Тема 2. Мощность и мера множества

План:

1. Сравнение множеств по мощности

Пусть даны конечные множества A и B, число элементов которых равно n и m соответственно. В зависимости от величин n и m, возможны следующие ситуации: $n = m$, $n > m$, $n < m$.

Какое из этих соотношений имеет место, можно решить двумя способами. Можно пересчитать число элементов каждого из множеств и сравнить полученные числа. А можно сравнить два множества путем установления взаимно однозначного соответствия между их элементами.

Назовем два множества ***эквивалентными,*** если существует взаимно однозначное соответствие между их элементами.

Обозначают: $A \sim B$. Определенное нами бинарное отношение эквивалентности между множествами обладает свойствами:

1) *рефлексивность*: $A \sim A$,

2) *симметричность*: из того, что $A \sim B$ следует, что $B \sim A$,

3) *транзитивность*: если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$, т.е. действительно является *эквивалентностью.*

Таким образом, всевозможные множества распадаются на классы эквивалентных между собой множеств. В один класс эквивалентности попадают множества, состоящие из одного и того же числа элементов.

Поставим в соответствие каждому классу эквивалентных между собой множеств некоторый символ α, который назовем ***кардинальным числом или мощностью*** любого из множеств данного класса.

Например, линейная функция $y = kx$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(0,1)$ и точками интервала $(0,k)$ для любого k. Функция $y = tgx$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми точками интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и точками прямой линии $(-\infty,+\infty)$.

Замечание. Понятие мощности для конечного множества совпадает с понятием числа элементов этого множества. Кардинальное число – это количество элементов во множестве.

Множества, обладающие одинаковой мощностью, называются ***равномощными (эквивалентными).***

Два конечных множества будут равномощными, если в них содержится одинаковое число элементов. Если имеем дело с бесконечными множествами, то вопросы, связанные с мощностями, решаются путём установления соответствия между элементами этих множеств.

Возвращаясь, к примеру, можно отметить, что множество точек любого интервала и прямой – равномощны. Это означает, что на прямой и в интервале одинаковое количество точек. Кардинальное число для бесконечного множества – это число, обозначаемое специальным символом или буквой.

При сравнении мощностей бесконечных множеств удобно пользоваться следующими вспомогательными теоремами.

Теорема 1 *(о мощности промежуточного множества).* Пусть $A_2 \subset A_1 \subset A$, причем $A \sim A_2$, тогда $A \sim A_1$.

Т.е. теорема утверждает, что, если мощности крайних множеств одинаковы, то и мощность среднего (промежуточного множества), будет такой же.

Теорема 2 *(Кантора-Бернштейна).* Если каждое из двух данных множеств эквивалентно некоторой части другого множества, то данные множества эквивалентны.

Таким образом, при сравнении двух бесконечных множеств возможны следующие случаи:

1) между элементами множеств можно установить взаимно однозначное соответствие, тогда данные множества равномощны;

2) между элементами множеств нельзя установить взаимно однозначное соответствие, но можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами одного из них и собственной частью другого, тогда мощность одного множества больше мощности другого.

Далее рассмотрим наиболее распространенные виды множеств в зависимости от их мощности.

Теорема 3. Мощность множества всех подмножеств любого непустого множества A больше, чем мощность данного множества A.

Следствие. Из доказанной теоремы следует, что для каждого кардинального числа существует большее кардинальное число.

В последующих рассуждениях важное место занимает множество натуральных чисел.

Множество, эквивалентное множеству чисел натурального ряда, называется ***счетным.***

Натуральный ряд чисел – это счётное множество. Все множества, равномощные множеству N, имеют такую же мощность.

Теорема 4. Для того чтобы множество A было счетным, необходимо и достаточно, чтобы его элементы можно было «перенумеровать», т.е. представить в форме последовательности: $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$.

Теорема 5. Из всякого бесконечного множества A всегда можно выделить счётное подмножество A_0.

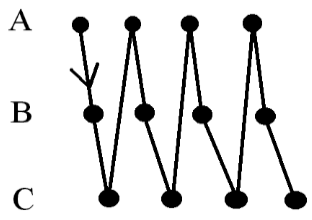
Следствие. Таким образом, мощность счётного множества наименьшая из всех мощностей бесконечных множеств. Всем множествам, эквивалентным множеству N, ставится в соответствие одно и то же кардинальное число.

