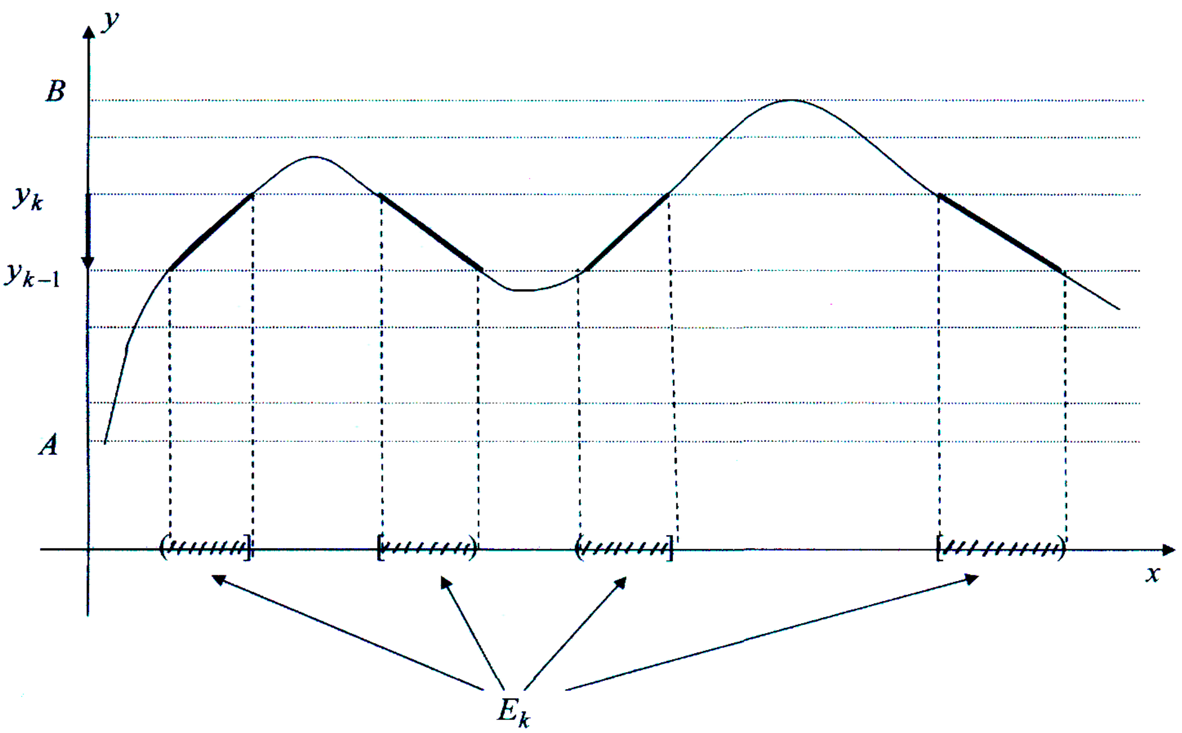
Тема 4. Различные определения интеграла по Лебегу

План:

1. Интеграл от ограниченной измеримой функции.
2. Свойства интеграла Лебега.
3. Суммируемые функции.

1. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции.

Пусть $f(x)$ ограничена и измерима на ограниченном множестве E. В силу ограниченности существуют конечные числа $A = \inf_{x \in E} f(x)$ и $B = \sup_{x \in E} f(x)$. Возьмем произвольное разбиение отрезка $[A, B]$ (по оси Oy) $T: A = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = B$. Тогда множества $e_k = E(y_{k-1} \le f < y_k)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $e_n = E(y_{n-1} \le f \le y_n)$ также будут измеримы, т.е. существуют лебеговы меры μe_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, и для разбиения T можно определить соответственно нижнюю и верхнюю суммы Лебега $s = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \mu e_i$ и $S = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu e_i$.



