Тема 3. Измеримые функции

План:

1. Измеримые функции.

Будем рассматривать функции, определенные на измеримых множествах обычной числовой прямой и принимающие значения, принадлежащие расширенной числовой прямой.

Примером такой функции может служить

$$f(x)=\begin{cases} -\infty \text{ при } x<-1, \\ 0 \text{ при } -1\le x\le 1, \\ +\infty \text{ при } x>1. \end{cases}$$

Договоримся всюду в дальнейшем обозначать символом $E[f$ удовлетворяет условию $A]$ множество всех принадлежащих E значений x, для которых $f(x)$ удовлетворяет условию A.

Например, $E[f\ge a]$ — множество тех принадлежащих E значений x, для которых $f(x)\ge a$.

Функция $f(x)$, определенная на измеримом множестве E, называется *измеримой* на этом множестве, если для любого вещественного числа a множество $E[f\ge a]$ измеримо.

Теорема 1. Для измеримости функции $f(x)$ на множестве E необходимо и достаточно, чтобы одно из следующих трех множеств

$$E[f>a],\quad E[f<a],\ E[f\le a] \tag{5}$$

было измеримо при любом вещественном a.

2. Свойства измеримых функций

1°. Если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то она измерима и на любой измеримой части E_1 множества E.

2°. Если множество E представляет собой конечную или счетную сумму измеримых множеств E_n и если функция $f(x)$ измерима на каждом множестве E_n, то $f(x)$ измерима и на множестве E.

3°. Любая функция $f(x)$ измерима на множестве E меры нуль.

В самом деле, любое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль.

Две определенные на измеримом множестве E функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ***эквивалентными*** на этом множестве, если множество $E[f \neq g]$ имеет меру нуль.

4°. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны на множестве E и функция $f(x)$ измерима на E, то и функция $g(x)$ измерима на E.

Мы будем говорить, что некоторое свойство A справедливо почти всюду на множестве E, если множество точек E, на котором это свойство несправедливо, имеет меру нуль.

Следствие из свойства 4°. Если функция $f(x)$ непрерывна почти всюду на измеримом множестве E, то $f(x)$ измерима на E.

3. Арифметические операции над измеримыми функциями

Лемма. 1) Если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то и функция $|f(x)|$ измерима на этом множестве.

2) Если $f(x)$ измерима на множестве E, а C — любая постоянная, то каждая из функций $f(x) + C$ и $C * f(x)$ измерима на множестве E.

3) Если $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E, то множество $E[f > g]$ измеримо.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают на множестве E конечные значения и измеримы на этом множестве, то каждая из функций $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) * g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (для частного $f(x)/g(x)$ дополнительно требуется, чтобы все значения $g(x)$ были отличны от нуля) измерима на множестве E.

Теорема 2. Если $\{f_n(x)\}$ — последовательность измеримых на множестве E функций, то как нижний, так и верхний пределы этой последовательности) являются измеримыми на множестве E функциями.

Теорема 3. Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к функции $f(x)$, то функция $f(x)$ измерима на множестве E.

Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ и $f(x)$ измеримы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Говорят, что *последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *по мере* на множестве E, если для любого положительного числа ε справедливо:

$$\lim_{n\to\infty} |E[|f - f_n| \geq \varepsilon]| = 0, \tag{6}$$

т. е. если для любых положительных ε и δ найдется номер N такой, что при $n \geq N$ справедливо неравенство $|E[|f - f_n| \geq \varepsilon]| < \delta$.

Теорема 4. Пусть E — измеримое множество конечной меры, и пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $f(x)$ измеримы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Тогда из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду на E вытекает сходимость $\{f_n(x)\}$ *к* $f(x)$ и по мере на множестве E.

З а м е ч а н и е. Подчеркнем, что из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на множестве E по мере не вытекает не только сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду на E, но даже сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ хотя бы в одной точке множества E.

Теорема 5. Пусть E — измеримое множество конечной меры, и пусть функции $f_n(x)$ $(n= 1, 2, \dots)$ и $f(x)$ измеримы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Тогда, если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на множестве E, то из этой последовательности можно выделить последовательность, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на E.