Теорема 6. Всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

Следствие: Если из счётного множества удалить конечное подмножество, то оставшееся множество будет счётным.

Перечислим ещё некоторые свойства счётных множеств.

Так как для любого натурального числа k множество вида $k+1,\ k+2,\ ...,\ k+n, ...$ - счетно, тогда сумма конечного и счётного множества без их общих элементов является счётным множеством.



Сумма конечного или счетного числа попарно не пересекающихся счетных множеств есть счётное множество. Покажем схематически, как можно занумеровать полученную сумму для конечного числа слагаемых: $S = A \cup B \cup C$, где множества A, B, C имеют следующий вид:

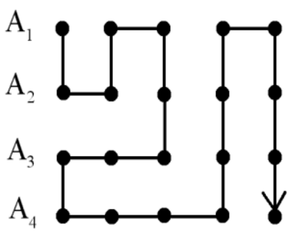
$$A = \{a_1, a_2, a_3, ...\},$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, ...\},$$

$$C = \{c_1, c_2, c_3, ...\}.$$

Расположим элементы данных множеств так, как показано на рисунке. Таким образом, натуральные номера присваиваются сначала первым элементам данных множеств, затем – вторым и т. д.

Далее рассмотрим сумму (объединение) счётного числа попарно не пересекающихся счётных множеств: $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 ...$.

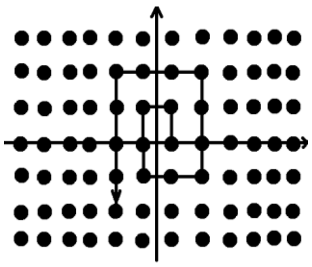


На рисунке показана примерная схема нумерации элементов данных множеств. Пользуясь рассмотренными свойствами счётных множеств, можно всех целых чисел Z - счётно:

$$Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}.$$

$Z = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, 3, \dots\}$.

Это множество – есть объединение конечного числа счётных множеств, следовательно, оно является счётным.



Также схематически можно показать, что множество всех точек плоскости с целочисленными координатами счетно. Отсюда нетрудно вывести, что множество всех рациональных чисел также счетно.

Ниже рассмотрим множества, мощность которых отлична от мощности счётного множества.

Теорема 7. Множество всех последовательностей из нулей и единиц не счетно.

Нетрудно показать, что мощность множества всех двоичных последовательностей равна мощности множества всех действительных чисел отрезка $[0,1]$, или мощности всех последовательностей натуральных чисел. Все эти множества являются несчётными, а также равномощными, значит, им соответствует одно и то же кардинальное число.

Такие множества назовём ***множествами мощности континуум*** (от латинского слова continuum - непрерывный).

Перечисленные выше множества точек отрезка $[0,1]$, множество всех двоичных последовательностей и др. имеют мощность континуум. Можно показать, что множество всех подмножеств любого счетного множества имеет мощность континуум.

Возникает вопрос, существует ли множество, мощность которого больше мощности счетного множества и меньше, чем континуум. Эта задача получила название *проблемы континуума*. Оказалось, что не существует мощности, большей, чем мощность счётного множества, и меньшей мощности континуум. Если множество имеет мощность, большую мощности счётного множества, то данное множество имеет мощность континуум.

2. Внешняя и внутренняя меры

Отправным пунктом этой теории является привлечение в качестве основного (исходного) множества интервала $\Delta = (a, b)$, длина или мера которого считается известной и равной числу $|\Delta| = b - a > 0$.

Пусть E - произвольное множество на числовой прямой.

Покрытием $S = S(E)$ множества E назовем всякую конечную или счетную систему интервалов $\{\Delta_n\}$, сумма которых содержит множество E. Сумму длин всех интервалов $\{\Delta_n\}$, составляющих покрытие $S = S\,(E)$, обозначим символом $\sigma(S)$. Итак,

$$\sigma(S) = \sum_n |\Delta_n| > 0.$$

Внешней мерой множества E называется точная нижняя грань $\sigma(S)$ на множестве всех покрытий $S = S\,(E)$ множества E.

Внешнюю меру множества E будем обозначать символом $|E|^*$. Итак, по определению

$$|E|^* = \inf_{S(E)} \sigma(S)$$

Очевидно, внешняя мера любого интервала совпадает с длиной этого интервала.

Выясним основные свойства внешней меры.

