МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Элементы функционального анализа

Кафедра: *дифференциальных уравнений и функционального анализа*
Факультете: *математики и компьютерных наук*

Образовательная программа
03.03.02 Физика

Профили подготовки
«Медицинская физика»

Уровень высшего образования:
бакалавриат

Форма обучения:
очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП,
фундаментальный модуль ОПОП

Махачкала 2022

Рабочая программа дисциплины «Элементы функционального анализа» составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО (уровень бакалавриата) по направлению подготовки 03.03.02 Физика от 07.08.2020 № 891 (с изменениями и дополнениями № 2456 от 26 ноября 2020 г.)

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,

Рагимханов В.Р., к. ф.-м.н., доцент:

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры ДУ и ФА от «15» марта 2022 г., протокол № 8

Зав. Кафедрой ________ Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук
от «23» марта 2022 г., протокол № 7

Председатель ______________ Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ ______________ Гасангаджиева А.Г.

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Элементы функционального анализа» входит в фундаментальный модуль программы бакалавриата по направлению **03.03.02 Физика.**

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук, кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с метрическими, банаховыми, гильбертовыми пространствами и операторами действующими в них; изучение и освоение таких базовых понятий как полнота, сепарабельность и компактность метрических пространств, ряды в банаховых пространствах, ортонормированные системы и ряды Фурье в гильбертовых пространствах; основные характеристики линейных ограниченных операторов в линейно нормированных пространствах; основные принципы линейного функционального анализа; примеры и основные свойства классических функциональных пространств.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:
универсальная компетенция (УК): УК-1;
общепрофессиональная компетенция (ОПК): ОПК-1.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа*.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: *контрольной работа и коллоквиума, промежуточный контроль в форме зачета*.

Объем дисциплины 2 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

<table>
<tr><th rowspan="4">Семестр</th><th colspan="7">Учебные занятия</th><th rowspan="4">Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен</th></tr>
<tr><th colspan="7">в том числе</th></tr>
<tr><th colspan="6">Контактная работа обучающихся с преподавателем</th><th rowspan="2">СРС, в том числе экзамен</th></tr>
<tr><th>Всего</th><th>Лекции</th><th>Лабораторные занятия</th><th>Практические занятия</th><th>КСР</th><th>консультации</th></tr>
<tr><td>3</td><td>72</td><td>18</td><td></td><td>36</td><td></td><td></td><td>18</td><td>зачет</td></tr>
</table>

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины *Элементы функционального анализа* являются:

– овладение основными понятиями функционального анализа (полнота, сепарабельность, компактность, линейно нормированные и гильбертовы пространства, линейные операторы);

– овладение тремя основными принципами линейного функционального анализа (теорема о продолжении линейного функционала, теорема о равномерной ограниченности, теорема о открытом отображении);

– овладение основными методами функционального анализа и умения применять их при решении различных задач из других разделов математики и физики;

– дальнейшее повышение математической культуры студентов.

.

2.Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина *элементы функциональный анализ* входит в вариативную часть по выбору образовательной программы по направлению *03.03.02 Физика*.

Знания по функциональному анализу студентам необходимы при изучении таких последующих университетских курсов, как дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, теория вероятностей, численные методы, методы оптимизации, квантовая механика.

Функциональный анализ рассчитан на студентов второго курса. Предполагается, что за первые полтора года студент уже должен знать:

1) линейную алгебру;

2) основы математического анализа;

3) элементы теории метрических пространств, которые обычно сообщаются в курсе математического анализа;

4) обыкновенные дифференциальные уравнения.

Тем не менее, изложение некоторых вопросов функционального анализа должно предшествовать независимое и замкнутое изложение соответствующих связей из других дисциплин (скажем из топологии и алгебры) так как это нужно для функционального анализа.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения.

