# 4. Спектральное разложение ковариационной функции действительного спектрального стационарного случайного процесса с непрерывным спектром

В случае вещественного стационарного случайного процесса ковариационная функция  четная и потому формула (9)  спектральной плотности  принимает вид

 (1)

Как видно из полученного соотношения (1), в этом случае и спектральная плотность  четная и ковариационной функции получим представление

 (2)

Поскольку в случае стационарных процессов то

 (3)

Полезными характеристиками стационарных случайных процессов с непрерывным спектром являются эффективная ширина спектра и эффективная длительность корреляции $∆τ$, средний интервал корреляции, определяемые следующими формулами:

 (4)

 (5)

Эффективная ширина спектра  равна длине основания прямоугольника с высотой , площадь которого равна площади под кривой$s(ϑ)$ . Точно также эффективная длительность корреляции рана длине основания прямоугольника с высотой , площадь которого равна площади под кривой $\left|ρ\_{x}(τ)\right|$.

Из приведенных определений и формулы (5) вытекает, что величина $∆τ и ∆ϑ$ связаны между собой соотношением

 (6)

обычно называемым «соотношением неопределенности».

Смысл соотношения неопределенности состоит в следующем: чем уже ширина спектра стационарного процесса, тем больше интервал корреляции его сечений, и наоборот.

Спектральная плотность производной$x'(t)$процесса связана с плотностью $s\_{x}(ϑ)$ самого процесса соотношением



Для того чтобы стационарный случайный процесс x(t) был дифференцируемым, необходимо и достаточно выполнение условия,



**Задача 1.** Ковариационная функция стационарного случайного процесса x(t) задана в виде



Найти спектральную плотность$s(ϑ)$и эффективные характеристики $∆τ и ∆ϑ.$

*Решение.* Согласно формуле (8) имеем:









Итак, мы пришли к уравнению



откуда



Спектральную плотность можно вычислить и согласно формула (6):



Проведя формальное интегрирование комплекснозначных функций, мы получим



Сама возможность такого интегрирования остается под вопросом.

Эффективные характеристики находим элементарно:





**Задача 2.** «Белым шумом» называется стационарный широком смысле процесс с постоянной спектральной плотностью на всех частотах $-\infty <ϑ<+\infty $. Белый шум физически неосуществим, поскольку его дисперсия бесконечна. Пусть x(t)- стационарный в широком смысле процесс со спектральной плотностью$s(ϑ)$следующего вида



(низкочастотный белый шум).

Найти ковариационную функцию данного процесса и выяснить, является ли низкочастотный белый шум дифференцируемым.

*Решение.*По формуле (7) имеем:



Вычислим вторую производную от ковариационной функции и оценим ее, поскольку для дифференцируемости стационарного в широком смысле случайного процесса необходимо и достаточно существования второй производной автоковариационной функции при $τ=0$

Разложив функцию $sin⁡(ϑ\_{0}τ)$ по степеням $ϑ\_{0}τ$ в окрестности точки $τ=0$ , мы получим следующее представление в виде ряда для ковариационной функции:



Значит,



Так как ряды для$K\_{x}\left(τ\right) и K''\_{x}(τ)$ равномерно сходятся на любом отрезке, содержащем точку $τ=0$, то из последнего имеем, что



Производную данную можно найти несколько иначе, но без привлечения разложений функции не обойтись. Действительно, непосредственное дифференцирование дает:



Очевидно, что.Можно показать, что



Следовательно, мы получим тот же результат (7).

В силу конечности $K''\_{x}(0)$ процесс является дифференцируемым.

**Задача 3.** Определить ковариационную функцию, дисперсию и эффективные характеристики стационарного случайного процесса, имеющего спектральную плотность



*Решение.* Согласно формуле для$K\_{x}(τ)$ имеем

 (8)

Определим данный интеграл с помощью метода вычетов. Рассмотрим замкнутый контур L, состоящий из отрезка [-R,R] и верхней полуокружности $C\_{R}(0)$ радиуса R с центром в начале координат $z\_{0}=0$.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Поскольку $α>0,$ то при $R>α$ внутри контура содержится одна особая точка $z=iα$ подынтегральной функции |

Поэтому



Введем обозначения



значит,

 (9)

Рассмотрим второй интеграл $J\_{2}\left(R\right)$. Произведя в нем замену



приведем его к виду



т.е. к виду



Поскольку $0<\left|exp⁡(-τRsinφ)\right|<1 при τRsinφ>0 и \left|exp⁡(iτRcosφ)\right|=\left|exp⁡(iφ)\right|=\left|exp⁡(i2φ)\right|=\left|i\right|=1$, то мы получим оценку



т.е. оценку



Поэтому $J\_{2}\left(R\right)\rightarrow 0$при$R\rightarrow +\infty $ и поэтому из (9) будем иметь



Следовательно, согласно (8) получим, что



Дисперсия процесса равна

.

Определим теперь эффективные характеристики процесса. По определению





При решении других подобных задач, в более общих случаях, в которых нужно вычислить интегралы вида

 (10)

можно воспользоваться леммой Жордана и вытекающим из нее утверждением.

***Лемма (Жордан).*** Пусть функция f(z) регулярна в верхней полуплоскости $J\_{m}z>0,$ за исключением конечно числа особых точек $z\_{1},z\_{2},…,z\_{n} и C\_{R}(0)$ есть полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке z=0 и радиусом R:



Тогда



**Теорема.** Если функция f(z) определена на множестве вещественных чисел R1 и может быть продолжена на верхнюю полуплоскость $J\_{m}z>0$ с помощью функции f(z), удовлетворяющей условию Леммы Жордана и не имеющей особых точек на вещественной оси, то существует несобственный интеграл (10), причем