1°. Если множество E_1 содерижится в E_2, то $|E_1|^* \le |E_2|^*$.

Для доказательства достаточно заметить, что любое покрытие E_2 является одновременно покрытием и E_1.

2°. Если множество E представляет собой сумму конечного или счетного числа множеств $\{E_1\}$ (символически $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$), то

$$|E|^* \le \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^*. \tag{2.1 }$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению меры $|E_k|^*$ как точной нижней грани, для каждого номера k найдется покрытие $S_k(E_k)$ множества E_k системой интервалов $\{\Delta_n^k\}$ $(n = 1,2,\dots)$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\Delta_n^k\right| \le |E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{2.2}$$

Обозначим через S покрытие всего E, объединяющее все покрытия S_k $(k = 1,2,\dots)$ и состоящее из всех интервалов $\{\Delta_n^k\}$ $(k = 1,2,\dots;\ n = 1,2,\dots)$. Так как S является покрытием E, то $|E_k|^* \le \sigma(S)$, но $\sigma(S) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta_n^k\right|$.

Из последних двух соотношений и из (2.2) получим

$$|E_k|^* \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(|E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}|E_k|^* + \varepsilon.$$

Неравенство (2.1) доказано.

Договоримся называть расстоянием между множествами E_1 и E_2 точную нижнюю грань расстояний между двумя точками множеств E_1 и E_2 соответственно. Будем обозначать расстояние между множествами E_1 и E_2 символом $\rho(E_1\,, E_2)$.

3°. Если $\rho(E_1\,, E_2) > 0$, то$|E_1 \cup E_2|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$.

Доказательство. Положим $\delta = \frac{1}{2}\rho(E_1\,, E_2)$. Для произвольного $E > 0$ и выбранного нами $\delta > 0$ найдется покрытие $S(E)$ множества $E = E_1 \cup E_2$ такое, что $\sigma(S) \leq |E|^* + \varepsilon$ и длина каждого интервала покрытия $|\Delta_n|$ меньше δ. Очевидно, что интервалы Δ_n, покрывающие точки E_1, не содержат точек E_2 и, наоборот, интервалы, покрывающие точки E_2, не содержат точек E_1. Иными словами, взятое мной покрытие $S(E)$ распадается на сумму двух покрытий $S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2)$, первое из которых S_1 покрывает E_1, а второе S_2 покрывает E_2. Итак, мы получаем, что

$$S_1(E_1) + S_2(E_2) \leq |E|^* + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $|E_1|^* + |E_2|^* \leq |E|^* + \varepsilon$ и, стало быть (в силу произвольности E), $|E_1|^* + |E_2|^* \leq |E|^*$. Так как на основании свойства $2°$ справедливо и обратное неравенство $|E|^* \leq |E_1|^* + |E_2|^*$, то $|E|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$. Свойство $3°$ доказано.

В частности, свойство $3°$ справедливо, если E_1 и E_2 ограничены, замкнуты и не содержат общих точек.

$4°$. Для произвольного множества E и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдётся открытое множество G, содержащее E и такое, что $|G|^* \leq |E|^* + \varepsilon$.

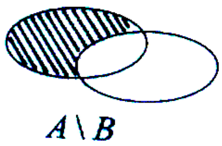
Доказательство. Достаточно взять в качестве G сумму всех интервалов, составляющих покрытие $S(E)$ множества E, для которого $\sigma(S) \leq |E|^* + \varepsilon$.

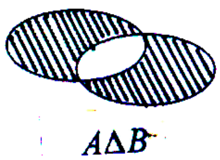
3. Измеримые по Лебегу множества, их свойства

Прежде всего отметим, что наряду с объединением и пересечением над множествами определяются также две операции вычитания.

Разностью $A \setminus B$ двух множеств A и B называется множество, каждый элемент которого принадлежит множеству A и не принадлежит множеству B.

Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество $A\Delta B$, равное объединению двух разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$.





Заметим, что если мысленно двигать множества A и B относительно друг друга, то ясно, что чем меньше симметрическая разность двух данных множеств (т.е. площадь заштрихованной части), тем больше их пересечение (площадь общей части этих множеств), а значит, тем «ближе» эти множества друг к другу. Этим свойством симметрической разности мы воспользуемся для «измерения» множеств, а начнем с обобщения понятия конечного промежутка и определения его меры.