Код и наименование компетенции из ОПОП	**Код и наименование индикатора достижения компетенций**	**Планируемые результаты обучения**	**Процедура освоения**
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	Б-УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие	**Знает:** основные методы критического анализа; методологию системного подхода, принципы научного познания. **Умеет:** производить анализ явлений и обрабатывать	

		полученные результаты; выявлять проблемные ситуации, используя методы анализа, синтеза и абстрактного мышления; использовать современные теоретические концепции и объяснительные модели при анализе информации **Владеет:** навыками критического анализа	
	Б-УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи	**Знает:** систему информационного обеспечения науки и образования; **Умеет:** осуществлять поиск решений проблемных ситуаций на основе действий, эксперимента и опыта; выделять экспериментальные данные дополняющие теорию (принцип дополнительности). **Владеет:** основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией.	
	Б-УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов	**Знает:** методы поиска информации в сети Интернет; правила библиографирования информационных источников; библиометрические и наукометрические методы анализа информационных потоков **Умеет:** критически анализировать информационные источники, научные тексты; получать требуемую информацию из различных типов источников, включая	

		Интернет и зарубежную литературу. **Владеет:** методами классификации и оценки информационных ресурсов	
	Б-УК-1.4. При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения, в том числе с применением философского понятийного аппарата	**Знает:** базовые и профессионально-профилированные основы философии, логики, права, экономики и истории; сущность теоретической и экспериментальной интерпретации понятий; сущность операционализации понятий и ее основных составляющих. **Умеет:** формулировать исследовательские проблемы; логически выстраивать последовательную содержательную аргументацию; выявлять логическую структуру понятий, суждений и умозаключений, определять их вид и логическую корректность. **Владеет:** методами логического анализа различного рода рассуждений, навыками ведения дискуссии и полемики.	
	Б-УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленных задач	**Знает:** требования, предъявляемые к гипотезам научного исследования; виды гипотез (по содержанию, по задачам, по степени разработанности и обоснованности). **Умеет:** определять в рамках выбранного алгоритма вопросы (задачи), подлежащие дальнейшей разработке и предлагать способы их решения. **Владеет:** технологиями выхода из проблемных ситуаций,	

		навыками выработки стратегии действий; навыками статистического анализа данных	
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Выявляет и анализирует проблемы, возникающие в ходе профессиональной деятельности, основываясь на современной научной картине мира	**Знает:** физико-математический аппарат, необходимый для решения задач профессиональной деятельности тенденции и перспективы развития современной физики, а также смежных областей науки и техники. **Умеет:** выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, анализировать и обрабатывать соответствующую научно-техническую литературу с учетом зарубежного опыта. **Владеет:** навыками находить и критически анализировать информацию, выявлять естественнонаучную сущность проблем	
	ОПК-1.2. Реализует и совершенствует новые методы, идеи, подходы и алгоритмы решения теоретических и прикладных задач в области профессиональной деятельности	**Знает:** основные понятия, идеи, методы, подходы и алгоритмы решения теоретических и прикладных задач физики; новые методологические подходы к решению задач в области профессиональной деятельности. **Умеет:** реализовать и совершенствовать новые методы, идеи, подходы и алгоритмы решения теоретических и прикладных задач в области профессиональной деятельности. **Владеет:** навыками реализовать и	

		совершенствовать новые методы, идеи, подходы и алгоритмы решения теоретических и прикладных задач в области профессиональной деятельности.	
	ОПК-1.3. Проводит качественный и количественный анализ выбран-ного методов решения выявленной проблемы, при необходимости вносит необходимые коррективы.	**Знает:** основы качественного и количественного анализа методов решения выявленной проблемы. **Умеет:** выбирать метод решения выявленной проблемы, проводить его качественный и количественный анализ, при необходимости вносить необходимые коррективы для достижения оптимального результата. **Владеет:** навыками проводить качественный и количественный анализ методов решения выявленной проблемы, оценивать эффективность выбранного метода.	

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет: зачетных единиц – 2, академических часов – 72.

