**§2. Проверка статистических гипотез**

**1. Понятие о статистической гипотезе.** С точки зрения математической статистики большинство биологических исследований – это проверка статистических гипотез.

Под статистической гипотезой мы понимаем предположение о параметрах известного распределения или о виде неизвестного распре­деления. Допустим, нам известно, что рост мужчин имеет нормальное распределение, то есть описывается плотностью вида

$f\left(x\right)=\frac{1}{σ\sqrt{2π}}e^{-\frac{\left(x-a\right)^{2}}{2σ^{2}}}$,

но нам не известны параметры этого распределения *а* и *σ.* Относительно величины этих параметров мы можем только высказать гипотезы. Например, что *а*=170 см, а *σ=5* см. Точное значение *а* и *σ* знать вообще невозможно, так как речь идет не о математической модели, а о реальной случайной величине. Поэтому экспериментальные данные могут лишь в большей или меньшей степени согласоваться с выдвинутой гипотезой. Предположим, что мы изменили условия жизни людей и хотим выяснить, как это повлияло на их рост. Нам придётся сравнивать две случайных величины: X – рост людей в исходных условиях, Y – рост людей в изменившихся условиях. Что же делать? Как по экспе­риментальным данным установить, что изменение условий повлияло на средний рост?

**2.** **Логика проверки статистических гипотез.** Сначала формулируют гипотезу, которую собираются проверять. Она называется нулевой и обозначается **Н0**. Затем выдвигают **альтернативную** или **конкурирующую** гипотезу, то есть гипотезу, несовместимую с нулевой гипотезой. Обозначается альтернативная гипотеза **Н1**. После этого подбирают соответствующий задаче статистический критерий. Все множество значений статистического критерия разбивают на две части: область принятия нулевой гипотезы (область согласия) и критическую область. Критическая область выбирается так, чтобы вероятность попадания в критическую область вычисленного, на основе экспериментальных данных, значения статистического критерия при условии, что нулевая гипотеза верна, была мала, например, составляла, например, 0.05 или 0.01. Если, тем не менее, вычисленное значение критерия попадает в критическую область, то считается, что скорее нулевая гипотеза неверна, чем произошло столь маловероятное событие, как попадание в критическую область при условии правильности нулевой гипотезы. Поэтому в этом случае нулевую гипотезу отвергают. Если же фактическое значение статистического критерия попадает в область согласия, то нулевую гипотезу принимают.

**3.** **Ошибки первого и второго рода.** Значение статистического критерия, вычисленное на основе выборочных данных, есть величина случайная, так как она зависит от того, какие объекты попадут в выборку, то есть от случая. Следовательно, имеется определенная вероятность этому значению попасть (независимо от обстоятельств) как в критическую область, так и в область согласия. Значит, любой статистический вывод, возможно ошибочен. Ошибки эти могут быть двух родов.

**Ошибка первого рода** – отвергнута правильная гипотеза.

**Ошибка второго рода** – принята неправильная гипотеза.

Вероятность ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают буквой α*.* В биологии при построении критической области уровень значимости выбирают обычно равным 0.05, 0.01 или 0.001.

Вероятность ошибки второго рода обозначается через β. Она равна вероятности отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что конкурирующая гипотеза верна. Эта вероятность называется мощностью статистического критерия.

1. **Статистический критерий** – это случайная величина, закон распределения которой известен точно или с необходимой точностью и которая используется для проверки статистических гипотез.
2. **Проверка статистической гипотезы о равенстве дисперсии.** Пусть имеются две генеральные совокупности, и из каждой сделано по одной выборке. Требуется выяснить, значимо ли различаются выборочные дисперсии. Что это значит? Выборочная дисперсия есть величина случайная (зависит от того, какие объекты попали в выборку). Поэтому может иметь своей причиной либо только случайность, либо еще и различие генеральных дисперсий. Действительно, если бы мы взяли две выборки из одной генеральной совокупности и вычислили выборочные дисперсии, то, скорее всего, тоже получили бы два разных значения. Поэтому само различие выборочных дисперсий еще не доказывает принадлежность выборок разным генеральным совокупностям. Статистический анализ должен как раз ответить на вопрос о том, есть ли основание считать, что выборки принадлежат разным генеральным совокупностям. В данном случае сравнения выборочных дисперсий нулевая гипотеза обычно имеет вид

Ho : D1=D2.

