Контрольно измерительные материалы

Тема 1. Структура линейных множеств

Задача 1. Эквивалентны ли данные множества:

1) Промежутки $(-\infty;+\infty)$ и $(0;1)$? (да)

2) Множество всех рациональных чисел и интервал $(0;1)$? (нет)

3) Множество $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ и множество $\{a_1, a_2, \dots, a_5\}$? (нет)

4) Множество R (действительных чисел) и множество Q (рациональных чисел)? (нет)

Задача 2. Является ли элементарным данное множество:

1) Множество $(2,3] \cup \{5\} \cup \{0\} \cup (6,6) \cup [7,8]$? (да)

2) Пустое множество? (да)

3) Множество всех натуральных чисел? (нет)

Тема 2. Мощность и мера множества

Задача 1. 1) Верно ли, что множество рациональных чисел и множество натуральных чисел имеют одинаковую мощность? (да)

2) Найти мощность множества $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$. (10)

Тема 3. Измеримые функции

Задача 1. Найти меру Лебега μE, если:

1) $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$. (0)

2) $E = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$. (0)

3) $E = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$. (0)

4) $E = \left\{\dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$. (0)

5) $E = \left\{2-1, 2+1, 2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{3}, \dots\right\}$. (0)

6) E - множество всех рациональных чисел из отрезка $[0,1]$. (0)

7) E - множество всех иррациональных чисел из отрезка $[0,1]$. (1)

8) $E=\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\ldots$ (1)

9) $E=\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{32},\frac{1}{16}\right)\cup\ldots$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

10) $E=\left(\frac{1}{3},1\right)\cup\left(\frac{1}{9},\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{27},\frac{1}{9}\right)\cup\ldots$ (1)

11) $E=\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{4},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{5},\frac{3}{4}\right)\cup\ldots$ (1)

Задача 2.

1. Выберите все верные варианты ответов.

Функция $f(x)$, определенная на множестве $E\subset R$, называется измеримой (по Лебегу), если…

а) множества E и $E(f>c)$ при всех $c\in R$ измеримы;

б) множество E измеримо, функция $f(x)$ ограничена;

в) множество E измеримо, функция $f(x)$ непрерывна;

г) множество E измеримо.

2. Выберите все верные варианты ответов.

Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ на множестве $(0,1]$…

а) измерима; б) непрерывна; в) ограничена; г) непрерывна и ограничена.

3. Выберите все верные варианты ответов.

Неверно, что на данном отрезке $[a,b]$ $(a<b)$…

а) измеримая функция всегда непрерывна;

б) измеримая функция всегда ограничена;

в) функция Дирихле $D(x)$, разрывная во всех точках, измерима;

г) измеримая функция может быть ограничена.

4. Выберите все верные варианты ответов.

Если мера Лебега множества E равна нулю, то…

а) любая определенная на E функция измерима;

б) функция измерима, если только она ограничена;

в) функция измерима на E, если только она непрерывна;

г) функция измерима на E, если только она непрерывна и ограничена.

5. Выберите все верные варианты ответов.

Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на данном множестве E, то не всегда на E…

а) функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ измерима; б) функции $f(x) \pm g(x)$ измеримы;

в) функция $f(x)g(x)$ измерима; г) функция $|f(x)|$ измерима.

6. Выберите все верные варианты ответов.

Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ неизмеримы на данном измеримом множестве E, то всегда…

а) $\alpha \cdot f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ неизмерима;

б) $f(x) + g(x)$ неизмерима;

в) $|f(x)|$ неизмерима; г) $f(x) - g(x)$ неизмерима.

Тема 4. Различные определения интеграла по Лебегу

Задача 1.

1. Выберите все верные варианты ответов.

Внешняя мера Лебега ограниченного множества Е равна инфимуму суммы мер (длин) промежутков, составляющих покрытие множества Е, причем инфимум берется по всем…

а) конечным или счетным покрытиям;

б) конечным покрытиям;

в) конечным или бесконечным покрытиям;

г) счетным покрытиям.

2. Выберите все верные варианты ответов.

Любое ограниченное множество имеет…

а) конечную внешнюю меру Лебега;

б) конечную меру Лебега;

в) мощность множества всех натуральных чисел;

г) мощность множества всех рациональных чисел.

3. Выберите все верные варианты ответов.

Ограниченное множество называется измеримым по Лебегу, если…

а) внешнюю меру его симметрической разности с элементарным множеством можно сделать сколь угодно малой за счет выбора элементарного множества; б) оно эквивалентно счетному множеству;
в) оно эквивалентно некоторому элементарному множеству.

4. Выберите все верные варианты ответов.

Для множества $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}\ldots$

а) меры Лебега и Жордана равны;
б) мера Лебега больше меры Жордана;
в) мера Жордана не существует, мера Лебега существует;
г) мера Лебега меньше меры Жордана.

5. Выберите все верные варианты ответов.

Для множества всех рациональных чисел из $[0;1]\ldots$

а) мера Жордана не существует, мера Лебега равна нулю;
б) меры Лебега и Жордана равны;
в) мера Лебега больше меры Жордана;
г) мера Лебега меньше меры Жордана.

