# 5. Интегрирование случайных функций.

Траектория случайного процесса является неслучайной функцией и интеграл от нее определяется как обычный интеграл Римана. Потраекторная интегрируемость случайного процесса, поэтому вводится следующим образом.

**Определение**. Случайная функция x(t) называется интегрируемой потраекторно на отрезке [a,b], если почти все её траектории интегрируемы на этом отрезке, т. е.



Введем теперь понятие интеграла от случайной функции в среднеквадратическом смысле. Пусть случайная функция x(t) определена на. На отрезке  построим разбиение произвольное  и на каждом из промежутков этого разбиения выберем произвольную точку .

**Определение**. Если при и  существует предел в среднеквадратическом



не зависящий от способа разбиения и выбора точек , то случайная x(t) называется с. к. – интегрируемой на [a,b], а случайная величина называется ее с. к. – интегралом по [a,b] и обозначается символом.



Имеет место следующий простой критерий с. к. – интегрируемости случайной функции.

**Теорема 1**. Для того чтобы случайная функция x(t) была с. к. – интегрируема на отрезке [a,b], необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный интеграл



Нетрудно убедиться в том, что существование конечного интервала (3) эквивалентно существованию интегралов Римана



Для с. к. – интеграла справедливы многие свойства обычного интеграла от неслучайных функций. Приведем три из них, часто используемые при преобразования .

1. Линейность интеграла: если – неслучайные коэффициенты, а – с. к. – интегрируемые на случайные функции, то

 

1. Формула интегрирования по частям: если – непрерывно дифференцируемая неслучайная функция, а x(t) случайная функция, имеющая с. к. – непрерывную с. к. – производную, то



3.Правило дифференцирования по верхнему пределу: если x(t) – с. к. непрерывная случайная функция, то с. к. – производная, случайной функции



то с единичной вероятностью выполняется равенство



 Приведем в едином утверждении несколько равенств, связывающих интеграл от случайного процесса с его осреднеными характеристиками.

**Теорема 2**. Если случайная функция  с. к. – интегрируема на









**Задача 1**. Доказать, что всякая случайная x(t), с. к. – непрерывна на конечном промежутке [a,b], является с. к. – интегрируемой на [a,b].

**Решение**. Случайный процесс x(t) с. к. – непрерывен на отрезке [a,b] тогда и только, когда математическое ожидание непрерывно на [a,b], а ковариационная функция  непрерывна на диагонали, при

Следовательно, согласно условию задачи функция непрерывна на [a,b], поэтому интервалопределяемый первой формулой из (4), существует как интервал от непрерывной функции на конечном отрезке. Поскольку ковариационная функция  непрерывна на диагонали, при , то она непрерывна и на квадрате . Значит, существует и второй интервал из (4). Согласно теореме 1, функция является с. к. – интегрируемой.

**Задача 2**. Случайный процесс задается уравнением где и – центрированные некоррелированные случайные величины с конечной дисперсиейОпределить осредненные характеристики процесса 

**Решение**. Поскольку и – центрированные случайные величины, то и потому очевидными образом имеем: . Так как

 ,

то

Согласно условию задачи имеем, что 

Следовательно,  т.е. .

Найдем теперь характеристики процесса y(t). Математическое ожидание .

Ковариационная функция

.

Интегрирование по переменной  приводит к равенству .

Проводя интегрирование по второй переменной мы получим окончательное выражение для ковариационной функции: 

Полагая  в полученном выражении, находим дисперсию: .

**Задача 3**. Пусть функция  есть с. к. непрерывная случайная функция. Доказать, что при любом и заданном почти всюду на справедливо равенство

.

**Решение**. Пусть приращение h таково, что , . Тогда для приращения случайной функции  получим равенство

.

Докажем, что

 (8)

При 

.

В силу с. к. – непрерывности x(t) ковариационная функция  непрерывна и потому из последнего равенства получаем равенство –

.

Точно также можно показать, что имеет место соотношение

.

Следовательно, имеет место представление

 (9)

Поскольку , то при  аргументы . Тогда в силу непрерывности функции при имеем:



Из последних соотношений согласно (9) получим, что имеет место равенство (8), т.е. .

Итак, мы показали требуемое при 

Пусть теперь  и . В этом случае

 (10)

Производная от второго интеграла в (10) существует в силу непрерывности , а производная от первого интеграла существует по доказанному нами. Следовательно, требуемое нами доказать утверждение полностью обоснованно.

**Задача 4**. На вход интегратора, работающего по принципу , где  – произвольная реализация случайного процесса на входе, поступает случайный процесс x(t) с ковариационной функцией  и математическим ожиданием . Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса y(t) на выходе интегратора.

**Решение**. Математическое ожидание  случайного процесса y(t) на выходе интегратора равно

,

Оттуда имеем: .

Ковариационная функция равна



т.е.

.