Тема 1. Структура линейных множеств

План:

1. Открытые и замкнутые множества

Будем рассматривать произвольное множество E точек бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$.

Назовем *дополнением множества E* множество,обозначаемое символом CE и равное совокупности тех точек бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$, которые не принадлежат множеству E.

Если назвать *разностью* множеств A и B совокупность тех точек множества A, которые не принадлежат множеству B, и обозначить разность множеств A и B символом $A \backslash B$, то дополнение CE множества E можно представить в виде

$$CE = (-\infty, \infty) \setminus E.$$

Вспомним некоторые определения.

1°. Точка x называется *внутренней точкой* множества E, если найдется некоторая окрестность точки x (т. е. интервал, содержащий эту точку), целиком принадлежащая множеству E.

В дальнейшем произвольную окрестность точки x мы будем обозначать символом $v(x)$.

2°. Точка x называется *предельной точкой* множества E, если в любой окрестности $v(x)$ точки x найдется хотя бы одна точка x^1 множества E, отличная от x.

3°. Множество G называется *открытым*, если все точки этого множества являются внутренними.

4°. Множество F называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Совокупность всех предельных точек произвольного множества E договоримся обозначать символом E', а *сумму*, или объединение двух множеств A и B будем обозначать символом $A + B$ или $A \cup B$. Договоримся далее называть замыканием произвольного множества E множество, обозначаемое символом $\bar{E}$ и равное сумме $E + E'$.

Очевидно, что для любого замкнутого множества F справедливо равенство $\bar{F} = F$. Совокупность всех внутренних точек произвольного множества E будем обозначать символом $int\,E$.

Очевидно, что для любого открытого множества G справедливо равенство $int\, G = G$. Для совершенно произвольного множества E множество $int\, E$ является открытым, а множество $\bar{E}$ - замкнутым.

Замечание. Можно показать, что $int\, E$ является суммой всех содержащихся в E открытых множеств, а $\bar{E}$ является пересечением всех содержащих E замкнутых множеств. Таким образом, $int\, E$ является наибольшим содержащимся в E открытым множеством, а $\bar{E}$ является наименьшим содержащим E замкнутым множеством. Остановимся на простейших свойствах открытых и замкнутых множеств.

1°. Если множество F замкнуто, то его дополнение CF открыто.

2°. Если множество G открыто, то его дополнение CG замкнуто.

3°. Сумма любого числа открытых множеств является открытым множеством.

4°. Пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

5°. Пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

6°. Сумма конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

7°. Если множество F замкнуто, а мноэество G открыто, то множество $F \backslash G$ замкнуто, а множество $G \backslash F$ открыто.

Далее *интервалом* будем называть любое связное открытое множество точек бесконечной прямой. Иными словами, интервал - это либо открытый отрезок $a < x < b$, либо одна из открытых полупрямых $a < x < \infty$ или $-\infty < x < b$, либо вся бесконечная прямая $-\infty < x < \infty$.

Теорема 1. Любое открытое множество точек бесконечной прямой представляет собой сумму конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

Следствие. Всякое замкнутое множество точек бесконечной прямой получается удалением из бесконечной прямой конечного или счетного числа попарно непересекающихся интегралов.

2. Канторовы совершенные множества

Построим одно специальное замкнутое множество, обладающее рядом замечательных свойств. Прежде всего удалим из прямой несобственные интервалы $(-\infty, 0)\ и\ (1, +\infty)$. После этой операции у нас останется отрезок $[0,1]$. Далее, удалим из этого отрезка интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, составляющий его среднюю треть. Из каждого из оставшихся двух отрезков $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ *и* $\left[\frac{2}{3},1\right]$ удалим его среднюю треть. Этот процесс удаления средних третей у остающихся отрезков продолжим неограниченно. Множество точек на прямой, остающееся после удаления всех этих интервалов, называется ***канторовым совершенным множеством***; мы будем обозначать его буквой P.