Эта запись означает, что предполагается равенство генеральных дисперсий.

Альтернативная гипотеза может иметь вид:

$$H\_{1}:D\_{1}>D\_{2} ,$$

то есть предполагается, что дисперсия по первой генеральной совокупности больше чем по второй.

В этом случае статистическим критерием выбирают критерий Фишера-Снедекора, случайную величину, равную отношению большей выборочной дисперсии к меньшей.

$F=\frac{S\_{1}^{2}}{S\_{2}^{2}}$,

где F – критерий Фишера-Снедекора; $S\_{1}^{2}$ – большая выборочная

дисперсия; $S\_{2}^{2}$- меньшая выборочная дисперсия.

Всю область значений критерия нужно разбить на две – критическую и согласия. При данной альтернативной гипотезе критическая область будет правосторонней (см. рис). Значит нужно

 обл.согласия критич.обл.

1. Fср

найти $F\_{кр},$ которая бы и разбила числовую ось на две области. Критическая точка находится из условия

$P(F>F\_{кр})$*= α,*

То есть вероятность попадания фактического значения критерия в критическую область при условии верности нулевой гипотезы должна равняться уровню значимости – числу, которое обычно выбирают достаточно малым (0.005, 0,01 или 0.001). Значения критических точек приведены в таблице. Поскольку сравниваются две дисперсии, значения критерия определяется доверительной вероятностью, и степенями свободы по первой и второй дисперсиям.

**Пример.** Пусть имеются две выборки объемами $n\_{1}=20$ и $n\_{2}=25.$

Выборочные дисперсии равны соответственно $S\_{1}^{2}=12,5 , S\_{2}^{2}=5.1.$ Нужно проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Имеем:

$$H\_{0}:D\_{1}=D\_{2}$$

$$H\_{1}:D\_{1}>D\_{2}$$

Вычисляем

$$F\_{ф}=\frac{S\_{1}^{2}}{S\_{2}^{2}}=\frac{12.5}{5.1}=2.45$$

Теперь по таблице Фишера-Снедекора (см. стр. 38) найдем критическую точку: 1) если $F\_{ф}\geq F\_{кр},$ то это означает, что вычисленное значение критерия попало в критическую область, и, значит, нулевая гипотеза отвергается, то есть делают вывод, что различие дисперсий значимо (или достоверно). Другими словами, если $F\_{ф}\geq F\_{кр},$ то есть основания считать, что генеральные дисперсии отличаются друг от друга; 2) если $F\_{ф}>F\_{кр},$ то различие выборочных дисперсий не достоверно, то есть нет оснований считать, что генеральные дисперсии различны.

По таблице для числа степеней свободы по большей дисперсии $K\_{1}$=20-1=19 и меньшей дисперсии $K\_{2}=$25-1=24 находим $F\_{кр}$(0.05, $K\_{1}=20,$, $K\_{2}-24$) = 2.0. Поскольку в таблице нет значения $F\_{кр}$ для числа степеней свободы по большей дисперсии равном 19, нами взято значение для $K\_{1}$= 20. Итак, видим, что $F\_{ф}>F\_{кр}$, поэтому в данном случае нулевая гипотеза отвергается – различие достоверно.

Но в таблице Фишера-Снедекора приведено значение критической точки и для другого уровня значимости – α = 0.01. Это значение равно $F\_{кр}$(0.01, $K\_{1}=20$,$K\_{2}-24$) = 2.7 . Для этого уровня значимости $F\_{ф}<F\_{кр}$, и значит нулевая гипотеза принимается.