6. Выберите все верные варианты ответов.

Любое ограниченное…

а) открытое множество измеримо по Лебегу;
б) замкнутое множество измеримо по Лебегу;
в) замкнутое множество измеримо по Лебегу, открытое не всегда.

Задача 2.

1. Выберите все верные варианты ответов.

Функция Дирихле $D(x)$, равная 1 в рациональных точках и равная 0 в иррациональных точках, на любом отрезке $[a,b]$ $(a < b)\ldots$

а) эквивалентна тождественному нулю;
б) эквивалентна тождественной единице;
в) не эквивалентна никакой непрерывной функции.

2. Выберите все верные варианты ответов.

Неверно, что функция $sign(x)$ на отрезке $[-3;3]\ldots$

а) эквивалентна постоянной функции;
б) непрерывна почти всюду;

в) дифференцируема почти всюду.

3. Выберите все верные варианты ответов.
Неверно, что …
а) функция Дирихле $D(x)$, равная 1 в рациональных точках и равная 0 в иррациональных точках, непрерывна почти всюду на отрезке $[0;1]$;
б) предел функции $f(x)=x^n$ при $n\to\infty$ почти всюду на отрезке $[0;1]$ равен нулю;
в) функция $f(x)=|x|$ почти всюду на отрезке [-1,1] дифференцируема.

Тема 5. Сравнение интеграла Лебега с интегралом по Риману
Задача 1.
1. Выберите все верные варианты ответов.
Неверно, что для любой ограниченной измеримой на данном отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ всегда …
а) интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует;
б) интеграл Лебега $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует;
в) супремум всех нижних сумм Лебега равен инфимуму всех верхних сумм Лебега;
г) интегралы Римана и Лебега существуют.

2. Выберите все верные варианты ответов.
При составлении сумм Лебега произвольной ограниченной измеримой функции $y=f(x)$…
а) берутся разбиения по оси Oy; б) можно взять разбиения по оси Ox;
в) берутся разбиения и по оси Oy, и по оси Ox.

3. Выберите все верные варианты ответов.
Неверно, что для любой ограниченной измеримой на данном отрезке $[a,b]$ ($a<b$) функции $f(x)$ …
а) интегралы Римана и Лебега совпадают;
б) супремум нижних сумм Лебега равен интегралу Лебега;

в) инфимум верхних сумм Лебега равен интегралу Лебега;

г) интеграл Лебега $\int_a^b f(x)dx$ существует.

4. Выберите все верные варианты ответов.

Неверно, что для интегралов Лебега всегда …

а) из существования $\int_E |f(x)|dx$ вытекает существование $\int_E f(x)dx$;

б) из $f(x) \geq g(x)$ при $x \in E$ вытекает $\int_E f(x)dx \geq \int_E g(x)dx$ (если интегралы существуют);

в) $\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx$ (если интегралы существуют; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

5. Выберите все верные варианты ответов.

Две измеримые на данном множестве E функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными, если…

а) мера Лебега множества $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ равна нулю;

б) эквивалентны множества значений этих функций;

в) интегралы Лебега от этих функций равны.

6. Выберите все верные варианты ответов.

Если (собственный) интеграл Римана $\int_a^b f(x)dx$ существует, то…

а) он равен интегралу Лебега $\int_a^b f(x)dx$;

б) $f(x)$ может быть неограниченной, а потому неинтегрируемой по Лебегу; в) $f(x)$ может быть неизмеримой, а потому неинтегрируемой по Лебегу.

7. Выберите все верные варианты ответов.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на данном отрезке $[a,b]$ и ее производная $f'(x)$ ограничена на нем, то $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$…

а) всегда для интеграла Лебега и не всегда для интеграла Римана;

б) всегда для интеграла Римана и не всегда для интеграла Лебега;
в) не всегда как для интеграла Лебега, так и для интеграла Римана;
г) всегда для интеграла Римана и для интеграла Лебега.

8. Выберите все верные варианты ответов.
Для неограниченной на данном множестве E функции $f(x)$

интеграл Лебега $\int\limits_E f(x)dx\ldots$

а) определяется как $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_E \left[f(x)\right]_N dx$, если только $f(x)\ge 0$ и измерима на E;

б) вообще не определяется;

в) определяется как $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_E \left[f(x)\right]_N dx$ в случае любой измеримой на E

функции $f(x)$.

9. Выберите все верные варианты ответов.

Не всегда верно, что для положительной $f^+(x)$ и отрицательной $f^-(x)$ частей функции $f(x)$ $\left(x\in E\right)$ выполняются соотношения …

а) $f^+(x)\ge 0,\quad f^-(x)\le 0$;

б) $f^+(x)=\max\left\{f(x),0\right\},\quad f^-(x)=(-f(x))^+$;

в) $f(x)=f^+(x)-f^-(x),\quad \left|f(x)\right|=f^+(x)+f^-(x)$.

10. Выберите все верные варианты ответов.