4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	**Неделя семестра**	**Аудиторные занятия, в том числе**				**Самостоят. работа**	**Формы текущего контроля успеваемости** ***(по неделям семестра)*** **Форма промежуточной аттестации** ***(по семестрам)***
			лекции	**практ.** занятия	лабор. работы	**Контр. сам. раб.**		
Модуль 1. Линейно нормированные и гильбертовы пространства								
Всего по модулю 1	***3***		***10***	***18***			***8***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Метрические пространства	3		4	4			2	
1. Линейно нормированные и гильбертовы пространства	3		6	10			4	
3. Принцип сжатых отображений	3		2	4			2	

Модуль 2. Линейные ограниченные операторы и функционалы								
Всего по модулю 2	***3***		***8***	***18***			***10***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Линейные ограниченные операторы	3		4	8			4	
2. Теорема Хана-Банаха	3		2	4			2	
3. Теоремы о равномерном ограниченности и открытом отображении.	3		2	6			4	
ИТОГО	**72**		**18**	**36**			**18**	**зачет**

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

Пятый семестр

Модуль 1. Линейно нормированные и гильбертовы пространства

Тема 1: «Метрические пространства»

Лекция№ 1:

1) Метрические пространства.
2) Примеры метрических пространств.
3) Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах.
4) Сходимость в метрическом пространстве.
5) Фундаментальные последовательности и полные метрические пространства.
6) Всюду плотные множества.
7) Непрерывные отображения между метрическими пространствами.
8) Примеры непрерывных отображений

Тема 2: «Линейно нормированные и гильбертовы пространства»

Лекция№ 2:

1) Полунорма и норма в линейном пространстве.
2) Линейно нормированные.
3) Примеры ЛНП и банаховых пространств.

Лекция№ 3:

1) Примеры предгильбертовых и гильбертовых пространств.
2) Неравенство Коши-Буняковского.
3) Ортогональность.
4) Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства.

Лекция№ 4:

1) Примеры предгильбертовых и гильбертовых пространств.
2) Равенство параллелограмма.
3) Выражение скалярного произведения через норму в предгильбертовых пространствах.
4) Ортогональные системы.

5) Коэффициенты Фурье по ортогональной системе.
6) Неравенства Бесселя и теорема Пифагора.

Тема 3: «Принцип сжатых отображений»

Лекция№ 5:

1) Неподвижные точки отображений.
2) Сжимающие отображения.
3) Теорема Банаха о сжимающих отображениях.
4) Приложения теоремы Банаха о неподвижной точке.

Модуль 2. Линейные ограниченные операторы и функционалы

Тема 1: «Ограниченные линейные операторы»

Лекция№ 6:

1) Ограниченные линейные операторы. Норма линейного оператора.
2) Пространство ограниченных линейных операторов. Сходимость операторов.
3) Примеры ограниченных линейных операторов.
4) Линейные ограниченные функционалы. Сопряженное пространство.
5) Различные классы операторов в гильбертовых пространствах.
6) Примеры ограниченных и неограниченных операторов.

Лекция№ 7:

1) Самосопряженные операторы.
2) Унитарные операторы.
3) Однопараметрическая группа унитарных преобразований.

Тема 2: «Теорема Хана-Банаха»

Лекция№ 8:

1) Принцип продолжения линейных ограниченных операторов по непрерывности в (В) - пространствах
2) Теорема Хана-Банаха о продолжении.

Тема 3: «Теоремы о равномерной ограниченности и открытом отображении»

Лекция№ 9:

1) Принцип равномерной ограниченности для линейных ограниченных операторов.
2) Приложения теоремы о равномерной ограниченности.
3) Теорема об обратном операторе.
4) Приложения теоремы об обратном операторе.
5) Спектр ограниченного оператора.
6) Самосопряженные операторы.
7) Спектр самосопряженного оператора.
8) Уравнение Шреденгера.
9) Спектр оператора умножения.

4.3.2. Содержание лабораторно-практических занятий по дисциплине

пятый семестр

Модуль 1. Линейно нормированные и гильбертовы пространства

Тема 1: «Метрические пространства»

Практическое занятие № 1:

1) Метрические пространства.
2) Примеры метрических пространств.
3) Сходимость в метрическом пространстве.

Практическое занятие № 2:

1) Топология метрических пространств
2) Сепарабельные метрические пространства
3) Непрерывные отображения

Тема 2: «Линейно нормированные и гильбертовы пространства»

Практическое занятие № 3:

1) Полунорма и норма в линейном пространстве.
2) Линейно нормированные пространства.