Аналогично свойствам сумм Дарбу доказываются следующие свойства сумм Лебега:

1) при добавлении новых точек разбиения нижние суммы не уменьшаются, а верхние не увеличиваются;

2) любая нижняя сумма s_1 не превосходит любой верхней суммы S_2, т.е. $s_1 \le S_2$.

Следовательно, для всевозможных разбиений T множество нижних сумм Лебега ограничено сверху, а множество верхних сумм ограничено снизу. Поэтому существуют конечные точные границы $J_* = \sup\limits_T s$ и $J^* = \inf\limits_T S$.

Общее значение $J_* = J^*$ этих точных границ называется *интегралом Лебега* от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается так: $\int\limits_E f(x)dx$ или $(L)\int\limits_E f(x)dx$.

Известно, что интегралы Дарбу I_* и I^* не для всякой ограниченной на данном отрезке функции совпадают между собой. Как будет доказано ниже, значения J_* и J^* совпадают между собой для любой ограниченной измеримой на множестве Е функции $f(x)$; другими словами, *интеграл Лебега существует и конечен в случае любой ограниченной измеримой функции*.

Действительно, по аналогии с интегралами Дарбу легко получается неравенство $s \le J_* \le J^* \le S$ для любого разбиения $T: A = y_0 < y_1 < ... < y_n = B$. Отсюда получим $0 \le J_* - J^* \le S - s = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - y_{i-1})\mu e_i$.

Определим теперь шаг разбиения $\lambda_T = \max\limits_{i=1,...,n}(y_i - y_{i-1})$. Тогда получим $0 \le J_* - J^* \le \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_T \mu e_i = \lambda_T \sum\limits_{i=1}^{n}\mu e_i$.

Заметим, что множества $e_1, e_2, ..., e_n$ попарно не пересекаются между собой и $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} e_i$. В силу аддитивности меры Лебега получим равенство $\mu E = \sum\limits_{i=1}^{n}\mu e_i$.

Следовательно, выполняется неравенство $0 \le J_* - J^* \le \lambda_T \mu E$.

Так как шаг разбиения λ_T можно выбрать сколь угодно малым, отсюда получим $J^* - J_* = 0$ или $J^* = J_*$, т.е. интеграл Лебега $(L)\int\limits_E f(x)dx$ существует и конечен.

Заметим, что в случае $E=[a,b]$ для интегралов Лебега принято также обозначение $\int\limits_a^b f(x)dx$. Чтобы различать интегралы Римана и Лебега, приняты обозначения: $(R)\int\limits_a^b f(x)dx$ (для интеграла Римана), $(L)\int\limits_a^b f(x)dx$ (для интеграла Лебега).

2. Свойства интеграла Лебега.

В этом параграфе речь идет лишь об интегралах по *ограниченным* множествам.

Следующее утверждение называется *теоремой о среднем* для интеграла Лебега.

1^0. Если функция $f(x)$ измерима на данном множестве E и $C_1 \le f(x) \le C_2$ для данных $C_1, C_2 \in \mathrm{R}$ и $\forall x \in E$, то выполняется неравенство

$$C_1\mu E \le \int\limits_E f(x)dx \le C_2\mu E. \qquad (1)$$

Отметим некоторые важные *следствия* из неравенства (1).

1) Если функция $f(x)=C$ ($x\in E$) постоянна, то $\int\limits_E f(x)dx = C\mu E$.

Для доказательства достаточно в неравенстве (1) взять $C_1=C_2=C$; измеримость функции $f(x)\equiv C$ очевидна.

2) Если $\mu E=0$, то для любой функции $f(x)$, определенной на E, интеграл равен нулю: $\int\limits_E f(x)dx=0$.

3) Если $f(x)\ge 0$ и $f(x)$ ограничена и измерима на E, то $\int\limits_E f(x)dx \ge 0$; если же $f(x)\le 0$, то $\int\limits_E f(x)dx \le 0$.

Следующее свойство называется *полной аддитивностью интеграла*.