Интегралом Лебега $\int\limits_E f(x)dx$ от (произвольной) измеримой на данном множестве E функции $f(x)$ называется разность интегралов

$\int\limits_E f^+(x)dx-\int\limits_E f^-(x)dx$, если …

а) хотя бы один из этих интегралов конечен;
б) только оба интеграла конечны; в) даже оба интеграла бесконечны.

11. Выберите все верные варианты ответов.
Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Лебегу (или суммируемой) на данном множестве E,…

а) если только интеграл $(L)\int\limits_E f(x)dx$ конечен;

б) если хотя бы один из интегралов $\int\limits_E f^+(x)dx,\quad \int\limits_E f^-(x)dx$ конечен;

в) если только функция $f(x)$ ограничена и измерима на E.

12. Выберите все верные варианты ответов.

Из функций x^2 и $|x|$ равенству $f(x)=f(-1)+\int\limits_{-1}^{x} f'(t)dt$ при всех $x\in[-1,1]$ удовлетворяют…

а) обе функции; б) только x^2; в) ни одна; г) только $|x|$.

13. Выберите все верные варианты ответов.

Из функций $\sqrt[3]{x}$ и $sign(x)$ равенству $f(x)=f(-1)+\int\limits_{-1}^{x} f'(t)dt$ при всех $x\in[-1,1]$ удовлетворяют…

а) $\sqrt[3]{x}$; б) обе функции; в) ни одна; г) $sign(x)$.

14. Выберите все верные варианты ответов.

Функция $f(x)$, равная $\frac{1}{x}$ при $x\in(0,1]$ и нулю при $x=0$, на отрезке $[0,1]$…

а) не является ни суммируемой (интегрируемой по Лебегу), ни интегрируемой по Риману в несобственном смысле;

б) является суммируемой и неинтегрируемой по Риману;

в) является интегрируемой по Риману в несобственном смысле и не является суммируемой.

15. Выберите все верные варианты ответов.

Функция Дирихле $D(x)$, равная 1 в рациональных точках и равная 0 в иррациональных точках, на отрезке $[0,1]$…

а) является суммируемой (интегрируемой по Лебегу) и неинтегрируемой по Риману (в собственном или несобственном смысле);

б) является суммируемой и интегрируемой по Риману в несобственном смысле;

в) не является ни суммируемой, ни интегрируемой по Риману.

16. Выберите все верные варианты ответов.

Функция $f(x)$, равная $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \in (0,1]$ и нулю при $x = 0$, на отрезке $[0,1]$…

а) является суммируемой (интегрируемой по Лебегу) и интегрируемой по Риману в несобственном смысле;
б) не является суммируемой и является интегрируемой по Риману в несобственном смысле;
в) не является суммируемой и интегрируемой по Риману.

17. Выберите все верные варианты ответов.
Неверно, что на отрезке $[0,1]$…
а) всегда ограниченная измеримая функция интегрируема по Риману;
б) функция $f(x)$, равная $\dfrac{1}{x}$ при $x \in (0,1]$ и нулю при $x = 0$ измерима, но не интегрируема по Лебегу;
в) всегда функции $f(x)$ и $|f(x)|$ одновременно интегрируемы по Лебегу или нет, если $f(x)$ измерима.

Тема 6. Функции конечной вариации и абсолютно непрерывные функции

Задача 1. Определить полную вариацию функций F на указанном отрезке, если:

1) $F(x) = \sin x,\ 0 \le x \le 2\pi,$ 2) $F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ 1 - x, x \in (0,1), \\ 4, x = 1. \end{cases}$

Решение. 1) Функция F является монотонной на отрезках $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right] u \left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$. Поэтому функция $F(x) = \sin x, 0 \le x \le 2\pi,$ имеет ограниченное изменение и

$$\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(F) = \left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right| + \left|\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right| + \left|\sin 2\pi - \sin\frac{3\pi}{2}\right| = 4.$$

2) Рассмотрим произвольное разбиение Π отрезка $[0,1]: 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$. Для этого разбиения

$$\sum_{k=0}^{n-1} | F(x_{k+1}) - F(x_k) | = |1 - x_1| + |1 - x_1 - 1 + x_2| + \ldots + |1 - x_{n-2} - 1 + x_{n-1}| +$$
$$+ | 4 - 1 + x_{n-1} | = 4 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_{n-1} - x_1).$$

Отсюда следует, что $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} | F(x_{k+1}) - F(x_k) | \le 4 + 1`+1 = 6.$

Кроме того, рассмотрим разбиение $x_k = \frac{k}{n}, k = \overline{0,n}.$ В этом случае, $\sum_{k=0}^{n-1} | F(x_{k+1}) - F(x_k) | = 4 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_{n-1} - x_1) > 6 - \frac{1}{n},$ поэтому $\sup \sum_{k=0}^{n-1} \left| F(x_{k+1}) - F(x_k) \right| = 6,$ т.е. $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(F) = 6$.

Задача 2. Доказать, что функция $F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0, \end{cases}$ не имеет ограниченного изменения на отрезке $\left[0, \frac{2}{\pi} \right]$.