Практическое занятие № 4:

1) Банаховы пространства.
2) Примеры банаховых пространств.

Практическое занятие № 5:

1) Предгильбертовы и гильбертовы пространства.
2) Примеры предгильбертовых и гильбертовых пространств.
3) Неравенство Коши-Буняковского.

Практическое занятие № 6:

1) Ортогональность.
2) Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства.

Практическое занятие № 7:

1) Гильбертовый базис.
2) Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

Тема 3: «Принцип сжатых отображений»

Практическое занятие №8:

1) Неподвижные точки отображений.
2) Сжимающие отображения.
3) Теорема Банаха о сжимающих отображениях.

Практическое занятие №9:

1) Теорема Банаха о сжимающих отображениях.
2) Приложения теоремы Банаха о сжимающих отображениях

Модуль 2. Линейные ограниченные операторы и функционалы

Тема 1: «<u>Ограниченные линейные операторы»</u>

Практическое занятие № 10:

1) Ограниченные линейные операторы. Норма линейного оператора.
2) Пространство ограниченных линейных операторов. Сходимость операторов.
3) Примеры ограниченных линейных операторов.

Практическое занятие № 11:

1) Линейные ограниченные функционалы.
2) Сопряженное пространство.

Практическое занятие № 12:

1) Линейные ограниченные функционалы. Сопряженное пространство.
2) Примеры ограниченных и неограниченных операторов.

Практическое занятие № 13:

1) Ограниченные самосопряженные операторы.
2) Различные классы операторов в гильбертовых пространствах.
3) Неограниченные самосопряженные операторы.

Тема 2: «<u>Теорема Хана-Банаха</u>»

Практическое занятие № 14:

1) Принцип продолжения линейных ограниченных операторов по непрерывности в (В) - пространствах
2) Теорема Хана-Банаха о продолжении.

Практическое занятие № 15:

1) Приложения теоремы Хана-Банаха о продолжении.

Тема 3: «<u>Теоремы о равномерной ограниченности и открытом отображении</u>»

Практическое занятие № 16:

1) Сильная и слабая сходимость операторов.
2) Приложения теоремы о равномерной ограниченности.
3) Теорема об обратном операторе.
4) Приложения теоремы об обратном операторе.

Практическое занятие № 17:

1) Спектр ограниченного оператора.
2) Спектр самосопряженного оператора.

Практическое занятие № 18:

1) Оператор импульса.
2) Оператор умножения.

5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины «Элементы функционального анализа» лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

Учебный процесс, опирающийся на использование интерактивных методов обучения, организуется с учетом включенности в процесс познания всех студентов группы без исключения. Совместная деятельность означает, что каждый вносит свой особый индивидуальный вклад, в ходе работы идет обмен знаниями, идеями, способами деятельности. Организуются индивидуальная, парная и групповая работа, используется проектная работа, ролевые игры, осуществляется работа с документами и различными источниками информации. Интерактивные методы основаны на принципах взаимодействия, активности обучаемых, опоре на групповой опыт, обязательной обратной связи. Создается среда образовательного общения, которая характеризуется открытостью, взаимодействием участников, равенством их аргументов, накоплением совместного знания, возможностью взаимной оценки и контроля.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

1) Колмогоров,А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 624 с. : ил. - ISBN 5-02-013993-9 : 1-50.

2) Фёдоров В.М. Курс функционального анализа : учебник / Фёдоров В. М. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 351 с. ; 20 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 351. - ISBN 5-8114-0589-8 : 187-66.

3) Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие / Люстерник Л.А., В. И. Соболев. - Изд. 2-е, стер. - СПб. [и др.] : Лань : Изд. высшая школа, 1982. - 270,[1] с. - (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-0976-1: 288-75.

Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : [учебное пособие для вузов] / Кириллов А.А., А. Д. Гвишиани. - М. : Наука, 1979. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 369-372. - Предм. указ.: с. 373-377. - 1-10.

4) Рамазанов А.К. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов. Ч.1 / Рамазанов А.К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2013. - 318,[1] с. - 222-00.