Рассмотрим некоторые свойства этого множества. Множество P замкнуто, так как оно образуется путем удаления из прямой некоторого, множества непересекающихся интервалов. Множество P не пусто; во всяком случае в нем содержатся концы всех выброшенных интервалов.

Замкнутое множество P называется *совершенным*, если оно не содержит изолированных точек, т. е. если каждая его точка является предельной точкой. Покажем, что множество P совершенно. Действительно, если бы некоторая точка x была изолированной точкой множества P, то она служила бы общим концом двух смежных интервалов этого множества. Но, согласно построению, смежные интервалы множества P не имеют общих концов.

Множество P не содержит ни одного интервала. В самом деле, допустим, что некоторый интервал δ целиком принадлежит множеству P. Тогда он целиком принадлежит одному из отрезков, получающихся на -м шаге построения множества P. Но это невозможно, так как при $n \to \infty$ длины этих отрезков стремятся к нулю.

Можно показать, что множество Р имеет мощность континуума. В частности, отсюда следует, что канторово совершенное множество содержит, кроме концов смежных интервалов, еще и другие точки. Действительно, концы смежных интервалов образуют лишь счетное множество.

3. Структура открытых и замкнутых множеств

3.1. Структура линейных открытых множеств на R

Множество *E* из **R** называется ***ограниченным сверху (снизу)*** если существует такая точка *Q* (*P*), что для любых точек $x \in E \quad x \le Q(x \ge P)$.

Множество *E* называется ***ограниченным***, если оно ограничено сверху и снизу, то есть если существуют точки *P*, *Q* такие что для любого $x \in E \quad P \le x \le Q$.

Множество *E* называется ***ограниченным***, если существует положительное число *M*, такое что для любого $x \in E \quad |x| \le M$.

Точка $M \in R$ называется ***верхней гранью множества E***, если правее точки *M* нет точек множества *E*, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $x' \in E$, лежащая правее точки $M - \varepsilon$.

Обозначается *M*=*supE*= $\begin{cases} \forall x \in E, x \le M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E, x' > M - \varepsilon \end{cases}$.

Точка $m \in R$ называется ***нижней гранью множества E*** и обозначается *m* = *inf E*, если $m = \begin{cases} \forall x \in E, x \ge m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E, x' < m + \varepsilon \end{cases}$.

Теорема 1. Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.

Теорема 2. Если верхняя (нижняя) грань множества *E* существует, но не принадлежит *E*, то она является предельной точкой множества *E*.

Доказательство. Пусть *M*=*supE* и $M \notin E$. Докажем, что *M* является предельной точкой множества *E*. Возьмём любую окрестность $V(M,\delta)=(M-\delta, M+\delta)$ точки *M*. Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$, такое что $V(M,\varepsilon) \subset V(M,\delta)$. Так как *M*=*supE*, то по определению для выбранного ε $\exists x' \in E$, такой что $M \ge x' > M - \varepsilon$.

Далее, $x' \in V(M,\varepsilon) \Rightarrow x' \in V(M,\delta)$, $x' \in E,\ M \notin E \Rightarrow x' \ne M$.

Итак, в любой окрестности $V(M,\delta)$ $\exists x' \in E,\ x' \ne M$. По определению, *M* - предельная точка множества *E*.

Теорема доказывается аналогично для случая *m*=*infE*.

Следствие. Если *E* - ограниченное замкнутое множество, то существует наименьший отрезок, содержащий *E*. Этим отрезком является отрезок [*m, M*].

Лемма 1. Всякое множество попарно непересекающихся интервалов на ***R*** конечно или счетно.

Доказательство. Пусть $A=\{\delta\}$ - множество попарно непересекающихся интервалов на ***R***, ***Q*** – счетное множество рациональных чисел. Представим ***Q*** в виде последовательности ***Q*** $=\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$. Возьмем $\forall \delta \in A$, он содержит бесконечно много рациональных чисел.