Решение. Отметим, что функция F имеет неограниченную производную. Рассмотрим для произвольного натурального числа n разбиение Π_n отрезка $\left[0, \frac{2}{\pi} \right]$ точками, в которых функция $\sin \frac{1}{x}$ равна поочередно –1 и 1, т.е. $0 = x_0 < x_1 = \frac{2}{(2n+1)\pi} < x_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi} < \ldots < x_{n-1} = \frac{2}{3\pi} < x_n = \frac{2}{\pi},$ и вычислим сумму S_n модулей приращений функций F на отрезках разбиения

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} | F(x_{k+1}) - F(x_k) | = \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} - 0 \right) + \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} + \frac{2}{(2n-1)\pi} \right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{2}{3\pi} - \frac{2}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \ldots + \frac{2}{2n+1} \right).$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1}$ расходящийся, то последовательность его частичных сумм не ограничена сверху, т.е. $\sup_n S_n = +\infty$. Следовательно, функция F не имеет ограниченного изменения.

Задания для самостоятельного решения

Задание 3. Выяснить, ограничена ли вариация у следующих функций. При положительном ответе вычислить вариацию функций *f*.

3.1. $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

3.2. $F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ 1 - x, 0 < x < 1, \\ 5, x = 1. \end{cases}$

3.3. $F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ x^2 \cos\frac{1}{x}, 0 < x \le 1. \end{cases}$

3.4. $F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ x \sin\frac{1}{x}, 0 < x \le \frac{2}{\pi}. \end{cases}$

3.5. $F(x) = \begin{cases} -x^2, x \in [0,1[, \\ 0, x = 1, \\ 1, x \in]1,2]. \end{cases}$

3.6. $F(x) = \begin{cases} x^2, x \in [0,1[, \\ 5, x = 1, \\ x + 3, x \in (1,2]. \end{cases}$

3.8. $F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ 1 - x, x \in (0,1), \\ 5, x = 1. \end{cases}$

3.9. $F(x) = \begin{cases} x - 1, 0 < x < 1, \\ 10, x = 1 \\ x^2, x \in (1,2]. \end{cases}$

3.10. $F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ x^2 \cos\frac{\pi}{x}, x \in (0,1]. \end{cases}$

3.11. $F(x) = \begin{cases} -1, x = 0, \\ 1 - x, x \in (0,1), \\ 6, x = 1. \end{cases}$

3.12. $F(x) = \begin{cases} x - 1, x \in (0,1), \\ 20, x = 1, \\ x^2 + 1, x \in (1,2]. \end{cases}$

3.13. $F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ \frac{1}{x}, x \in (0,1]. \end{cases}$

3.14. $F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ x\,\mathrm{sgn}(\sin\frac{\pi}{x}), 0 < x \le 1. \end{cases}$

3.15. $F(0) = 0$; $F\left(\frac{1}{2k-1}\right) = 0$; $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k}$ и линейна на каждом отрезке.

Тема 7. Построение интеграла Римана-Стилтьеса

Задача 1. Вычислить интеграл Римана-Стилтьеса

$$\int\limits_{[-2,2[} \left(x^3+1\right) d\mu_F, \text{ где } F(x)= \begin{cases} x+2, & x \in [-2,-1[, \\ 2, & x \in (-1,0], \\ x^2+3, & x \in (0,2]. \end{cases}$$

Решение. Если функция $f\,(x)$ непрерывна на $[a,\, b]$, а функция $F\,(x)$ имеет на $[a,\, b]$ всюду, кроме конечного числа точек $c_1,...,c_n$ интегрируемую по Риману производную $F'(x)$, то существует интеграл Римана-Стилтьеса и

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_F = \int\limits_{[a,b]} f(x)g'(x)d\mu + f(a)(F(a+0)-F(a)) + f(b)(F(b)-F(b-0)) +$$

$$+\sum_{m=1}^{n} f(c_k)(F(c_k+0)-F(c_k-0)).$$

Тогда

$$\int\limits_{[-2,2[} \left(x^3+1\right) d\mu_F = \int\limits_{-2}^{-1} \left(x^3+1\right) dx + 1 + \int\limits_{0}^{2} 2x\left(x^3+1\right) dx = \frac{301}{200}.$$

Задача 2. Пусть X=[0,1[, S={[a,b[$\subset X$}, $h(x)$ – некоторая неотрицательная интегрируемая по Риману на отрезке [0,1] функция; $\mu([a,b[) = \int\limits_a^b h(x)dx$. Вычислить $\int\limits_X x^2 d\mu.$

Решение. Построим последовательность простых интегрируемых функций, равномерно сходящуюся к $f(x) = x^2$. Представим $[0,1[= \coprod\limits_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k[= \coprod\limits_{k=1}^{n} A_k$ так, что $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} < \frac{2}{n}$. По теореме о среднем для интеграла Римана $\exists \xi_k \in]x_{k-1}, x_k[$ такая, что $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} h(x)dx = h(\xi_k)\Delta x_k$, т.е. $\mu(A_k) = h(\xi_k)\Delta x_k$.