2^0. Если (ограниченное) множество E представляет собой объединение $\bigcup\limits_n E_n$ конечного или счетного множества непересекающихся между собой измеримых множеств E_n, то для любой ограниченной измеримой на E функции $f(x)$ выполняется равенство: $\int\limits_E f(x)dx = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f(x)dx$.

3^0. Если две ограниченные измеримые функции эквивалентны между собой $f(x) \sim g(x)$ на множестве E, то $\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E g(x)dx.$

Действительно, по определению эквивалентности функций $\mu E(f(x) \neq g(x)) = 0$. Тогда для множеств $E_1 = E(f(x) \neq g(x))$ и $E_2 = E \setminus E_1$ получим равенства $\int\limits_{E_2} f(x)dx = \int\limits_{E_2} g(x)dx$, $\int\limits_{E_1} f(x)dx = 0 = \int\limits_{E_1} g(x)dx$. Остается почленно сложить эти равенства.

4^0. Интеграл Лебега обладает *линейностью*: если две функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и измеримы на данном множестве E, то для любых действительных чисел α и β выполняется равенство

$$\int\limits_E (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_E f(x)dx + \beta \int\limits_E g(x)dx.$$

5^0. Если для ограниченной измеримой на E функции $f(x)$ выполняется неравенство $f(x) \geq 0$ ($x \in E$), то $\int\limits_E f(x)dx \geq 0$.

Отсюда уже легко следует *монотонность* интеграла Лебега: если две ограниченные измеримые на E функции удовлетворяют неравенству $f(x) \geq g(x)$ ($x \in E$), то $\int\limits_E f(x)dx \geq \int\limits_E g(x)dx.$

6^0. Если функция $f(x)$ ограничена и измерима на множестве E, то $\left|\int\limits_E f(x)dx\right| \leq \int\limits_E |f(x)|dx$.

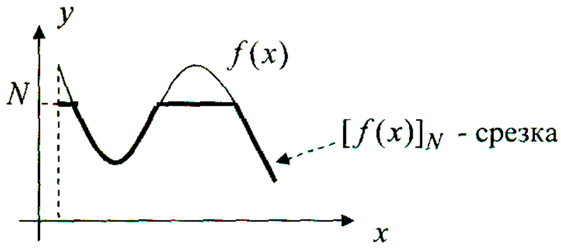
7^0. Если для измеримых на множестве E функций $f_n(x)$ ($n = 1,2,...$) существует число $M > 0$ такое, что $|f_n(x)| \leq M$ (для любого $x \in E$; $n = 1,2,...$), и существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для почти всех $x \in E$, то выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Как следует из приведенных выше свойств, интеграл Лебега обладает всеми важными свойствами обычного интеграла (аддитивностью, линейностью, монотонностью и т.д.). Однако интеграл Лебега обладает свойством 7^0, которое позволяет достаточно свободно перейти к пределу под знаком интеграла. Именно это свойство интеграла Лебега делает его удобным инструментом в различных исследованиях.

3. Суммируемые функции.

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и измерима на данном ограниченном множестве E и пусть N - любое натуральное число. Тогда функция $[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \le N, \\ N, \text{ если } f(x) > N, \end{cases}$ называется N-*срезкой* функции $f(x)$.



Ясно, что функция $[f(x)]_N$ будет измеримой и ограниченной на множестве E. Очевидно, $0 \le [f(x)]_N \le N \;\; \forall x \in E$; измеримость множеств вида $E([f(x)]_N > c)$ легко устанавливается. Поэтому при любом натуральном N существует $\int\limits_E [f(x)]_N dx$.

Интегралом Лебега $\int\limits_E f(x)dx$ от неотрицательной измеримой на ограниченном множестве E функции $f(x)$ называется следующий предел:

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_E [f(x)]_N \, dx.$$

Если этот предел конечен, то функция $f(x)$ называется *суммируемой* или *интегрируемой по Лебегу* на множестве E.

Ясно, что если неотрицательная функция $f(x)$ ограничена и измерима на (ограниченном) множестве E, то она будет суммируемой на этом множестве.