5) ТреногинВ А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с. - ISBN 5-9221-0271-0 : 151-01.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

7.1. Типовые контрольные задания

7.1.1. Вопросы для самостоятельной работы

1. Скалярное произведение в линейном пространстве над полем (действительных или комплексных) скаляров.
2. Принцип равномерной ограниченности (=теорема Банаха-Штейнхауса).

3. Неравенство Коши-Буняковского. Предгильбертово пространство. Непрерывность скалярного произведения и нормы в предгильбертовом пространстве.
4. Критерий поточечной сходимости ограниченных линейных операторов к линейному ограниченному оператору.
5. Определение гильбертова пространства. Понятие ортогонального дополнения множества и его замкнутость.
6. Критерий поточечной сходимости последовательности и линейных ограниченных функционалов к линейному ограниченному функционалу.
7. Лемма Беппо-Леви.
8. Достаточное условие ограниченной обратимости линейного оператора, отображающего ЛНП на ЛНП.
9. Задача. Напишите общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве $L_p\,(p \in (1,+\infty))$. Привести конкретный пример функционала и найти норму.
10. Теорема о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве
11. Теорема об ограниченной обратимости оператора $\mathrm{I}+\mathrm{A}$.
12. Ортогональное разложение гильбертово пространства.
13. Теорема об условиях ограниченной обратимости оператора $B = A + \Delta,$ где $A, \Delta A \in L_b(E, F).$
14. Критерий всюду плотности множества в гильбертовом пространстве.
15. Теорема Банаха о гомеоморфизме.
16. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала, определенного в гильбертовом пространстве.
17. Утверждения об открытости множества регулярных значений линейного ограниченного оператора и замкнутости его спектра.
18. Понятие ортогональной системы и ортонормированной системы в гильбертовом пространстве. Понятие ряда Фурье и вопрос о его сходимости.
19. Эквивалентные формулировки понятия замкнутого линейного оператора и замкнутости его спектра.
20. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Свойство частных сумм ряда Фурье.
21. Теорема Банаха – Хана о продолжении линейного ограниченного функционала в ЛНП.

7.2.2 Вопросы к коллоквиуму

1. Какие из следующих утверждений справедливы для операции Δ симметрической разности

a. $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (C \cup B)$

b. $A \Delta B \subset (A \Delta C) \not\subset (C \cup B)$

c. $A \Delta B \supset (A \Delta C) \not\subset (C \cup B)$

d. $A \Delta B \subset (A \cap C) \not\subset (C \cup B)$

2. Пусть $A, B \in 2^x$ и $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset 2^x$ - данная последовательность, χ_E − характеристическая функция множества $E \subset X$. Верно ли следующее предложение?

a. $(A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n) \Leftrightarrow (\chi_A\ (x) = \lim\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x))$

b. $\chi_{A\Delta B}(x) \neq |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$

c. $\chi_{\underline{\lim} A_n}(x) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \chi_{A_n}(x)$

d. $\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \sup \chi_{A_n}(x)$

3. Пусть $f : X \to Y$ произвольное отображение и $A_t \in 2^x$, $B_t \in Y$ где $t \in T$ и T - произвольное множество индексов, которое из следующих предложений относятся к образам и прообразам множеств?

a. $f(\bigcup\limits_t A_t) = \bigcup\limits_t f(A_t)$

b. $f(\bigcap\limits_t A_t) = \bigcup\limits_t f(A_t)$

c. $f(A_1) \setminus f(A_2) \not\subset f(A_1 \setminus A_2)$

d. $f^{-1}(\bigcup\limits_t B_t) \neq \bigcup\limits_t f^{-1}(B_t)$

4.Пусть $f : X \to Y$ произвольное отображение X в Y,

$g, h : Y \to X$ - данные отображения, а $f(x) = y, (*)$ - данное уравнение. Какое из следующих уравнений верное?

a.Если уравнение (*) имеет решение и $g_0 f = I_x$, то это решение единственно;

b.Если $g_0 f = I_Y$, то уравнение (*) имеет, по крайней мере одно решение

c.Если f имеет обратное отображение, то уравнение (*) имеет решение, но не единственное.

d. $f(X) \in Y$

5. Пусть X - множество прямых l плоскости и пусть $l_1 \equiv l_2 (\mathrm{mod}\, R_a)$ означает, что $l_1 \parallel l_2$, $l_1 \equiv l_2 (\mathrm{mod}\, R_b)$, означает, что $l_1 \perp l_2$.