Положим $y_k = \xi_k^2$ для $\forall x \in A_k$, тогда $f_n(x) = y_k$, $x \in A_k$ и f_n равномерно сходится к $f(x) = x^2$, т.к. при $n \to \infty$ $\Delta x_k \to 0$.

$$\int\limits_X x^2 d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 h(\xi_k)\Delta x_k.$$

$\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 h(\xi_k)\Delta x_k$ есть интегральная сумма Римана, построенная для непрерывной функции $F(x)=x^2h(x)$ на отрезке [0,1]. Так как при $n\to\infty$, $\Delta x_k\to 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 h(\xi_k)\Delta x_k=\int_0^1 x^2h(x)dx.\text{ Итак, }\int_{[0,1[}x^2d\mu=\int_0^1 x^2h(x)dx.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 3. Вычислить интеграл Римана-Стилтьеса.

3.1. $\int\limits_{[-1,3]} xdF(x),\qquad F(x)=\begin{cases}0, x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right],\\ x^2, x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right],\\ x+4, x\in\left(\frac{3}{2},3\right].\end{cases}$

3.2. $\int\limits_{[-2,4]} x^2dF(x),\qquad F(x)=\begin{cases}x+2, x\in[-2,1],\\ x^2+5, x\in(1,2],\\ x+10, x\in(2,4].\end{cases}$

3.3. $\int\limits_{[-2,2]} \sin xdF(x),\qquad F(x)=\begin{cases}x+2, x\in[-2,-1],\\ 2, x\in(-1,1],\\ x^2+3, x\in(1,2].\end{cases}$

3.4. $\int\limits_{[-2,3]} \cos xdF(x),\qquad F(x)=\begin{cases}x, x\in[-2,0],\\ 2, x\in(0,1],\\ x^2+4, x\in(1,3].\end{cases}$

3.5. $\int\limits_{[-2,5]} e^xdF(x),\qquad F(x)=\begin{cases}x+1, x\in[-2,1),\\ x^2, x\in(1,2],\\ x+10, x\in(2,5].\end{cases}$

3.6. $\int\limits_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} xdF(x),\qquad F(x)=|\sin x|.$

3.7. $\int\limits_{[-\pi,\pi]} (x+2)dF(x),\qquad F(x)=e^x\,\mathrm{sign}(\sin\ x).$

3.8. $\int\limits_{[0,\pi]} (x-1)dF(x),\qquad F(x)=\cos x\cdot \mathrm{sign}\,x.$

3.9. $\int\limits_{[0,2\pi]} \sin x dF(x)$, $F(x) = \begin{cases} 1-\cos x, x \in [0,\pi] \\ 3+\cos x, x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$

3.10. $\int\limits_{[0,2]} e^x dF(x)$, $F(x) = \sin x \cdot \operatorname{sign} x$.

3.11. $\int\limits_{[-2,2]} xe^x dF(x)$, $F(x) = \chi_{[-2,0]}(x)$.

3.12. $\int\limits_{[0,2]} \sin x dF(x)$, $F(x) = \begin{cases} x^2, x \in [0,1], \\ 5, x \in \left(1, \frac{3}{2}\right], \\ x+6, x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right]. \end{cases}$

3.13. $\int\limits_{[-\pi,\pi]} (x+1) dF(x)$, $F(x) = x \cdot \operatorname{sign}(\cos x)$.

3.14. $\int\limits_{[-\pi,\pi]} (x+2) dF(x)$, $F(x) = \sin x \cdot \operatorname{sign}(\cos x)$.

Тема 8. Понятие интеграла Лебега-Стилтьеса

Задача1. Пусть на [0,3[задана мера Лебега–Стилтьеса, порожденная функцией

$$F(x) = \begin{cases} x^2+1, x \in \left[0, \frac{3}{4}\right], \\ x+1, x \in \left(\frac{3}{4}, 2\right], \\ 3, x \in (2,3]. \end{cases}$$

Проверить, что F не убывает и непрерывна слева. Найти:

1) меру одноточечного множества;
2) промежутки, на которых эта мера совпадает с мерой Лебега;
3) промежутки, имеющие нулевую меру;
4) промежутки, на которых эта мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега;
5) найти меру канторова множества K и меру множества рациональных чисел на [0,3[.

Для функции

$$f(x)=\begin{cases}3^n, x\in\left[\frac{1}{4^{n+1}},\frac{1}{4^n}\right[\setminus K, n\geq 1,\\ e^{-x}, x\in K,\\ \sin\pi x, x\in\left[\frac{1}{4},3\right[\setminus K\end{cases}$$

вычислить интеграл по мере Лебега – Стилтьеса, порожденной функций F, если он существует.

Решение. Функция $F(x)$ кусочно-непрерывна, имеет одну точку разрыва $x=\frac{3}{4}$, причем $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}-0}F(x)=\frac{9}{16}+1=F\left(\frac{3}{4}\right)$, что означает непрерывность слева функции F.

Остановимся на пунктах 1) – 5).