Действительно, так как $f(x)$ ограничена, то ее значения будут не больше некоторого натурального числа N. Поэтому при всех достаточно больших значениях N на множестве E выполняется тождество $[f(x)]_N \equiv f(x)$, а поэтому получается предел стационарной числовой последовательности:

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_E [f(x)]_N \, dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f(x)dx.$$

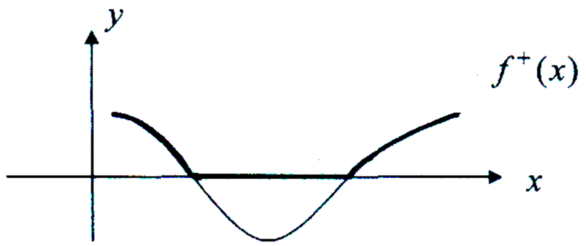
Замечание. Если функция $f(x)$ неотрицательна и измерима на неограниченном множестве $E \subset \mathrm{R}$, то интеграл Лебега от нее определяется в виде предела

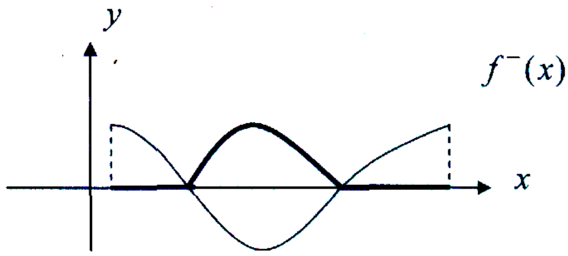
$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap[-n,n]} f(x)dx$ (он существует, конечный или бесконечный, как предел монотонной последовательности).

Суммируемые функции (любого знака)

Пусть функция $f(x)$ измерима на данном множестве $E \subset \mathrm{R}$. Тогда (+)-*срезкой* и (-)-*срезкой* этой функции называются соответственно следующие определенные на множестве E две функции:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \ge 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0; \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{если } f(x) \le 0, \\ 0, & \text{если } f(x) > 0. \end{cases}$$





Легко проверить, что выполняются следующие равенства: $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, $f^-(x) = (-f(x))^+$.

Отсюда, так как из измеримости $f(x)$ на множестве E вытекает измеримость $|f(x)|$ на этом множестве, получим, что на множестве E измеримыми будут обе функции: $f^+(x)$ и $f^-(x)$. Раз обе срезки являются неотрицательными измеримыми функциями на множестве E, то имеют смысл следующие два интеграла Лебега: $\int_E f^+(x)dx$ и $\int_E f^-(x)dx$.

Интегралом Лебега от измеримой на данном множестве E функции $f(x)$ называется следующая разность интегралов:

$$(L)\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx,$$

если хотя бы один из интегралов в правой части конечен.

Если же оба интеграла в правой части конечны, то функция $f(x)$ называется *суммируемой* или *интегрируемой по Лебегу* на множестве E.

Замечание. Это же определение интеграла Лебега остается в силе в случае функций любого знака (ограниченных или неограниченных), измеримых на данном неограниченном множестве $E \subset \mathrm{R}$.

Ясно, что любая ограниченная измеримая на данном ограниченном множестве E функция $f(x)$ будет суммируемой на этом множестве.

Как видно из приводимых ниже утверждений, суммируемые функции обладают свойствами, аналогичными свойствам ограниченных измеримых функций.

1. Суммируемые функции обладают линейностью: если функции $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы на данном множестве E, то при любых действительных α и β функция $\alpha f(x)+\beta g(x)$ также суммируема на E и выполняется равенство

$$\int_E (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_E f(x)dx + \beta\int_E g(x)dx.$$

2. Если функция $f(x)$ суммируема на данном множестве E, а функция $g(x)$ измерима и ограничена на E, то функция $f(x)g(x)$ суммируема на E.