Пусть r_{n_1} одно из этих рациональных чисел, соответствующий интервал обозначим δ_{n_1}: $\delta_{n_1} \to r_{n_1}$. Числу r_{n_2} поставим в соответствие интервал, которому он принадлежит $\delta_{n_2}: \delta_{n_2} \to r_{n_2}$. Так как интервалы δ_{n_1} и δ_{n_2} не пересекаются, то $r_{n_1} \ne r_{n_2} \Leftrightarrow n_1 \ne n_2$. Продолжая этот процесс, получим множество:

$$A = \{\delta_{n_1}, \delta_{n_2}, ...\},$$

в котором интервалов δ столько, сколько натуральных чисел $n_1, n_2, ..$. Множество, состоящее из натуральных чисел $n_1, n_2, ...$ или конечно или счетно. Таким образом, *A* или конечно или счетно.

Пусть $G \ne \varnothing$ - открытое множество. Интервал (a,b) называется ***составляющим интервалом*** множества *G*, если $(a,b) \subset G$, $a, b \notin G$.

Теорема 3. Если $G \neq \varnothing$ - ограниченное открытое множество, то каждая его точка принадлежит некоторому его составляющему интервалу.

Доказательство. Возьмём $\forall x_0 \in G$. Рассмотрим множество $F = CG \cap [x_0, +\infty)$.

Так как G - открыто, то CG - замкнуто, $[x_0, +\infty)$ - замкнуто. Тогда $F = CG \cap [x_0, +\infty)$- замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

Множество F ограничено снизу, следовательно, существует $M = \inf F$. Так как F замкнуто, то по следствию 1 $M \in F$.

Точка M не может быть левее точки x_0 и не может совпадать с x_0, так как $x_0 \notin CG \Rightarrow x_0 \notin F$, а $M \in F$. Так как $M \in F$, то $M \in CG \Rightarrow M \notin G$. Итак, $M \neq x_0, M \in [x_0, +\infty) \Rightarrow M > x_0$ и $M \notin G$.

Рассмотрим промежуток $[x_0, M)$ и покажем, что он содержится в G. От противного.

Предположим, что $(x_0, M] \not\subset G \Rightarrow \exists x' \in [x_o, M): x' \notin G, \Rightarrow x' \in CG, x' \geq x_0 \Rightarrow x' \in F$, что невозможно, так как M – самая левая точка множества F.

Можно убедиться в существовании промежутка $(m, x_0] \subset G$, где $m = \boldsymbol{sup}(CG \cap (-\infty, x_0])$, $m \in CG$. Тогда $(m, x_0] \cup [x_0, M) = (m, M) \subset G,\ m, M \notin G$ - составляющий интервал и $x_0 \in (m, M)$. Таким образом, любая точка из G принадлежит некоторому его составляющему интервалу.

Теорема 4 (о строении ограниченных открытых множеств). Для того чтобы ограниченное множество G было открытым необходимо и достаточно, чтобы оно являлось объединением конечного числа или счетного множества попарно непересекающихся интервалов, концы которых не принадлежат G (составляющих интервалов).

Доказательство. *1. Необходимость.*

Пусть G ограниченное открытое множество. Докажем, что G является объединением конечного числа или счетного множества попарно непересекающихся интервалов. По теореме 3 каждая точка из G принадлежит некоторому составляющему его интервалу. Различные составляющие интервалы не пересекаются, так как принадлежат G, а их концы не принадлежат G. Так как G содержится в $\boldsymbol{R}$, то множество всех составляющих интервалов конечно или счетно.

2. Достаточность. Пусть G - объединение конечного числа или счетного множества попарно непересекающихся интервалов, концы которых не принадлежат G. Тогда G открыто как объединение конечного числа или счётного множества открытых множеств.

