)dx.$$

5^0. Если для ограниченной измеримой на E функции $f(x)$ выполняется неравенство $f(x) \geq 0$ ($x \in E$), то $\int\limits_E f(x)dx \geq 0$.

Отсюда уже легко следует *монотонность* интеграла Лебега: если две ограниченные измеримые на E функции удовлетворяют неравенству $f(x) \geq g(x)$ ($x \in E$), то $\int\limits_E f(x)dx \geq \int\limits_E g(x)dx.$

6^0. Если функция $f(x)$ ограничена и измерима на множестве E , то $\left| \int\limits_E f(x)dx \right| \leq \int\limits_E |f(x)| dx.$

7^0. Если для измеримых на множестве E функций $f_n(x)$ ($n = 1,2,...$) существует число $M > 0$ такое, что $|f_n(x)| \leq M$ (для любого $x \in E$; $n = 1,2,...$), и существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для почти всех $x \in E$, то выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Как следует из приведенных выше свойств, интеграл Лебега обладает всеми важными свойствами обычного интеграла (аддитивностью, линейностью, монотонностью и т.д.). Однако интеграл Лебега обладает свойством 7^0, которое позволяет достаточно свободно перейти к пределу под знаком интеграла. Именно это свойство интеграла Лебега делает его удобным инструментом в различных исследованиях.

4. Сравнение интегралов Римана и Лебега для ограниченных функций

Выясним сначала, какой из этих двух интегралов определен на более широком классе функций, заданных на данном отрезке.

Как известно, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует $(R)\int\limits_a^b f(x)dx$. Однако существуют разрывные функции, интегрируемые по Риману, которые могут иметь бесконечное множество точек разрыва. При этом, как доказал А. Лебег, точек разрыва не должно быть много в смысле меры. Точнее, для существования $(R)\int\limits_a^b f(x)dx$ от ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы мера (Лебега) множества ее точек разрыва на этом отрезке равнялась нулю.

Вместе с тем, существует всюду разрывная на данном отрезке $[a,b]$ ($a<b$) функция Дирихле $D(x)$, интегрируемая по Лебегу и неинтегрируемая по Риману.

Значит, даже для ограниченных на данном отрезке функций из существования интеграла Лебега не следует существование интеграла Римана.

Оказывается, справедливо обратное утверждение.

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана на данном отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке и в смысле Лебега, причем выполняется равенство $(R)\int\limits_a^b f(x)dx = (L)\int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство. Из интегрируемости функции $f(x)$ по Риману на данном отрезке $[a,b]$ вытекает ее ограниченность на этом отрезке. Поэтому остается доказать измеримость $f(x)$ на $[a,b]$. Для этого возьмем последовательность равномерных разбиений:

$$T_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b; \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Тогда шаг разбиения $\lambda_n = \dfrac{b-a}{n}$ и $\lambda_n \to 0$ равносильно $n \to \infty$.

Построим две последовательности функций. Для каждого разбиения T_n построим свои две функции $g_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ следующим образом: при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ положим $g_n(x) = M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$, $\varphi_n(x) = m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$.

Пусть $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ - множество всех точек разбиений; оно счетно, поэтому $\mu T = 0$. В каждой другой точке $x \in [a,b] \setminus T$ последовательность $\varphi_n(x)$ возрастает, а последовательность $g_n(x)$ убывает при $n \to \infty$. Отсюда следует, что существуют $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$.

Так как при всех n выполняется неравенство $\varphi_n(x) \le f(x) \le g_n(x)$, то получим $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$, откуда следует, что $g(x) - \varphi(x) \ge 0$.

Заметим, что $\varphi_n(x)$ и $g_n(x)$ ограниченные последовательности функций (одним и тем же числом для всех $x \in [a,b] \setminus T$ и всех натуральных n). Поэтому последовательность $g_n(x) - \varphi_n(x)$ также ограничена. Функции $\varphi_n(x)$ и $g_n(x)$ измеримы (как ступенчатые функции), поэтому их разность $g_n(x) - \varphi_n(x)$ также измерима.