3. Суммируемые функции обладают полной аддитивностью в следующей форме: если $f(x)$ суммируема на множестве E и это множество представимо в виде конечного или счетного объединения измеримых непересекающихся множеств E_n, т.е. $E=\bigcup_n E_n$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то выполняется равенство

$$\int_E f(x)dx = \sum_n \int_{E_n} f(x)dx;$$

однако в случае счетного объединения из суммируемости $f(x)$ на всех E_n не вытекает суммируемость $f(x)$ на E, хотя в случае конечного объединения вытекает.

4. Для измеримых функций сама функция $f(x)$ суммируема на данном множестве E тогда и только тогда, когда на нем суммируема функция $|f(x)|$.

Напомним, что такая «жесткая» связь между интегрируемостью самой функции и ее модуля в интегралах Римана отсутствует. Хотя из интегрируемости по Риману в собственном смысле самой функции вытекает интегрируемость ее модуля на рассматриваемом отрезке, обратное утверждение не верно. Так, функция $f(x)$, равная 1 при $x \in Q$ и равная -1 при $x \notin Q$, на отрезке $[0,1]$ не интегрируема по Риману, а функция $\left|f(x)\right|$ интегрируема на $[0,1]$.

В общем случае интегралов Римана нет следования и в другом направлении: функция $g(x)$, равная $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ при $x \in (0,1]$ и равная 0 при $x=0$, на отрезке $[0,1]$ интегрируема по Риману (в несобственном смысле), а ее модуль $\left|g(x)\right|$ - нет.

Заметим, что построенная функция $g(x)$ на отрезке $[0,1]$ измерима, но не суммируема, т.е. не интегрируема по Лебегу, и при этом интегрируема по Риману в несобственном смысле.

Если интегрируемость в несобственном смысле не требуется, то еще легче строятся примеры, которые показывают, что не всякая измеримая функция является суммируемой.

Действительно, пусть $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ Тогда $f(x)$ измерима на отрезке $E=[0,1]$ и при натуральных N получим:

$$\int_0^1 [f(x)]_N\,dx=\int_0^{\frac{1}{N}}[f(x)]_N\,dx+\int_{\frac{1}{N}}^1[f(x)]_N\,dx=\int_0^{\frac{1}{N}}N\,dx+\int_{\frac{1}{N}}^1\frac{1}{x}\,dx==N\cdot\frac{1}{N}+\ln x\Big|_{\frac{1}{N}}^1=$$

$$=1+\ln 1-\ln\frac{1}{N}=1+\ln N\to+\infty \text{ при } N\to\infty.$$

Значит, $(L)\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{N\to\infty}\int_0^1[f(x)]_N\,dx=+\infty$. Поэтому данная функция $f(x)$ не является суммируемой на отрезке $[0,1]$.

Приведем теперь пример неограниченной суммируемой функции. Пусть $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ Тогда эта функция является неотрицательной измеримой на отрезке $[0,1]$. При этом $\int_0^1[g(x)]_N\,dx=\int_0^{\frac{1}{N^2}}[g(x)]_N\,dx+\int_{\frac{1}{N^2}}^1[g(x)]_N\,dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{N^2}}N\,dx+\int_{\frac{1}{N^2}}^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx==N\cdot\frac{1}{N^2}+2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{N^2}}^1=\frac{1}{N}+2\sqrt{1}-2\frac{1}{N}=2-\frac{1}{N}.$$

Значит, $(L)\int_0^1 g(x)dx=\lim\limits_{N\to\infty}\int_0^1[g(x)]_N\,dx=\lim\limits_{N\to\infty}\left(2-\frac{1}{N}\right)=2.$

Следовательно, эта неограниченная функция является суммируемой на отрезке $[0,1]$.

