# 5. Спектральное представление стационарных случайных процессов с дискретным спектром

Рассмотрим случайный процесс вида

 (1)

где -постоянное число, а  и  -центрированные некоррелированные случайные величины, причем .

Понятно, что  и случайный процесс (1) может быть представлен в виде

 (2)

где 

Как видно из (2), случайный процесс (1) задает гармонические колебания со случайной амплитудой 

И случайной фазой , частотой колебаний . Легко убедится в том, что

 (3)

Дисперсия процесса задается одним числом, каноническое разложение (1)- единственным значением  . Поэтому процесс (1) называют тривиальным стационарным процессом с дискретным спектром.

Теперь рассмотрим обобщение процесса (1), а именно действительный случайный процесс вида

 (4)

где ,  -центрированные попарно некоррелированные случайные величины с конечными дисперсиями



Представление (4) называется спектральным представлением, разложением случайного процесса.

Оно же является и каноническим разложением действительного случайного процесса с дискретным спектром. Ясно, что

 (5)

где ,

Нетрудно убедиться, что ковариационная функция

 , (6)

и, соответственно дисперсия

. (7)

Дисперсия стационарного случайного процесса , представленного спектральным разложением (4), равна сумме дисперсий всех гармоник его разложения. Совокупность дисперсий всех составляющих процесс гармоник называется его дискретным спектром. Соответственно значения , обычно называют частотами, в совокупности образуют частотный спектр стационарного процесса.

При известном спектральном разложении (4) мы имеем спектральное разложение ковариационной функции (6), записываемое в следующей эквивалентной форме

, (8)

а также представление (7) для дисперсии. Возникает вопрос как получить разложение (4) при известной ковариационной функции ?

Вполне понятно, что коэффициенты в разложении (8) и набор различных частот  должны зависеть от свойств, конкретного вида ковариационной функции . Но в то же время эту зависимость можно получить различными способами, разлагая ковариационную функцию в ряд.

Функция  четная и его можно разложить в ряд Фурье по косинусам на интервале (-Т,Т).

Выберем частоты  и , k=0,1,2,…

тогда ряд Фурье для будет иметь вид

 (9)

где ,  (10)

Следует отметить- это можно доказать-для любой ковариационной функции стационарного случайного процесса  коэффициенты , k=0,1,2,… будут неотрицательными величинами. По частотам и дисперсиям  подбираются случайные величины и . Полученное разложение (9) тем точнее, чем больше интервал разложения. При этом сумма коэффициентов любого разложения (9) одна и та же она равна дисперсии процесса .

В комплексной форме спектральным разложением случайного процесса с дискретным спектром называется представление вида

 (11)

где -центрированные попарно некоррелированные случайные величины, -некоторые действительные числа, .



Спектральное разложение ковариационной функции  соответственно принимает вид

 . (12)

**Задача1.** Случайный процесс задан уравнением ,-центрированные некоррелированные случайные процессы, -некоторая константа,  Найти спектральную плотность 

*Решение*. x(t) представляет собой простейший случайный процесс с дискретным спектром сосредоточенный в одной точке. Как нетрудно убедиться, его ковариационная функция зависит лишь от разности аргументов, причем

.

Если масса  сосредоточена в конкретной точке  трехмерного пространства, то плотность этой массы задается выражением

,

где - дельта функция Дирака. Аналогично задаются распределения разных физических величин, сосредоточенных по точечно.

Спектр случайного процесса распределен на вещественной оси, а нашем примере в конкретной точке .

Поэтому естественно ожидать что спектральная плотность имеет вид

 , (13)

Причем



Покажем, что данная функция действительно является спектральной плотностью. Иными словами, требуется уточнить, что

 . (14)

Подставив выражение для  в последнюю формулу, имеем в соответствии со свойствами -функций, что

.

Функции и  связки друг с другом преобразованием Фурье F:

.

Поскольку преобразование Фурье является взаимно-однозначным отображением, то функция , удовлетворяющий равенству (14), единственна, то есть функция (13) действительно является спектральной плотностью исходного процесса.

**Задача 2.** Действительный стационарный случайный процесс задан своим спектральным разложением



Определить спектральную плотность  процесса.

*Решение*. Ковариационная функция процесса имеет вид

, 

Спектральная плотность  есть интервальные преобразование ковариационной функции:

,

т.е.



Но поскольку согласно предыдущей задаче

,

то мы приходим к равенству

.