Тема 7. Построение интеграла Римана-Стилтьеса

План:

1. Определение интеграла Римана- Стилтьеса (Стилтьеса)

Пусть $f(x)$ *и* $g(x)$ ограниченные функции на отрезке $[a,b]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим $\lambda = \max \Delta x_i$, $i = 0,1,\cdots,n-1$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Выберем на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ точку ξ_i $(i = 0,1,\cdots,n-1)$, найдем значение $f(\xi_i)$ функции $f(x)$, умножим его на приращение функции $g(x)$, соответствующее частичному отрезку $[x_i, x_{i+1}]$, то есть на $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$.

Составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta g(x_i), \qquad (1)$$

которая называется *интегральной суммой Стилтьеса*.

Если существует конечный предел интегральной суммы Стилтьеса при $\lambda \to 0$, то этот предел *называется интегралом Римана-Стилтьеса* функции $f(x)$ по функции $g(x)$ и обозначается следующим образом:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta g(x_i) = I. \qquad (2)$$

Приведем более точное определение интеграла Стилтьеса.

Число I называется *интегралом Стилтьеса*, если для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое что, для любого разбиения отрезка $[a,b]$ и при любом выборе точек ξ_i в соответствующих частичных отрезках, для $\lambda < \delta$ выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

При этом, если существует интеграл (2), то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ по функции $g(x)$.

Из определения интеграла Стилтьеса видно, что единственное отличие этого определения от определения интеграла Римана состоит в том, что значение функции $f(\xi_i)$ умножается не на приращение аргумента Δx_i, а на приращение второй функции $\Delta g(x_i)$. Поэтому интеграл Римана является частным случаем интеграла Стилтьеса, когда функция $g(x) = x$, $x \in [a,b]$.

2. Условия существования интеграла Стилтьеса

Рассмотрим условия существования интеграла Стилтьеса, предполагая, что функция $g(x)$ монотонно возрастает. Также будем полагать, что $a < b$. В этом случае $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) > 0$

Обозначим через m_i точную нижнюю границу функции $f(x)$ на отрезке $[x_i\,,\ x_{i+1}]$, через M_i точную верхнюю границу $f(x)$ на этом отрезке.

Суммы

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot \Delta g(x_i)\,, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \Delta g(x_i) \qquad (3)$$

называются *нижней и верхней суммами Дарбу-Стилтьеса*.

Ясно, что s *и* S являются точными границами интегральных сумм Стилтьеса, то есть

$$s < \sigma < S.$$

Суммы Дарбу-Стилтьеса, как и суммы Дарбу случая интеграла Римана, обладают следующими свойствами.

<u>Свойство 1.</u> Если к имеющимся точкам разбиения отрезка $[a, b]$ добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу-Стилтьеса может только возрастать, а верхняя сумма - только уменьшаться.

<u>Свойство 2.</u> Любая нижняя сумма Дарбу-Стилтьеса не превосходит верхней суммы по любому разбиению.

Из этих свойств следует, что множество нижних сумм Дарбу-Стилтьеса $\{s\}$ ограничено сверху какой-то верхней суммой, например, S. Тогда это множество $\{s\}$ имеет точную верхнюю границу $I_* = \sup\{s\}$ причем $I_* \leq S$.

Аналогично, множество верхних сумм Дарбу-Стилтьеса $\{S\}$ ограничено снизу числом I_* и имеет конечную точную нижнюю границу $I^* = \inf\,\{S\}$. Очевидно, что $I_* \leq I^*$.

Из сказанного следует, что $s \leq I_* \leq I^* \leq S$ для любых верхней и нижней сумм Дарбу-Стилтьеса. При этом число I_* называется нижним интегралом Дарбу-Стилтьеса, число I^* - верхним интегралом Дарбу-Стилтьеса.

Рассмотрим основной признак существования интеграла Стилтьеса для рассматриваемого случая, то есть для случая, когда функция $g(x)$ монотонно возрастает.

<u>Теорема 1.1.</u> Для существования интеграла Стилтьеса необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0. \qquad (4)$$

Обозначим через ω_i колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, то есть $\omega_i = M_i - m_i$. Тогда

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \cdot \Delta g(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot \Delta g(x_i).$$

В этом случае условие существования интеграла Стилтьеса имеет вид:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i) = 0. \qquad (5)$$

Рассмотрим парные классы функций $f(x)$ $и$ $g(x)$, для которых существует интеграл Стилтьеса.

<u>Теорема 1.2.</u> Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение, то существует интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b f(x) dg(x). \qquad (6)$$

<u>Теорема 1.3.</u> Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле Римана, то есть существует $\int_a^b f(x)dx$, а функция $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|g(\bar{x}) - g(x)| \le L(\bar{x} - x), \qquad (7)$$

где $L = const,\ a \le x < \bar{x} \le b.$ Тогда интеграл Стилтьеса (6) существует.

<u>Теорема 1.4.</u> Пусть функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана на $[a, b]$, а функцию $g(x)$ можно представить в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$g(x) = \int_a^{\bar{x}} \varphi(t) dt + C,$$

где $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл Стилтьеса (6) существует.