Обратимся теперь к общему случаю восстановления функции по известной ее производной интегрированием по Лебегу (т.е. к случаю суммируемых производных, а для ограниченных производных этот вопрос рассмотрен в § 10). В общем случае имеет место

Теорема. Если: 1) при всех $x\in[a,b]$ существует конечная производная $f'(x)$; 2) производная $f'(x)$ суммируема на $[a,b]$, то для каждого $x\in[a,b]$ выполняется равенство $f(x) = f(a) + (L)\int\limits_a^x f'(t)dt$, в частности, равенство

$$\int\limits_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Возникает вопрос: не лишнее ли условие 2) теоремы, т.е. само существование конечной производной $f'(x)$ не обеспечивает ли ее суммируемость?

Оказывается, нет. Так, легко показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{\pi}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

имеет конечные производные во всех точках отрезка $[0,1]$, но при этом производная $f'(x)$ не будет суммируемой функцией на отрезке $[0,1]$.

Значит, интеграл Лебега не полностью решает задачу восстановления самой функции по ее производной, даже если эта производная существует и конечна во всех точках отрезка $[a,b]$ (дополнительно требуется выполнение условия 2) из теоремы). В настоящее время построен так называемый интеграл Перрона, который полностью решает эту задачу.

Другой вопрос: раз в теореме производная $f'(x)$ находится под знаком интеграла Лебега и в интегралах Лебега можно пренебречь множеством меры нуль, нельзя ли вместо условия 1) теоремы потребовать существование конечной производной $f'(x)$ лишь почти всюду (а не всюду) на отрезке $[a,b]$?

Ответ отрицательный. Г. Кантор построил функцию $f(x)$ («канторову лестницу»), производная которой равна нулю почти всюду на отрезке $[0,1]$ (а значит, суммируема), но не выполняется равенство

$$\int\limits_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0).$$

Эти особенности интеграла Лебега не оказывают серьезного влияния на его важную роль в современном анализе.

Дело, в частности, в том, что существует достаточно широкий класс функций, который полностью можно охарактеризовать с помощью связи дифференцирования и интегрирования по Лебегу. Таковым является класс абсолютно непрерывных на данном отрезке функций.

Функция $f(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на данном отрезке $[a,b]$, если при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой системы неналегающих интервалов $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),...,(\alpha_n,\beta_n)$ из $[a,b]$ с суммарной длиной $\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\delta$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n}\left|f(\beta_k)-f(\alpha_k)\right|<\varepsilon$.

Оказывается, для того чтобы функция $f(x)$ была *абсолютно непрерывной* на данном отрезке $[a,b]$, *необходимо и достаточно*, чтобы при всех $x\in[a,b]$ выполнялось *равенство* $f(x)=f(a)+(L)\int\limits_a^x f'(t)dt$.

Абсолютная непрерывность функций используется при *замене переменной* и *интегрировании по частям* в интегралах Лебега.

Так, если функция $f(x)$ суммируема на отрезке $[a,b]$, функция $x=\varphi(t):[\alpha,\beta]\xrightarrow{на}[a,b]$ абсолютно непрерывна и строго возрастает, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b u\,v'dx=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\,u'dx.$$

Приведем еще одно важное свойство интеграла Лебега, благодаря которому этот интеграл находит широкие применения в различных областях математики.

Пусть $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ - ряд Фурье 2π-периодической функции $f(x)$. Требуется охарактеризовать класс 2π-периодических функций $f(x)$, для которых выполняется *равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

(аналог теоремы Пифагора для функций).

Оказывается, равенство Парсеваля выполняется тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ измерима на отрезке $[-\pi,\pi]$ и функция $f^2(x)$ интегрируема по Лебегу на этом отрезке.

Наконец, приведем замечательное свойство интеграла Лебега - теорему о *предельном переходе под знаком интеграла* для суммируемых функций (ср. со свойством 7^0 из § 9).

Теорема. Если для измеримых на множестве E функций $f_n(x)$ ($n=1,2,...$) существует суммируемая на E функция $F(x)$ такая, что $|f_n(x)| \le F(x)$ (для любого $x \in E$; $n=1,2,...$), и существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для почти всех $x \in E$, то выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx .$$