Тема 5. Сравнение с интегралом по Риману

План:

1. Сравнительный анализ интегралов Римана и Лебега

Выясним сначала, какой из этих двух интегралов определен на более широком классе функций, заданных на данном отрезке.

Как известно, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует $(R)\int_a^b f(x)dx$. Однако существуют разрывные функции, интегрируемые по Риману, которые могут иметь бесконечное множество точек разрыва. При этом, как доказал А. Лебег, точек разрыва не должно быть много в смысле меры. Точнее, для существования $(R)\int_a^b f(x)dx$ от ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы мера (Лебега) множества ее точек разрыва на этом отрезке равнялась нулю.

Вместе с тем, существует всюду разрывная на данном отрезке $[a,b]$ ($a<b$) функция Дирихле $D(x)$, интегрируемая по Лебегу и неинтегрируемая по Риману.

Значит, даже для ограниченных на данном отрезке функций из существования интеграла Лебега не следует существование интеграла Римана.

Оказывается, справедливо обратное утверждение.

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана на данном отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке и в смысле Лебега, причем выполняется равенство $(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx$.

Доказательство. Из интегрируемости функции $f(x)$ по Риману на данном отрезке $[a,b]$ вытекает ее ограниченность на этом отрезке. Поэтому остается доказать измеримость $f(x)$ на $[a,b]$. Для этого возьмем последовательность равномерных разбиений:

$$T_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b; \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad (n = 1,2,...).$$

Тогда шаг разбиения $\lambda_n = \dfrac{b-a}{n}$ и $\lambda_n \to 0$ равносильно $n \to \infty$.

Построим две последовательности функций. Для каждого разбиения T_n построим свои две функции $g_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ следующим образом: при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ положим $g_n(x) = M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$, $\varphi_n(x) = m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$.

Пусть $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ - множество всех точек разбиений; оно счетно, поэтому $\mu T = 0$. В каждой другой точке $x \in [a,b] \setminus T$ последовательность $\varphi_n(x)$ возрастает, а последовательность $g_n(x)$ убывает при $n \to \infty$. Отсюда следует, что существуют $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$.

Так как при всех n выполняется неравенство $\varphi_n(x) \le f(x) \le g_n(x)$, то получим $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$, откуда следует, что $g(x) - \varphi(x) \ge 0$.

Заметим, что $\varphi_n(x)$ и $g_n(x)$ ограниченные последовательности функций (одним и тем же числом для всех $x \in [a,b] \setminus T$ и всех натуральных n). Поэтому последовательность $g_n(x) - \varphi_n(x)$ также ограничена. Функции $\varphi_n(x)$ и $g_n(x)$ измеримы (как ступенчатые функции), поэтому их разность $g_n(x) - \varphi_n(x)$ также измерима.

Следовательно, можно перейти к пределу под знаком интеграла (по свойствам интеграла Лебега): $\lim\limits_{n\to\infty} (L)\int\limits_a^b [g_n(x) - \varphi_n(x)]dx = (L)\int\limits_a^b [g(x) - \varphi(x)]dx.$

С другой стороны, имеем

$$\lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b [g_n(x) - \varphi_n(x)]dx = \lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b g_n(x)dx - \lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b \varphi_n(x)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} s_n = (R)\int_a^b f(x)dx - (R)\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Следовательно, $g(x) - \varphi(x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$, а значит, $\varphi(x) = f(x) = g(x)$ почти всюду на $[a,b]$.

Итак, $f(x)$ является измеримой на $[a,b]$ функцией. Раз $f(x)$ ограничена и измерима, то существует $(L)\int\limits_a^b f(x)dx.$

Далее, $(L)\int\limits_a^b f(x)dx = (L)\int\limits_a^b g(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b g_n(x)dx =$

$= \lim_{n\to\infty} S_n = (R)\int_a^b f(x)dx.$ Теорема доказана.

Выясним теперь, как обстоит дело с восстановлением функции по ее производной или как основная теорема интегрального исчисления работает в случае интеграла Римана и как - в случае интеграла Лебега.

Для интеграла Римана основная теорема интегрального исчисления формулируется в различных формах. Речь идет о формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a,b]$.

Для интегралов Римана это равенство часто может не выполняться. Например, возможны случаи:

1) функция $f(x)$ может быть интегрируемой по Риману, но для нее не существует первообразная $F(x)$ (на отрезке $[a,b]$);

2) для функции $f(x)$ может существовать первообразная $F(x)$, но сама функция $f(x)$ может быть неинтегрируемой по Риману, даже если $F'(x)$ существует во всех $x \in [a,b]$ и ограничена.

Следовательно, интеграл Римана не решает вопрос о восстановлении функции по ее производной даже в случае ограниченности производных.

В случае интеграла Лебега имеет место

Теорема. Если производная $f'(x)$ существует во всех точках отрезка $[a,b]$ и она ограничена на этом отрезке, то выполняется равенство $f(x) = f(a) + (L)\int_a^x f'(t)dt$ для всех $x \in [a,b]$; в частности, при $x = b$ получим равенство $(L)\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Доказательство. Сначала докажем требуемое равенство при $x = b$. Раз существует конечная производная $f'(x)$, то сама функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а потому она измерима на $[a,b]$. Саму производную можно представить в виде следующего предела:

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}\quad\left(\Delta x=\frac{1}{n}\right).$$

Раз под знаком предела находится последовательность измеримых функций, производная $f'(x)$ как предел измеримых функций, будет измеримой функцией. По свойствам конечного предела функции выполняется неравенство $\left|n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)-f'(x)\right|<\varepsilon=1$ при всех n, начиная с некоторого номера n_0.

Отсюда получим $f'(x)-1<n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)<f'(x)+1$ ($\forall n>n_0$), т.е. последовательность функций $\varphi_n(x)=n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)$ является ограниченной.

Следовательно, можно перейти к пределу под знаком интеграла Лебега:

$$\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)dx= \quad =\lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx-n\int_a^b f(x)dx\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}}f(t)dt-n\int_a^b f(x)dx\right)= \quad =\lim_{n\to\infty}\left(n\int_b^{b+\frac{1}{n}}f(x)dx-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)dx\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(nf(\xi_1)\left(b+\frac{1}{n}-b\right)-nf(\xi_2)\left(a+\frac{1}{n}-a\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(f(\xi_1)-f(\xi_2)\right)=f(b)-f(a).$$

Замечание. По ходу доказательства мы функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a,b]$, продолжаем на отрезок $[a,b+1]$. Для этого достаточно считать, что $f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)$ при $x>b$.

Итак, теорема доказана при $x=b$. Легко увидеть, что приведенные выше рассуждения применимы к любому отрезку $[a,x]\subset[a,b]$.

Теорема полностью доказана.

Естественно, возникает вопрос: как восстановить функцию по ее производной, если производная оказывается неограниченной и точек неограниченности бесконечно много?

Для решения, в частности, и этой задачи интеграл Лебега распространяется на неограниченные функции: сначала – на неотрицательные функции, а затем – на функции любого знака.