Следовательно, можно перейти к пределу под знаком интеграла (по свойствам интеграла Лебега): $\lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b [g_n(x) - \varphi_n(x)]dx = (L)\int_a^b [g(x) - \varphi(x)]dx.$

С другой стороны, имеем

$$\lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b [g_n(x) - \varphi_n(x)]dx = \lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b g_n(x)dx - \lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b \varphi_n(x)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} s_n = (R)\int_a^b f(x)dx - (R)\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Следовательно, $g(x) - \varphi(x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$, а значит, $\varphi(x) = f(x) = g(x)$ почти всюду на $[a,b]$.

Итак, $f(x)$ является измеримой на $[a,b]$ функцией. Раз $f(x)$ ограничена и измерима, то существует $(L)\int_a^b f(x)dx.$

Далее, $(L)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx =$

$= \lim_{n\to\infty} S_n = (R)\int_a^b f(x)dx.$ Теорема доказана.

Выясним теперь, как обстоит дело с восстановлением функции по ее производной или как основная теорема интегрального исчисления работает в случае интеграла Римана и как - в случае интеграла Лебега.

Для интеграла Римана основная теорема интегрального исчисления формулируется в различных формах. Речь идет о формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a,b]$.

Для интегралов Римана это равенство часто может не выполняться. Например, возможны случаи:

1) функция $f(x)$ может быть интегрируемой по Риману, но для нее не существует первообразная $F(x)$ (на отрезке $[a,b]$);

2) для функции $f(x)$ может существовать первообразная $F(x)$, но сама функция $f(x)$ может быть неинтегрируемой по Риману, даже если $F'(x)$ существует во всех $x \in [a,b]$ и ограничена.

Следовательно, интеграл Римана не решает вопрос о восстановлении функции по ее производной даже в случае ограниченности производных.

В случае интеграла Лебега имеет место

Теорема. Если производная $f'(x)$ существует во всех точках отрезка $[a,b]$ и она ограничена на этом отрезке, то выполняется равенство $f(x) = f(a) + (L)\int_a^x f'(t)dt$ для всех $x \in [a,b]$; в частности, при $x = b$ получим равенство $(L)\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Доказательство. Сначала докажем требуемое равенство при $x = b$. Раз существует конечная производная $f'(x)$, то сама функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а потому она измерима на $[a,b]$. Саму производную можно представить в виде следующего предела:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad \left(\Delta x = \frac{1}{n}\right).$$

Раз под знаком предела находится последовательность измеримых функций, производная $f'(x)$ как предел измеримых функций, будет измеримой функцией. По свойствам конечного предела функции выполняется неравенство

$\left| n\left(f\left(x+\frac{1}{n} \right) - f(x) \right) - f'(x) \right| < \varepsilon = 1$ при всех n, начиная с некоторого номера n_0.

Отсюда получим $f'(x) - 1 < n\left(f\left(x+\frac{1}{n} \right) - f(x) \right) < f'(x) + 1$ $(\forall n > n_0)$, т.е. последовательность функций $\varphi_n(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n} \right) - f(x) \right)$ является ограниченной.

Следовательно, можно перейти к пределу под знаком интеграла Лебега:

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} n\left(f\left(x+\frac{1}{n} \right) - f(x) \right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n} \right)dx - n\int_a^b f(x)dx \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt - n\int_a^b f(x)dx \right) = \quad = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(nf(\xi_1)\left(b+\frac{1}{n}-b \right) - nf(\xi_2)\left(a+\frac{1}{n}-a \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(f(\xi_1) - f(\xi_2) \right) = f(b) - f(a).$$

Замечание. По ходу доказательства мы функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a,b]$, продолжаем на отрезок $[a,b+1]$. Для этого достаточно считать, что $f(x) = f(b) + f'(b)(x-b)$ при $x > b$.

Итак, теорема доказана при $x = b$. Легко увидеть, что приведенные выше рассуждения применимы к любому отрезку $[a,x] \subset [a,b]$.

Теорема полностью доказана.

Естественно, возникает вопрос: как восстановить функцию по ее производной, если производная оказывается неограниченной и точек неограниченности бесконечно много?

Для решения, в частности, и этой задачи интеграл Лебега распространяется на неограниченные функции: сначала – на неотрицательные функции, а затем – на функции любого знака.