1) Известно, что для любого $x\in[0,3[$ $\mu_F(\{x\})=F(x+0)-F(x)$. В нашем случае

$$\mu_F(\{x\})=\begin{cases}0, x\neq\frac{3}{4},\\ \frac{3}{16}, x=\frac{3}{4}.\end{cases}$$

2) На промежутке $\left]\frac{3}{4},2\right]$ мера Лебега-Стилтьеса совпадает с мерой Лебега.

3) $\mu_F(]2,3])=0$, так как F постоянна.

4) Покажем, что на $\left[0,\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4},3\right)$ мера Лебега-Стилтьеса μ_F абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ. Достаточно рассмотреть промежуток $\left[0,\frac{3}{4}\right[$. Поскольку

$$\mu_F=([a,b[)=b^2-a^2\leq 2(b-a),\text{ то }\mu_F([a,b[)\leq 2\mu([a,b[)$$

и, следовательно, μ_F – абсолютно непрерывна.

Таким образом, полуинтервал $[0,3[$ разбивается на четыре части: $[0,3[=\left[0,\frac{3}{4}\right[\sqcup\left\{\frac{3}{4}\right\}\sqcup\left]\frac{3}{4},2\right]\sqcup]2,3[$ и на каждой части мера μ_F описана выше.

5) Рассмотрим канторово множество K:

$$\mathrm{K}=\left(\left[0,\frac{3}{4}\right[\cap\mathrm{K}\right)\sqcup\left(\left\{\frac{3}{4}\right\}\cap\mathrm{K}\right)\sqcup\left(\left]\frac{3}{4},1\right]\cap\mathrm{K}\right).$$

Так как $\frac{3}{4} \in \mathrm{K}, \left(\frac{3}{4} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{2}{3^{2\kappa+1}} \right)$, то $\mu_F(\mathrm{K}) = \mu_F\left(\left\{\frac{3}{4}\right\}\right) = \frac{3}{16}$, потому что на промежутках абсолютной непрерывности $\mu_F(\mathrm{K}) = 0$.

$$Q \cap [0,3[= \coprod_{k=1}^{\infty} q_k \text{ и } \mu_F(G \cap [0,3[) = \mu_F\left(\left\{\frac{3}{4}\right\}\right) = \frac{3}{16}.$$

Для вычисления интеграла построим эквивалентную функцию $g(x)$, которая отличается от $f(x)$ только в точках множества $\mathrm{K} \mid \left\{\frac{3}{4}\right\}$, мера которого равна нулю. Пусть

$$g(x) = \begin{cases} 3^n, x \in \left[\frac{1}{4^{n+1}}, \frac{1}{4^n}\right[, n \geq 1, \\ e^{\frac{-3}{4}}, x = \frac{3}{4}, \\ \sin \pi x, x \in \left[\frac{1}{4}, 3\right[\setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}. \end{cases}$$

Тогда $\int\limits_{[0,3[} f(x) d\mu_F = \int\limits_{[0,3[} g(x) d\mu_F = \int\limits_{\left[0,\frac{3}{4}\right[} g d\mu_F + \int\limits_{\left\{\frac{3}{4}\right\}} g d\mu_F + \int\limits_{\left]\frac{3}{4},2\right]} g d\mu_F + \int\limits_{]2,3[} g d\mu_F;$

$$\int\limits_{\left[0,\frac{3}{4}\right[} g d\mu_F = \int\limits_{\left[0,\frac{1}{4}\right[} g d\mu_F + \int\limits_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[} g d\mu_F = \sum_{k=1}^{\infty} 3^n \mu_F\left[\frac{1}{4^{n+1}}, \frac{1}{4^n}\right[+ \int\limits_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[} g(x) F'(x) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 3^n \left(\left(\frac{1}{4^n}\right)^2 - \left(\frac{1}{4^{n+1}}\right)^2 \right) + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sin \pi x \cdot 2x dx = \frac{45}{208} + \frac{\sqrt{2}}{2\pi};$$

$$\int\limits_{\left\{\frac{3}{4}\right\}} g d\mu_F = g\left(\frac{3}{4}\right) \mu\left(\left\{\frac{3}{4}\right\}\right) = e^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{16};$$

$$\int\limits_{\left]\frac{3}{4},2\right]} g d\mu_F = \int\limits_{\left]\frac{3}{4},2\right]} g(x) d\mu = \int_{\frac{3}{4}}^{2} \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \quad \int\limits_{]2,3[} g d\mu_F = 0.$$

Итак, $\int\limits_{[0,3[} f(x) d\mu_F = \frac{45}{208} + \frac{3}{16} e^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{\pi}.$

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Пусть на $[a,b[$ задана мера Лебега-Стилтьеса, порожденная функцией g. Проверить, что g не убывает и непрерывна слева. Найти:

1) меру каждого одноточечного множества;
2) промежутки, на которых эта мера совпадает с мерой Лебега;
3) промежутки, имеющие нулевую меру;
4) промежутки, на которых эта мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега;
5) найти меру канторова множества K и множества рациональных чисел Q.

