# 4. Дифференцируемость случайных функций

Случайный процесс  называется сходящимся в среднеквадратичном при  к случайной величине , если

.

При этом пишут, что .

Случайный процесс  называется непрерывным в среднеквадратичном в точке , если

,

где сходимость рассматривается в среднеквадратичном.

***Теорема 1.*** Для того чтобы случайный процесс  был непрерывен на интервале , необходимо и достаточно, чтобы математическое ожидание  было непрерывно при , а ковариационная функция  была непрерывна на диагонали .

Производной случайного процесса  называется случайный процесс , определенный как предел в среднеквадратичном частного приращения случайного процесса к приращению неслучайного аргумента:

.

***Теорема 2.*** Для того чтобы случайный процесс  был дифференцируемым на интервале , необходимо и достаточно, чтобы математическое ожидание  было дифференцируемой функцией на  и ковариационная функция  имела вторую смешанную по  и  производную на диагонали .

Если z(t) есть производная процесса , то

, .

Приведенный критерий среднеквадратичной дифференцируемости случайной функции, процесса легко проверяется и позволяет определить математическое ожидание и ковариационную функцию среднеквадратичной производной. Тем не менее явный вид этой производной в общем случае, используя только результат приведенного утверждения, не удается получить. Поэтому вводится и следующие понятия дифференцируемости случайных функций.

*Определение*. Случайная функция  называется дифференцируемой потраекторно на , если почти все ее траектории являются дифференцируемыми функциями, т.е.

.

Если  есть среднеквадратичная производная , а  - потраекторная производная, то случайные функции  и  стохастически эквивалентны, т. е.

.

**Задача 1**. Случайный процесс задан разложением

,

где  и -центрированные некоррелированные случайные величины с , . Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию процесса .

*Решение*. Так как , то очевидным образом

.

Следовательно,  и потому



.

Согласно условию задачи  и получим следующее выражение для ковариационной функции:

.

Математическое ожидание производной процесса равно

,

а ее ковариационная функция равна

.

Дисперсия производной равна

.

**Задача 2.** Случайный процесс  центрирован, а ковариационная функция

, .

Определить дисперсию среднеквадратичной производной .

*Решение*. По условию задачи , а ковариационная функция  дифференцируема сколь угодно раз. Поэтому случайный процесс является среднеквадратично дифференцируемым. Найдем ковариационную функцию производной  процесса:

.

Значит, дисперсия производной процесса равна

.

**Задача 3.** Случайная функция  задана разложением

, ,

где  - неслучайные дифференцируемые функции, а  - случайные величины с конечными моментами второго порядка: , . Найти среднеквадратичную производную процесса.

*Решение*. При каждом случайном исходе, фиксированном , траектория  случайного процесса  есть конечная линейная комбинация дифференцируемых функций  с коэффициентами.Следовательно, траектория  есть дифференцируемая функция, причем

.

Итак, случайный процесс  дифференцируем по траекторно и ее по- траекторная производная имеет вид

.

Покажем, что существует среднеквадратичная производная и что она имеет тот же вид. Из полученного следует, что если существует среднеквадратичная производная , то при каждом  имеет стохастическая эквивалентность, т. е.

.

Следовательно, почти всюду на  при каждом  среднеквадратичная производная имеет вид

.

Из последнего соотношения ввиду существования вторых моментов ,  следует, что осредненные характеристики  и  определены и имеют вид

,



где , .

Поскольку  и  как линейные комбинации дифференцируемых функций дифференцируемы необходимое число раз, то существует среднеквадратичная производная , а ввиду стохастической эквивалентности она задается тем же приведенным выше выражением для потраекторной производной.