Так все же – отвергается или принимается? Уровень значимости – это вероятность ошибки первого рода, то есть вероятность отвергнуть правильную нулевую гипотезу. В данном случае мы можем сказать,что отвергая нулевую гипотезу мы, возможно, и делаем ошибку, но её вероятность меньше 0.05. Однако мы не можем сказать, что вероятность этой ошибки меньше 0.01, то есть отвергнуть нулевую гипотезу при уровне значимости равном 0.01.

**6.** **Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормально распределенных случайных величин (случай малых выборок).**

Вданном случае нулевая гипотеза имеет вид

$H\_{0}:M\left[X\_{1}\right]=M\left[X\_{2}\right]$ ,

где M[$X\_{1}$] – математическое ожидание случайной величины $X\_{1}$ ,

 M[$X\_{2}$] – математическое ожидание случайной величины $X\_{2}$.

Конкурирующая гипотеза пусть имеет вид

$H\_{1}$:M[$X\_{1}$]≠M[$X\_{2}$].

В данном случае используется статистический критерий Стьюдента. Поскольку речь идет о малых выборках, объем которых не превышает 30, то значения критерия Стьюдента вычисляют по формуле:

$t\_{ф=\frac{\overbar{X}\_{1}-\overbar{X}\_{2}}{\sqrt{\frac{\left(n\_{1}-1\right)S\_{1}^{2}+\left(n\_{2}-1\right)S\_{2}^{2}}{n\_{1}+n\_{2}-2}×\frac{n\_{1}+n\_{2}}{n\_{1}×n\_{2}}}},}$,

где $ \overbar{X}\_{1},\overbar{X}\_{2}$ – средние арифметические по первой и второй выборкам соответственно, $S\_{1}^{2},S\_{2}^{2}$ – выборочные дисперсии, $n\_{1},n\_{2}$ – объемы выборок.

Критическая область в соответствие с конкурирующей гипотезой будет двусторонней, поскольку разность средних может оказаться как положительной, так и отрицательной (см. рис.):

 *крит. обл. обл. согласия крит. обл.*

 $t\_{kp1}$ 0 $t\_{kp2}$

Нужно найти две критические точки. Но поскольку критерий Стьюдента симметричен относительно нуля, достаточно найти по таблице правую критическую точку из условия:

$P(t>t\_{kp})$= $\frac{a}{2}$

Левая критическая точка будет равна правой только с обратным знаком.

Как и прежде, если $t\_{ф}$ попадет в критическую область (левую часть или правую), то нулевая гипотеза отвергается, то есть делается вывод, что генеральные средние различны.

**Пример:** Пусть имеются две выборки со следующими характеристиками $\overbar{X}\_{2}$***=*** 20,0, $S\_{1}^{2}$***=*** 4,0, $n\_{1}$***=***20; $\overbar{X}\_{2}$***=*** 16,0, $S\_{2}^{2}$***=*** 3,0, $n\_{1}$=15. Проверить гипотезу о равенстве средних. Имеем:

*Н0: М[*$X\_{1}$*] = М[Х2]*

$H\_{1}$ *: М[Х,]М[Х2].*

$$t\_{ф}=\frac{20.0-16.0}{\sqrt{\frac{\left(20-1\right)4.0+(15-13.0}{20+15-2}×\frac{20+15}{20.15}}}=\frac{4.0}{0.645}=6.19$$

По таблице Стьюдента находим критическую точку:

*tKp (К =* $n\_{1}$ *+ n2 - 2 = 33, α2=0.025) = 2.03*

Критическое значение критерия Стьюдента определяется доверительной вероятностью и числом степеней свободы, вычисленным по формуле:

К = $n\_{1}$ + n2 - 2.

Таким образом, $t\_{Ф}$ **>** tкpи нулевая гипотеза отвергается, то есть различия достоверны.

**7.** **Проверка гипотезы о нормальности распределения случайной величины.**

Допустим нами произведены измерения какого-либо параметра биологического объекта (скажем, длины лучевой кости у человека) и получена соответствующая выборка данных. Каково распределение случайной величины, выборочные значения *Х1,Х1...,Хп,* которой мы имеем? Мы можем предположить, допустим, на основании гистограммы, что данная случайная величина имеет нормальное распределение, но гипотезу эту нужно проверить.