Для функции f вычислить интеграл по мере Лебега-Стилтьеса, если он существует, используя следующую формулу:

$$\int_{[a,b[} f(x)d\,\mu_g = \int_{[a,b[} f(x)g'(x)dx + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(g(x_i+0)-g(x_i)),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – точки разрыва функции g.

1.1. $f(x) = \begin{cases} 2^n, x \in \left[\dfrac{1}{3^{n+1}}, \dfrac{1}{3^n}\right[\setminus K, n \ge 0, \\ \sin x, x \in K, \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, x \in [-1,0[\cup]1,2[; \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} -1, x \in \left[-1, \dfrac{1}{4}\right], \\ x, x \in \left]\dfrac{1}{4}, 1\right], \\ x^2+2, x \in]1,2]; \end{cases}$

1.2. $f(x) = \begin{cases} 3^n, x \in \left[\dfrac{1}{4^{n+1}}, \dfrac{1}{4^n}\right[\setminus K, n \ge 0, \\ \cos x, x \in K, \\ x^2, x \in [-1,0[\cup]1,2[; \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} x^3, x \in \left[-1, \dfrac{1}{4}\right], \\ x+1, x \in \left(\dfrac{1}{4}, 1\right], \\ 4, x \in (1,2]; \end{cases}$

1.3. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, x \in \left[\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}\right[\setminus K, n \ge 0; \\ e^{\sin x}, x \in K, \\ x\sin x, x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup (1,\pi); \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} x^3, x \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{1}{12}\right], \\ x+2, x \in \left]\dfrac{1}{12}, 2\right], \\ 5, x \in]2,\pi]; \end{cases}$

1.4. $f(x) = \begin{cases} 2^n, x \in \left[\frac{1}{6^{n+1}}, \frac{1}{6^n}\right[\setminus K, n \geq 0, \\ \sin x, x \in K, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, x \in [-2,0[; \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[-2, \frac{1}{4}\right], \\ x^2+1, x \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ x+2, x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]; \end{cases}$

1.5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\setminus K, n \geq 1, \\ x\ln(n+1), x \in K, \\ \sin x, x \in [-\pi, 0) \cup]1, \pi[; \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -1, x \in \left[-\pi, \frac{1}{4}\right[, \\ x^2, x \in \left(\frac{1}{4}, 2\right], \\ 5, x \in (2, \pi]; \end{cases}$

1.6. $f(x) = \begin{cases} 3^n, x \in \left[\frac{1}{6^{n+1}}, \frac{1}{6^n}\right[\setminus K, n \geq 0, \\ arctgx, x \in K, \\ x, x \in [-1,0) \cup (1,2); \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2, x \in \left[-1, \frac{1}{4}\right], \\ x+1, x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right], \\ 5, x \in (1,2]; \end{cases}$

1.7. $f(x) = \begin{cases} n, x \in \left[1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}\right[\setminus K, n \geq 0, \\ tgx, x \in K, \\ \cos x, x \in [-1,0) \cup (1,2); \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2+1, x \in \left[-1, \frac{1}{4}\right], \\ x+4, x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right], \\ 5, x \in (1,2]; \end{cases}$

1.8. $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right[\setminus K, n \geq 0, \\ \sin x, x \in K, \\ \frac{x}{1+x^2}, x \in (1,2); \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2, x \in \left[0, \frac{1}{12}\right], \\ x+1, x \in \left(\frac{1}{12}, 2\right]; \end{cases}$

$$1.9.\ f(x)=\begin{cases}3^n, x\in\left[\dfrac{1}{5^{n+1}},\dfrac{1}{5^n}\right[\setminus K, n\ge 0,\\ e^{\cos x}, x\in K,\\ \dfrac{1}{\sqrt[5]{x-1}}, x\in[-2,0);\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1, x\in\left[-2,\dfrac{1}{4}\right],\\ x^2+1, x\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right],\\ x+2, x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right];\end{cases}$$

$$1.10.\ f(x)=\begin{cases}(-1)^n n, x\in\left[\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{1}{2^n}\right[\setminus K, n\ge 0,\\ e^x, x\in K,\\ x\sin x, x\in(1,2);\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^3, x\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right],\\ x, x\in\left(\dfrac{1}{4},1\right],\\ 5, x\in(1,2];\end{cases}$$

$$1.11.\ f(x)=\begin{cases}2^n, x\in\left[\dfrac{1}{4^{n+1}},\dfrac{1}{4^n}\right[\setminus K, n\ge 0,\\ e^{\sin x}, x\in K,\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, x\in(1,2);\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-1, x\in\left[0,\dfrac{1}{12}\right],\\ x^4, x\in\left(\dfrac{1}{12},1\right],\\ x+4, x\in(1,2];\end{cases}$$

$$1.12.\ f(x)=\begin{cases}3^n, x\in\left[\dfrac{1}{6^{n+1}},\dfrac{1}{6^n}\right[\setminus K, n\ge 0,\\ \cos x, x\in K,\\ x^2+5, x\in(1,2);\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^3, x\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right],\\ x+1, x\in\left(\dfrac{1}{4},1\right]\\ 5, x\in(1,2];\end{cases}$$

$$1.13.\ f(x)=\begin{cases}(-1)^n, x\in\left[\dfrac{1}{3^{n+1}},\dfrac{1}{3^n}\right[\setminus K, n\ge 0,\\ \arcsin x, x\in K,\\ x\cos x, x\in(1,2);\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^2, x\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right],\\ x, x\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right],\\ x+5, x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right];\end{cases}$$