Промежутком $P=\langle a,b\rangle$ будем называть любое из следующих множеств: (a,b) - интервал, $[a,b]$ - сегмент, $[a,b)$, $(a,b]$ - полуинтервалы, причем, если не оговорено противное, будем считать a и b *действительными числами* и необязательно $a \le b$. Будем считать промежуток $P=\langle a,b\rangle$ пустым множеством $\emptyset$, если $b<a$, или если $a=b$, а промежуток P представляет собой интервал (a,b) или один из полуинтервалов $(a,b]$ и $[a,b)$.

Множество $A \subset \mathrm{R}$ называется *элементарным*, если его можно представить в виде конечного объединения некоторых промежутков:

$$A = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n.$$

Мерой промежутка $P=\langle a,b\rangle$ называется его длина $\mu P = b-a$; если $P=\emptyset$, то $\mu P = 0$.

Внешней мерой ограниченного множества $E \subset \mathrm{R}$ назовем величину

$$\mu^* E = \inf_{E \subset \bigcup\limits_k P_k} \sum_k \mu P_k,$$

где инфимум берется по всем конечным или счетным покрытиям множества E промежутками $P_1, P_2, \ldots$

Заметим, что любое ограниченное множество $E \subset \mathrm{R}$ имеет конечную внешнюю меру.

Действительно, для такого множества E существует покрытие из одного промежутка $[\inf E, \sup E]$; при этом множество сумм $\sum\limits_k \mu P_k$ ограничено снизу нулем.

Отметим два важных свойства внешних мер:

1) *монотонность*: из $E_1 \subset E_2$ следует $\mu^* E_1 \le \mu^* E_2$ (т.к. для покрытия $E_2 \setminus E_1$ нужны дополнительные промежутки);

2) *полуаддитивность:* $\mu^*(E_1 \cup E_2) \le \mu^* E_1 + \mu^* E_2$ (т.к. если $E_1 \cap E_2 \ne \emptyset$, то промежутки для его покрытия в правой части могут встречаться два раза).

Множество $E \subset \mathrm{R}$ называется *измеримым по Лебегу*, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует элементарное множество A такое, что $\mu^*(E \Delta A) < \varepsilon$. Если множество E измеримо по Лебегу, то *мерой множества E по Лебегу* называется его внешняя мера:

$$\mu E = \mu^* E.$$

Значит, измеримые множества - это множества, близкие к элементарным множествам: они сколь угодно мало отличаются от элементарных множеств (в смысле внешней меры).

Простейшим примером измеримого множества служит любое конечное множество $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Действительно, в качестве элементарного множества A при $\forall \varepsilon > 0$ можно взять само множество E, так как

$$E = [x_1, x_1] \cup ... \cup [x_n, x_n].$$

Тогда из $E \Delta A = \emptyset$ следует, что $\mu^*(E \Delta A) = 0 < \varepsilon$. Очевидно, $\mu E = 0$.

Замечание 1. Меру Лебега можно распространить и на случай неограниченных множеств E. Такое *множество* E называется *измеримым*, если измеримо любое множество вида $E \cap [-n, n]$ (n - натуральное число). Мерой множества E в этом случае называется следующий предел: $\mu E = \lim_{n\to\infty} \mu(E \cap [-n, n])$ (который может равняться и $+\infty$).

Замечание 2. Если в определении внешней меры сохранить лишь конечные покрытия ограниченного множества E промежутками, то по аналогии с мерами Лебега получим *внешнюю меру Жордана* $m^* E$ и *меру Жордана* mE множества E.

Отметим, что мера Лебега является существенно более широким понятием, чем мера Жордана. Например, лебегова мера множества рациональных чисел равна нулю, в то время как это множество не является измеримым по Жордану.

Свойства измеримых по Лебегу множеств

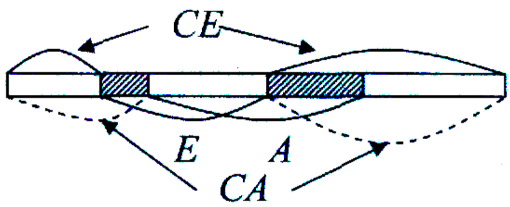
Измеримость множеств и свойства измеримых множеств тесно связаны с измеримостью их дополнения до некоторого промежутка.