Таким образом:

Н0: случайная величина X имеет нормальное распределение.

Н1: случайная величина X имеет иное распределение.

Статистическим критерием в данном случае служит случайная величина $x^{2}$ («хи- квадрат»). На основе экспериментальных данных вы­числяют величину*.*

$$X\_{ф}^{2}=\sum\_{}^{}\frac{(f\_{i}-f\_{i}^{'})^{2}}{f\_{i}^{'}}$$

где $f\_{i}$ - частота i-того класса вариационного ряда

 $f\_{i}^{'}$ - теоретическая частота i-того класса.

Теоретические частоты вычисляют по формуле:

$$f\_{i}^{'}=\frac{nK}{S}f\left(t\_{i}\right)$$

где

$$t\_{i}=\frac{x\_{i}-\overbar{x}}{S}$$

 $x\_{i}$ – середина i-того класса вариационного ряда

 n – объем выборки

 К – классовый интервал

 f(t) – функция плотности нормального распределения.

Для построения правосторонней критической области по таблицам для критерия - ***х2*** находят критическую точку, определяемую доверительной вероятностью и числом степеней свободы. Число степеней свободы, в данном случае, определяется по формуле

К = N - 3,

где N - число классов в вариационном ряду.

Критерий ***х2*** правильно отражает существо дела при достаточно большом объеме выборки. Считается, что в крайних классах частоты должны быть не меньше 5. Поэтому для проверки закона распределения иногда крайние классы объединяют с соседними, чтобы частоты были больше 5.

**Пример.** На основании выборочных данных построен вариационный ряд.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X\_{i}$$ | 5.0- | 6.0- | 7.0- | 8.0- | 9.0- | 10.0- | 11.0- | 12.0- |
|  | 6.0 | 7.0 | 8.0 | 9.0 | 10.0 | 11.0 | 12.0 | 13.0 |
| $$f\_{i}$$ | 6 | 7 | 10 | 16 | 13 | 8 | 6 | 6 |

$\overbar{X}$ *=8.90*

***S*** *=1.97*

Проверить данные на нормальность распределения (то есть являются ли эти данные выборкой из нормально распределенной случайной величины).

**Решение.** Нужно вычислить величину

$$x^{2}=\sum\_{}^{}\frac{(f\_{i}-f\_{i}^{'})^{2}}{f\_{i}^{'}}$$

Для этого составим следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$f\_{i}$$ | $\frac{x\_{i}-\overbar{x}}{S}$  | $$f\_{\left(ti\right)}$$ | $$f\_{i}^{'}$$ | $\frac{f\_{i}-f\_{i}^{'}}{f\_{i}^{'}}$  |
| 67101613866 | -1,72-1,22-0,71-0,200,300,811,321,83 | 0,0900,1890,3100,3910,3810,2870,1670,075 | 3,296,9011,3314,2913,9210,496,102,74 | 2,230,000,160,200,060,590,003,87 |

Итого $X\_{ф}^{2}$ =7.11 (сумма чисел в последнем столбце).

По таблице для критических точек распределения $X\_{ф}^{2}$ находим для $β$ = 0.95 и К = N - 3 = 8- 3 = 5. $X\_{кр}^{2}$ =11.07.

Поскольку

$X\_{ф}^{2}$ $X\_{кр}^{2}$,

то нулевая гипотеза принимается, то есть можно считать, что выборка взята из нормально распределенной случайной величины.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое статистическая гипотеза?
2. Логика проверки статистических гипотез.
3. Что значит достоверность различий выборочных показателей?
4. Ошибки первого и второго ряда.
5. Понятие о статистическом критерии.
6. Как проверить гипотезу о равенстве дисперсии двух генеральных совокупностей?
7. Как проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей в случае нормального распределения?
8. Как проверить гипотезу о нормальности распределения случайной величины?
9. Определите достоверность различий средних следующих выборок:

1) Число бедренных пор у живородящей ящерицы:

 а) из Бельгии : 9, 13, 9, 10, 11, 12, 11, 11, 11, 11, 10

 б) из Швейцарии : 12, 11, 11, 12, 11, 10, 11.