1.14. $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right[\setminus K, n \geq 0, \\ x^2+1, x \in K, \\ x+6, x \in (1,2); \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ x, x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right], \\ x^2+10, x \in (1,2]. \end{cases}$

Задача 2. Пусть функция $F(x)$ порождает меру Лебега-Стилтьеса на [–2, 2 [. Доказать, что произвольная функция $f(x)$ интегрируема на [–2, 2 [относительно меры μ_F и

$$\int\limits_{[-2,2[} f(x)d\mu_F = f(-1) + 2f(1), \text{ если } F(x)=\begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1, \\ 1, & -1 < x \leq 1, \\ 3, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Решение. Отметим, что все подмножества интервала [-2,2[измеримы и поэтому каждая функция $f(x)$, $x \in$ [-2,2[измерима относительно меры μ_F. Представим полуинтервал [-2,2[в виде объединения непересекающихся множеств [–2, 2[= [–2, –1[$\cap$ {–1} $\cap$]–1,1[$\cap$ {1} $\cap$]1,2[.

Множества [-2,1[,]-1,1[,]1,2[имеют меру нуль, так как функция, порождающая меру μ_F, на этих множествах постоянна, а тогда каждая функция $f(x)$ интегрируема и интеграл от неё равен нулю.

На множествах {-1} и {1} функция постоянна, а значит, простая. Поэтому

$$\int\limits_{\{-1\}} f(x)d\mu_F = f(-1) \cdot \mu_F(\{-1\}) = f(-1) \cdot 1 = f(-1),$$

$$\int\limits_{\{1\}} f(x)d\mu_F = f(1)\mu_F(\{1\}) = f(1) \cdot (3-1) = 2f(1).$$

Следовательно, произвольная функция $f(x)$ интегрируема на [-2,2[и интеграл равен $2f(1)+f(-1)$. Данная функция будет интегрируема на всей числовой прямой, если

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \leq -1, \\ 1, -1 < x \leq 1, \\ 3, x > 1. \end{cases} \text{ тогда } \int\limits_{R} f(x)d\mu_F = f(-1) + 2f(1).$$

Задача 3. Найти интеграл Лебега:

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx$. $\left(\frac{4}{3}\right)$

2) $\int_{-2}^{1} sign(x)\, dx$. (-1)

3) $\int_a^b D(x)dx$, где $D(x)$ - функция Дирихле, равная 1 в рациональных точках и 0 в иррациональных точках. (0)

4) $\int_E \sin x dx$, где E – множество всех рациональных точек отрезка $[0;1]$. (0)

5) $\int_E e^x dx$, где $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\}$. (0)

6) $\int_E \cos\frac{\pi x}{2}dx$, где E – множество всех иррациональных точек отрезка $[0;1]$. $\left(\frac{2}{\pi}\right)$

7) $\int_E e^x dx$, где $E=\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\ldots$ (e-1)

8) $\int_E 6dx$, где $E=\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{32},\frac{1}{16}\right)\cup\ldots$ (4)

9) $\int_E 3^x dx$, где $E=\left(\frac{1}{3},1\right)\cup\left(\frac{1}{9},\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{27},\frac{1}{9}\right)\cup\ldots$ $\left(\frac{2}{\ln 3}\right)$

10) $\int_E 4dx$, где $E=\left(\frac{1}{3},1\right)\cup\left(\frac{1}{27},\frac{1}{9}\right)\cup\left(\frac{1}{243},\frac{1}{81}\right)\cup\ldots$ (3)

11) $\int_E 2^x dx$, где $E=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots\right\}$. (0)

12) $\int_E \frac{1}{x}dx$, где $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$. (0)

13) $\int_0^1 f(x)dx$, где функция $f(x)$ равна x^2 в рациональных точках и равна $-x^2$ в иррациональных точках. $\left(-\frac{1}{3}\right)$

14) $\int_0^1 f(x)dx$, где функция $f(x)$ равна $\sin \pi x$ при $x \in E = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$ и $\cos \pi x$ при $x \in [0,1] \setminus E$. (0)

15) $\int_0^1 f(x)dx$, где функция $f(x)$ равна 6 при $x \in E = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{32}, \frac{1}{16}\right) \cup \dots$ и 9 при $x \in [0,1] \setminus E$. (7)

16) $\int_0^1 f(x)dx$, где функция $f(x)$ равна 4 при $x \in E = \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{243}, \frac{1}{81}\right) \cup \dots$ и 16 при $x \in [0,1] \setminus E$. (7)

17) $\int_0^1 f(x)dx$, где функция $f(x)$ равна $\frac{1}{\sqrt{x}}$ в иррациональных точках и 3^x в рациональных точках отрезка $[0;1]$. (2)