<u>Замечание.</u> Пусть функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную $g'(x)$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Причем, если её значения в точках, где производная не существует, выбрать произвольно, то эта производная функция $g'(x)$ интегрируема в собственном или несобственном смысле на $[a, b]$. Тогда, как известно, имеет место равенство

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) dt.$$

Если $g'(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, b]$, то для функции $g(x)$ применима теорема 1.4.

Теорема 1.5. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ являются разрывными в одной и той же точке $x = c \in [a, b]$, то интеграл Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ не существует, то есть не существует

$$\int_a^b f(x)dg(x).$$

Теорема 1.6. Ни один из этих классов $C_{[a,b]}$ и $V_{[a,b]}$ не может быть расширен с сохранением этого свойства.

Теорему 1.8 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1.6$'$. Если для данной функции $f(x)$ существует интеграл Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$ по любой функции $g(x) \in V_{[a,b]}$, то функция $f(x) \in C_{[a,b]}$. Если же интеграл Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$ по данной функции $g(x)$ для функции $f(x) \in C_{[a,b]}$ существует, то функция $g(x) \in V_{[a,b]}$.

3. Свойства интеграла Стилтьеса

Из определения интеграла Стилтьеса вытекают его свойства, аналогичные свойства интеграла Римана. Приведем некоторые из них.

1. Если существует интеграл $\int_a^b f dg$ и $a < c < b$, то существуют интегралы $\int_a^c f dg$ и $\int_c^b f dg$ и выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_a^b f(x)dg(x).$$

В отличие от интеграла Римана, обратное не всегда верно.

Например, рассмотрим функции $f(x) = \begin{cases} 0 & при -1 \le x \le 0, \\ 1 & при \quad 0 < x \le 1; \end{cases}$ и $g(x) = \begin{cases} 0 & при -1 \le x < 0, \\ 1 & при \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$

Интеграл $\int_{-1}^0 f(x)dg(x) = 0$, так как соответствующая сумма Стилтьеса равна нулю, ввиду того, что $f(x) = 0$ для $x \in [-1; 0]$.

Интеграл $\int_0^1 f(x)dg(x) = 0$, так как $g(x)$ на $[0; 1]$ постоянная функция, поэтому $\Delta g(x_i) = 0$.

Рассмотрим интеграл $\int_{-1}^1 f(x)dg(x)$. Разобьем отрезок $[-1; 1]$ на части так, чтобы точка 0 не оказалась среди точек разбиения. Составим сумму Стилтьеса:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta g(x_i).$$

Если $0 \in [x_k, x_{k+1}]$, то в сумме σ останется только одно $k-e$ слагаемое, остальные будут равны нулю, так как $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) = 0$ $(i \neq k)$:

$$\sigma = f(\xi_k) \cdot \big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) = f(\xi_k).$$

При этом при $\xi_k \leq 0$ сумма $\sigma = 0$; при $\xi_k > 0$ сумма $\sigma = 1$, поэтому предела для суммы Стилтьеса не существует. А значит, не существует интеграла Стилтьеса $\int_{-1}^{1} f(x) dg(x)$.

<u>Замечание.</u> Если же в точке $x = c$ хотя бы одна из функций $f(x)$ *и* $g(x)$ непрерывна, а другая из функций ограничена в окрестности этой точки, то из существования интегралов $\int_a^c f(x) dg(x)$ и $\int_c^b f(x) dg(x)$ следует существование интеграла $\int_a^b f(x) dg(x)$.

2. Если $f(x)$ интегрируема в смысле Стилтьеса по функциям $g_1(x)$ *и* $g_2(x)$ на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ интегрируема по функции $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ на $[a, b]$ и выполняется равенство:

$$\int_a^b f(x) d\big(g_1(x) + g_2(x)\big) = \int_a^b f(x) dg_1(x) + \int_a^b f(x) dg_2(x).$$

3. *Интегрирование по частям.* Если функция $g(x)$ интегрируема по функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то и функция $f(x)$ интегрируема по функции $g(x)$ на $[a, b]$ и выполняется равенство:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x) =$$

$$= f(b) \cdot g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b g(x) df(x).$$

Отсюда следует, что если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ интегрируема по $g(x)$ в смысле Стилтьеса на $[a, b]$.

Таким образом, если функция $g(x)$ интегрируема по функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в смысле Стилтьеса, то и функция $f(x)$ интегрируема по функции $g(x)$ на $[a, b]$.

4. *Теорема о среднем.* Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ ограничена на отрезке$[a, b]$: $m \leq f(x) \leq M$;

2) функция $g(x)$ монотонно возрастает на $[a, b]$.

Тогда найдется $\mu \in [m, M]$ такое, что если существует интеграл Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$, то выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \mu\big(g(b) - g(a)\big).$$

Если же $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то это равенство примет вид:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(\xi)[g(b) - g(a)], \quad \text{где} \quad a \le \xi \le b.$$

5. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $g(x)$ имеет ограниченное изменение, то для интеграла Стилтьеса имеет место оценка:

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le M \cdot V, \text{где} \quad M = \max_{[a,b]}|f(x)|, \quad V = \bigvee_a^b g(x).$$