Тема 6. Функции конечной вариации и абсолютно непрерывные функции

План:

1. Монотонные функции

Функция $f(\mathbf{x})$ является **монотонной** (рис. 1) (как при возрастании, так и убывании), если для двух произвольных точек x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется одно из следующих неравенств: $f(x_1) \le f(x_2)$ (монотонно возрастающая функция) $f(x_1) \ge f(x_2)$ (монотонно убывающая функция).

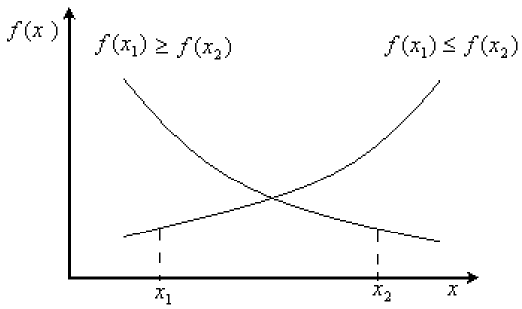

Рис. 1. К понятию монотонной функции

На рис. 2 изображен график функции, которая монотонно убывает при $\mathbf{x} \le 0$ и монотонно возрастает при $\mathbf{x} \ge 0$. Функция достигает своего минимума в точке $\mathbf{x} = x^*$ (начале координат) и монотонна по обе стороны от точки минимума.

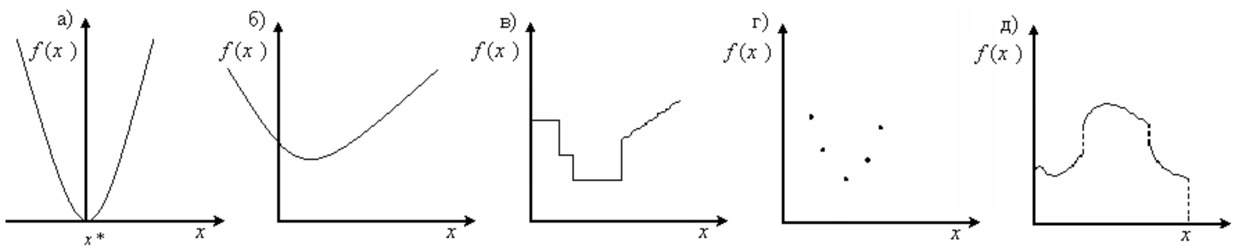

Рис. 2. а) гладкая, б) непрерывная, в) разрывная,
г) дискретная, д) произвольная

Функция $f(\mathbf{x})$ называется унимодальной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна на $[a;b]$ и существуют числа α и β, $a \le \alpha \le \beta \le b$, такие, что :

1. если $a < \alpha$, то на отрезке $[a; \alpha]$ $f(\mathbf{x})$ монотонно убывает;
2. если $b > \beta$ то на отрезке$[\beta; b]$ $f(\mathbf{x})$ монотонно возрастает;

3. при $\mathbf{x}\in[\alpha;\ \beta]$ $f(\mathbf{x}) = f^{*} = \min\limits_{[a;b]} f(\mathbf{x})$.

Возможно вырождение в точку одного или двух из отрезков $[a;\alpha]$, $[\alpha;\beta]$, $[\beta;b]$ (рис. 3).

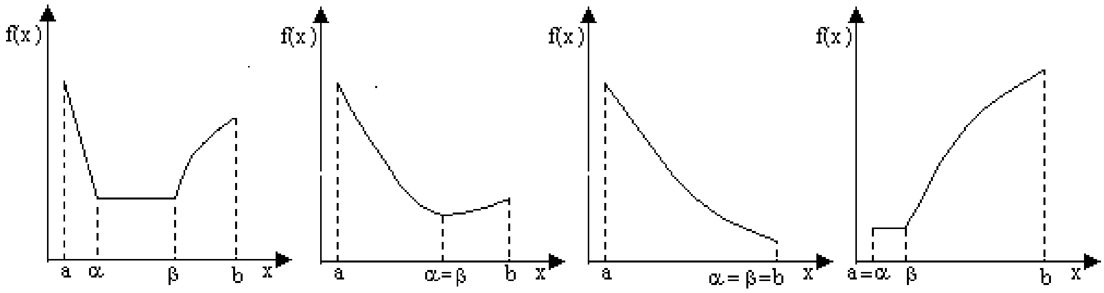

Рис. 3. Варианты расположения и вырождения в точку отрезков монотонности и постоянства унимодальной функции

Множество функций, унимодальных на отрезке $[a;b]$ будем обозначать $Q[a;b]$. Унимодальность функций является исключительно важным свойством, которое широко используется в оптимизационных исследованиях.

2. Функции конечной вариации, их свойства. Связь с монотонными функциями.

Функции конечной вариации также называют функциями с ограниченным изменением.

Определение функции с ограниченным изменением.

Пусть функция $g(x)$ определена на отрезке $[a,b] (a < b)$. Разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Составим сумму

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|. \qquad (1)$$

Если суммы (1) для любого разбиения отрезка $[a,b]$ ограничены сверху, то говорят, что функция $g(x)$ *имеет ограниченное изменение* (или ограниченную вариацию) на отрезке $[a,b]$. При этом точную верхнюю грань совокупности этих сумм называют *полным изменением* (или полной вариацией) функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$. При этом пишут

$$\bigvee_a^b g(x) \sup\{v\}.$$

Можно выбрать последовательность таких разбиений отрезка $[a,b]$ так, чтобы полное изменение равнялось пределу последовательности соответствующих сумм σ.

Любая ограниченная монотонная функция является функцией с ограниченным изменением на конечном или бесконечном промежутке.