Какие из следующих высказываний верны?

a. $X \mid R_a$ - можно отождествить с множеством всех (неориентированных) прямых проходящий через фиксированную точку плоскости

b. R_a - отношение эквивалентности в X

c. R_b - не является отношением эквивалентности в X

d. R_a и R_b - отношение эквивалентности в X

6.Пусть X - произвольное множество, R - отношение эквивалентности в X

Найдите из следующих предложений верное:

a. Всякое разбиение X соответствует некоторому отношению эквивалентности R в X.

b. Элементы $X \mid R$ образует разбиение

c.Элементы $X \mid R$ не образует разбиение

d. Не всякое разбиение X определяет некоторое отношение эквивалентности R в X.

7. Какое из следующих предложений верно?

a. $(N, \leq)$ (множество натуральных чисел с естественным порядком)

b. $(G, <)$ (множество всех окрестностей фиксированной точки $x \in R^n$, упорядоченное по обратному включению) – направленное множество.

c.Пусть $x \in R^n$ произвольная точка и Λ - множество интервалов I, содержащий точку x с отношением порядка L: «$I_1 < I_2$ означает $I_1 \supset I_2$» $(\Lambda, <)$ не является направленным множеством

d. Множество N нельзя упорядочить

8. В метрическом пространстве (E, ρ), где $\rho(x, y) = \begin{cases} o \; при \; x = y \\ 1 \; при \; x \neq y \end{cases}$, какое из следующих предложений верно?

a. Любое подмножество в E одновременно и открыто и замкнуто

b. Одноточечное множество не открыто.

c. Все множества открыты

d. одноточечное множество не открыто и не замкнуто

9. какие из следующих предложений верные?

a. $\forall p \in [1, +\infty]$: (K^n, ρ_ρ)- метрическое пространство

b. $\forall p \in [1, +\infty]$: сходимость в (K^n, ρ_ρ)- эквивалентна равномерной по координатной сходимости.

c. $p \neq 2$

d. $p = \pi$

10.Какому условию должна удовлетворяться определенная на R непрерывная функция $u = f(u)$, чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику с помощью равенства $\rho(x, y) = | f(x) - f(y) |$?

a. $f -$ монотонная и $f(R) = R$

b. $f = const$

c $f -$ непрерывна на R

d. f −разрывна

11.Пусть $p \in [1, +\infty]$ и функция $\rho_\rho : K^n \times K^n \to R,$ где $n \in N,$ $K = R$ или C и

$$\rho_p(x, y) = \begin{cases} [\sum_{k=1}^{n} | x_k - y_k |^p]^{\frac{1}{p}} \; если \quad p \in [1, +\infty), \\ \sup_{k \in N} | x_k - y_k |, если \quad p = \infty. \end{cases}$$

Какое из следующих приложений верно?

a. $\forall p \in [1, +\infty) : \left(K^n, \rho_p\right)$ метрическое пространство

b. $\forall p \in [1, +\infty)$ метрическое пространство

c. $p \neq 2$

d. $p = \pi$

12. Пусть $p \in [1,+\infty]$ и функция $\rho_\rho : K^n \times K^n \to R,$ где $n \in N,$ $K = R$ или C и

$$\rho_p(x,y) = \begin{cases} [\sum_{k=1}^{n} | x_k - y_k |^p]^{\frac{1}{p}} \text{ } если \quad p \in [1,+\infty), \\ \sup\limits_{k\in N} |x_k - y_k|, если \quad p = \infty. \end{cases}$$

Какое из следующих приложений верно?

a. $\forall p \in [1,+\infty)$ сходимость в $\left(K^n, \rho_p\right)$ эквивалентна равномерной по координатной сходимости

b.Любое ограниченное множество в $\left(K^n, \rho_p\right)$ вполне ограниченно, а любое ограниченное замкнутое множество компактно.