Теорема 5. Для того чтобы непустое множество $G \neq \varnothing$ было открытым необходимо и достаточно, чтобы оно являлось объединением конечного числа или счетного множества попарно непересекающихся интервалов, концы которых не принадлежат G (составляющих интервалов).

Доказательство. Отличается от доказательства теоремы 4 тем, что в состав составляющих интервалов входят промежутки $(-\infty;\alpha)$ и $(\beta;+\infty)$.

Теоремы 4-5 определяют структуру линейных открытых множеств: любое открытое множество – объединение конечного числа или счётного множества его составляющих интервалов.

3.2. Структура линейных замкнутых множеств на R

Теорема 6. Для того чтобы непустое ограниченное множество $F \neq \varnothing$ было замкнутым необходимо и достаточно, чтобы оно являлось отрезком или получалось из некоторого отрезка удалением из него конечного числа или счетного множества попарно непересекающихся интервалов, концы которых принадлежат F.

Доказательство. *1. Необходимость.*

Пусть F - ограниченное замкнутое множество, тогда по следствию 2 существует наименьший отрезок Δ, содержащий F. Возможны два случая:

1. $\Delta \backslash F=\varnothing \Rightarrow \Delta=F$; Δ - отрезок $\Rightarrow F$ – отрезок $\Rightarrow$ F - ограниченное замкнутое множество.

2. $\Delta \backslash F \neq \varnothing$, $C_\Delta F = \Delta \backslash F$, $\Delta \neq F$.

Возьмем $\forall x_0 \in C_\Delta F \Rightarrow x_0 \notin F$. Так как F замкнуто, то x_0 не является предельной точкой для F. Тогда $\exists V(x_0): V(x_0) \cap F \neq \varnothing$ и $V(x_0) \subset C_\Delta F$. Тогда по определению x_0 - внутренняя точка множества $C_\Delta F$. Так как x_0 - произвольная точка, то $C_\Delta F$ - открытое множество. По теореме 4 о строении ограниченных открытых множеств $C_\Delta F$ - объединение конечного числа или счетного множества попарно непересекающихся интервалов, концы которых не принадлежат G (составляющих интервалов), удаляя их из Δ , получим замкнутое множество F.

2. Достаточность.

1. Пусть $F=\Delta$, Δ - отрезок $\Rightarrow$ F – отрезок $\Rightarrow$ F - замкнутое множество.

2. Пусть F получено из Δ удалением из него конечного числа или счетного множества попарно непересекающихся интервалов, концы которых принадлежат F. Докажем, что F - замкнутое множество.

Пусть G – объединение удаляемых интервалов, то есть $G = \Delta \backslash F$. Как мы только что доказали, G – открытое множество (см. *необходимость*). Пусть $x \in G$; x не может быть предельной точкой для F, так как она принадлежит G вместе с некоторой своей окрестностью. Тогда F содержит все свои предельные точки, то есть F является замкнутым множеством.

Теорема 7. Для того чтобы непустое множество $F \neq \varnothing$ было замкнутым необходимо и достаточно, чтобы оно являлось или числовой прямой $\boldsymbol{R}$ или получилось удалением из $\boldsymbol{R}$ конечного числа или счетного множества попарно непересекающихся интервалов, концы которых принадлежат $\boldsymbol{R}$.

Пусть F - замкнутое множество и $\Delta = [\alpha, \beta]$ - наименьший отрезок, содержащий F. Составляющие интервалы множества $C_{\Delta}F = \Delta \setminus F$ и два бесконечных промежутка $(-\infty; \alpha)$ и $(\beta; +\infty)$ называются ***смежными интервалами*** замкнутого множества F.

Учитывая это определение, теорему 6 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 8. Для того чтобы непустое ограниченное множество $F \neq \varnothing$ было замкнутым необходимо и достаточно, чтобы оно являлось отрезком или получалось из некоторого отрезка удалением из него конечного числа или счетного множества интервалов, смежных множеству F.