Если $g(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$, то

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\big)\right| = |g(b) - g(a)|, \quad (2)$$

поэтому $\bigvee_a^b g(x) = |g(b) - g(a)|$.

Классы функций с ограниченным изменением.

1. Пусть функция $g(x)$ задана на конечном или бесконечном промежутке $[a,b]$, и пусть промежуток $[a,b]$ можно разбить на конечное число частей, что в каждой части функция $g(x)$ является монотонной. Тогда функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение на промежутке $[a,b]$.

Такая функция называется кусочно-монотонной.

2. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица на промежутке $[a,b]$, то есть

$$|g(\overline{x}) - g(x)| \le L \cdot |\overline{x} - x|, \qquad (3)$$

где L - некоторая постоянная, $\overline{x}$ и x - любые точки промежутка $[a,b]$, то она имеет ограниченное изменение.

Так как

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \le L \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = L(b-a),$$

то имеем $\bigvee_a^b g(x) \le L(b-a)$.

Следующий класс является частным случаем класса **2**.

3. Если функция $g(x)$ на промежутке $[a,b]$ имеет ограниченную производную: $|g'(x)| \le L$ для $\forall x \in [a,b]$, то она имеет ограниченную вариацию на этом промежутке.

В этом случае по теореме о среднем имеем:

$$|g(\overline{x}) - g(x)| = |g'(c)(\overline{x} - x)| \le L \cdot |\overline{x} - x|$$

для любого c между точками $\overline{x}$ *и* x.

Следующий класс функций с ограниченным изменением является более обширным.

4. Пусть функцию $g(x)$ на промежутке $[a,b]$ можно представить в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$g(x)=\int_a^x \varphi(t)dt + C,$$

где функция $\varphi(t)$ - функция интегрируемая вместе со своей абсолютной величиной $|\varphi(t)|$ на промежутке $[a,b]$ (хотя бы в несобственном смысле). Тогда на этом промежутке она имеет ограниченное изменение, причем

$$\bigvee_a^b g(x) \le \int_a^b |\varphi(t)|dt\,.$$

Приведем некоторые *свойства функций с ограниченным изменением*.

1. Любая функция с ограниченным изменением ограничена.

2. Пусть две функции $g_1(x)$ *и* $g_2(x)$ имеют ограниченное изменение на промежутке $[a,b]$. Тогда функции $g_1(x) \pm g_2(x)$ *и* $g_1(x) \cdot g_2(x)$ также имеют ограниченное изменение на этом промежутке.

Если $|g_2(x)\,| \ge c > 0$, то частное $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ так же будет функцией с ограниченным изменением ($c = const$).

3. Пусть функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение на промежутке $[a,b]$ и $a < c < b$. Тогда она имеет ограниченное изменение на каждом из промежутков $[a,c]$ и $[c,b]$, и обратно. Причем выполняется равенство

$$\bigvee_a^b g(x) = \bigvee_a^c g(x) + \bigvee_c^b g(x).$$

4. Если функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение на промежутке $[a,b]$, то для $\forall x \in [a,b]$ полное изменение $\varphi(x) = \bigvee_a^x g(t)$ является монотонно возрастающей и ограниченной функцией от переменной x.

Критерии для функций с ограниченным изменением.

Теорема 1.2. Функция $g(x)$ имеет на промежутке $[a,b]$ ограниченное изменение тогда и только тогда, когда найдется монотонно возрастающая и ограниченная на этом промежутке функция $G(x)$ такая, что на любом промежутке $[x', x''] \subset [a,b]$ приращение функции $g(x)$ не превосходит соответствующего приращения функции $G(x)$:

$$g(x'') - g(x') \le G(x'') - G(x').$$

При этом функцию $G(x)$ называют мажорантой для $g(x)$.

Теорема 1.3. Функция $g(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ ограниченное изменение тогда и только тогда, когда она на этом отрезке представляется в виде разности двух монотонно возрастающих и ограниченных функций:

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x).$$

3. Абсолютно непрерывные функции

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой счётной системы непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ из отрезка $[a;b]$ таких, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

В технических целях удобнее использовать несколько другое определение абсолютной непрерывности, а именно

Определение 1′. *Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1(\varepsilon) > 0$, что для любой конечной системы непересекающихся интервалов $\{(a_k; b_k)\}_{k=1}^{n}$ из отрезка $[a;b]$ таких, что*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta_1, \tag{1.2}$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Докажем *эквивалентность этих двух определений.*

Доказательство.

1) О1 $\Rightarrow$ О1′. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1(\varepsilon) = \min\left(\delta(\varepsilon), \frac{b-a}{2}\right)$. Тогда если $\mathfrak{J} \equiv \{(a_k; b_k)\}_{k=1}^{n}$ — произвольная конечная система непересекающихся интервалов с суммой длин, меньшей $\delta_1(\varepsilon)$, то случай $\mathfrak{J} = \{(a;b)\}$ исключён и систему $\mathfrak{J}$ можно достроить до счётной системы непересекающихся интервалов (по-прежнему вложенных в отрезок $[a;b]$) с суммой длин меньше $\delta(\varepsilon)$. Для достроенной системы будет верно (1.1), а значит, для исходной — и подавно верно (1.3).

2) О1′ $\Rightarrow$ О1. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\frac{\varepsilon}{2})$. Тогда если $\{(a_k; b_k)\}_{k=1}^{n}$ — произвольная счётная система непересекающихся интервалов с суммой длин, меньшей $\delta(\varepsilon)$, то для любой её конечной подсистемы (которая, конечно, тоже будет непересекающейся) будет верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда в силу свойств рядов с положительными членами получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

что и требовалось.