2) Скорость кровотока (в сек.) до (а) и после (б) 20 приседаний:

 а) 4.0; 5.0; 5.0; 5.1; 5.2; 6.0; 5.8; 5.0;

 б) 3.5; 4.0; 4.2; 4.0; 4.3; 4.0; 3.0; 3.7.

3) Высота полярографической волны белков (в мм) в контроле (а) и при гипотермии (б) в водорастворимой фракции мозга:

 а) 57.3; 67.0; 69.5; 80.7; 77.6; 88.0; 77.0

 б) 50.5; 71. 8;57.0; 73.0; 66.7; 84.0; 74.0.

4) Содержание сульфгидридных групп в мкМ/г белка в грубой митохондриальной фракции мозга крыс в контроле (а) и после гипотермии (б):

 а) 31.2, 10.4, 28.6, 43.0, 42.0, 50.9, 44.4

 б) 37.2, 56.0, 39.0, 38.0, 38.0, 41.0, 56.0, 21.0

5) Урожай (в ц/га ) ячменя (а) и овса (б):

 а) 7.7, 9.0, 9.4, 7.4, 7.7, 10.9, 8.0

 б) 8.3, 7.2, 8.4, 5.6, 6.4, 8.0, 9.1

6) Процент жира в плодах орешника двух сортов сбора:

 а) 62, 64, 66, 64

 б) 65, 63, 61, 63, 63

7) Уровень сывороточного холестерина у черепах:

 самцы: 226.5, 224.1, 218.6, 220.1, 228.8, 229.6, 222.5

 самки: 221.5, 230.2, 223.4, 224.3, 230.8, 223.8

8) Артериальное давление у мужчин и женщин:

 Систолическое Диастолическое

 Мужчины (22) 121.823.74 77.732.20

 Женщины (22) 121.502.43 70.451.92



В скобках указано число обследованных. Даны величины$\overline{х}$и S. Достоверно ли различие средних?

9) Измерение роста мужчин в двух популяциях дало следующие результаты:

 S1 $ =$5.5 см n127

 S23.3 см n235

Достоверно ли различие дисперсий?

10) Содержание ГЦ пар (в мол. ) в ДНК у представителей двух семейств:

 Chrococcaceae: 69, 56, 54, 57, 58, 41, 47, 63, 71

 Nostoccaceae: 60, 53, 51, 39, 38, 41, 46, 44

Достоверно ли различие средних и дисперсий?

11) При определении содержания жира () в молоке коров получены следующие данные:

4.01, 4.30, 3.62, 4.00, 4.36, 3.74, 4.20, 4.50, 3.72, 4.02

4.25, 4.28, 3.90, 4,14, 4.01, 3.30, 3.61, 4.11, 3.86, 3.64

3.72, 4.26, 3.81, 4.00, 3.83, 4.15, 3.85, 4.14, 3.89, 3.96

4.00, 4.08, 4.12, 3.88, 3.61, 3.70, 4.10, 3.18, 3.22, 3.58

3.16, 3.92, 4.05, 3.11

Проверьте нормальность распределения этой величины.

12)Измерения веса кроликов дало (г):

3.0, 2.7, 2.1, 1.6, 1.2, 1.6, 2.2, 2.1, 2.3, 1.5, 1.3, 2.2,

2.5, 2.4, 1.9, 2.3, 2.1, 1.0, 1.8, 1.9, 1.8, 3.2, 2.1, 2.9,

3.0, 1.3, 1.9, 2.6, 2.5, 1.9, 2.7, 1.9, 2.7, 2.4, 2.0, 1.1, 2.6.

Построить гистограмму. Проверить нормальность распределения.