Д*ополнением множества* E до данного промежутка $\langle a, b \rangle$ (конечного или бесконечного), содержащего E, называется множество $CE = \langle a, b \rangle \setminus E$.

Теорема 1. Множество $E \subset \mathrm{R}$ измеримо тогда и только тогда, когда его дополнение CE измеримо (дополнение CE берется до любого данного конечного промежутка, содержащего E).

Доказательство. Для двух данных множеств E и A выполняется равенство $E \Delta A = CE \Delta CA$ (см. рисунок ниже). Если при этом A- элементарное множество, то его дополнением (до конечного промежутка) также служит некоторое элементарное множество. Поэтому измеримость дополнения CE до данного конечного промежутка вытекает из неравенства

$$\mu^*(CE \Delta CA) = \mu^*(E \Delta A) < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$



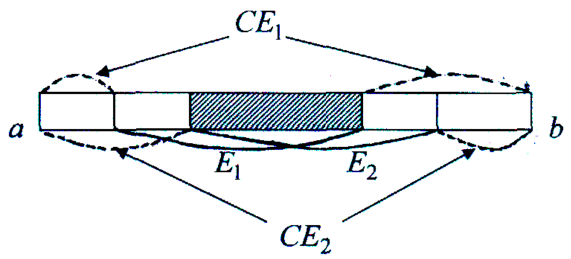
Теорема 2. Если множества E_1 и E_2 измеримы, то измеримы множества $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$ и $E_1 \Delta E_2$.

Доказательство. 1) Пусть $\varepsilon > 0$ - любое фиксированное число и A_1, A_2 - элементарные множества такие, что $\mu^*(E_1 \Delta A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\mu^*(E_2 \Delta A_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда выполняется соотношение $(E_1 \cup E_2)\Delta(A_1 \cup A_2) \subset (E_1 \Delta A_1) \cup (E_2 \Delta A_2)$, т.к. в левой части от E_1 отнимаем A_1 и A_2, а в правой части от E_1 отнимаем только A_1; аналогично, в левой части от E_2 отнимаем A_1 и A_2, а в правой части от E_2 отнимаем только A_2 . Из этого соотношения следует, что

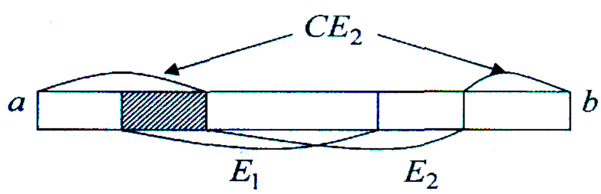
$$\mu^*\big((E_1 \cup E_2)\Delta(A_1 \cup A_2)\big) \le \mu^*\big((E_1 \Delta A_1) \cup (E_2 \Delta A_2)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(мы воспользовались монотонностью и полуаддитивностью внешней меры).

2) Пусть $[a,b]$ - некоторый отрезок, включающий множества E_1 и E_2. Тогда для дополнений до него получим $E_1 \cap E_2 = [a,b] \setminus (CE_1 \cup CE_2) = C(CE_1 \cup CE_2)$ (см. рисунок ниже). Остается применить доказанную измеримость объединения и теорему 1.



3) Пусть $E_1, E_2 \subset [a,b]$. Тогда измеримость разности $E_1 \setminus E_2$ вытекает из равенства $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap CE_2$ (см. рисунок ниже).



4) Измеримость симметрической разности вытекает из измеримости разности, объединения и следующего равенства: $E_1 \Delta E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$.

Следствие. Если множества $E_1, E_2, ..., E_n$ измеримы, то измеримы их объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ и их пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k$.

Теорема 3. Если множества $E_1, E_2, ..., E_n, ... \subset \langle a, b \rangle$ $(a, b \in \mathrm{R})$ измеримы, то измеримо множество $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$; если при этом $E_i \cap E_j = \emptyset$ при всех $i \neq j$, то выполняется равенство $\mu E = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu E_n$ (счетная аддитивность меры Лебега); если же $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n \subset ... \subset \langle a, b \rangle$, то измеримо множество $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и выполняется равенство $\mu E = \lim\limits_{n \to \infty} \mu E_n$.

Теорема 4. Если множества $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ измеримы, то измеримо множество $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$; если при этом $E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$, то выполняется равенство $\mu F = \lim\limits_{n \to \infty} \mu E_n$ (непрерывность меры Лебега).