c. $p \neq 2$

d. $p = \pi$

13. Пусть $p \in [1,+\infty]$ и функция $\rho_\rho : l_p \times l_p \to R$ определена соотношениями:

$$\rho_p(x,y) = \begin{cases} [\sum_{n=1}^{n} | x_k - y_k |^p]^{\frac{1}{p}} \text{ } если \quad p \in [1,+\infty), \\ \sup\limits_{k\in N} |x_k - y_k|, если \quad p = \infty. \end{cases}$$

Какие из следующих предложений справедливы?

a. $\forall p \in [1,+\infty)$: (l_p, ρ_p) метрическое пространство

b. Из сходимости в (l_p, ρ_p) при $p \in [1,+\infty)$ следует покоординатная сходимость

c. (l_3, ρ_3) не метрическое пространство

d. (l_1, ρ_1) не метрическое пространство

14. Пусть $p \in [1,+\infty]$ и функция $\rho_\rho : l_p \times l_p \to R$ определена соотношениями:

$$\rho_p(x,y) = \begin{cases} [\sum_{n=1}^{n} | x_k - y_k |^p]^{\frac{1}{p}} \text{ } если \quad p \in [1,+\infty), \\ \sup\limits_{k\in N} |x_k - y_k|, если \quad p = \infty. \end{cases}$$

Какие из следующих предложений справедливы?

a. $\forall p \in [1,+\infty)$: (l_p, ρ_p) метрическое пространство

b. Сходимость в (l_∞, ρ_∞) совпадает с равномерной покоординатной сходимостью при $p \in [1,+\infty)$ следует покоординатная сходимостью

c. (l_3, ρ_3) не метрическое пространство

d. (l_1, ρ_1) не метрическое пространство

15. Пусть $p \in [1,+\infty]$ и функция $\rho_\rho : l_p \times l_p \to R$ определена соотношениями:

$$\rho_p(x,y)=\begin{cases}[\sum_{n=1}^{n}|x_k-y_k|^p]^{\frac{1}{p}} \text{ } если \quad p\in[1,+\infty),\\ \sup_{k\in N}|x_k-y_k|, если \quad p=\infty.\end{cases}$$

Какие из следующих утверждений справедливы?

a. (l_p,ρ_p) полное метрическое пространство при $p\in[1,+\infty)$

b. (l_∞,ρ_∞) не является сепарабельным метрическим пространством

c. (l_∞,ρ_∞) является сепарабельным метрическим пространством

d. (l_p,ρ_p) неполное метрическое пространство

16. Какие из следующих утверждений несправедливы?

a. Любое ограниченное множество в (l_∞,ρ_∞) вполне ограничено

b. Пространства (l_p,ρ_p) при $p\in[1,+\infty)$ некомпактны

c. Пространства (l_p,ρ_p) при $p\in[1,+\infty)$ компактны

d. Любое ограниченное множество в (l_p,ρ_p) при $p\in[1,+\infty)$ вполне ограниченно

17. Пусть $p\in[1,+\infty]$ и $\rho_\rho : l_p\times l_p\to R$, где

$$\rho_p(x,y)=\begin{cases}[\sum_{n=1}^{n}|x_k-y_k|^p]^{\frac{1}{p}} \text{ } если \quad p\in[1,+\infty),\\ \sup_{k\in N}|x_k-y_k|, если \quad p=\infty.\end{cases}$$

Какие из следующих утверждений справедливы?

a. $l_p\subset l_q$ при $p<q$, $p,q\in[1+\infty)$

b. $l_\infty\supset l_1$

c. $l_p\supset l_q$ при $p<q$, $p,q\in[1+\infty)$

d. $l_p\not\subset l_q$ и $l_q\not\subset l_p$ при $p<q$, $p,q\in[1+\infty)$

18. Пусть $s=\{f \mid f:N\to R\}$ и фикция $\rho : s\times s\to R$ определена равенством

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|f(n)-g(n)|}{1+|f(n)-g(n)|}.$$

Какие из следующих утверждений верны?

a. (s,ρ)-компактное пространство

b. Сходимость в (s,ρ) равномерная покоординатная

c. (s,ρ) - полное пространство

d. (s,ρ)- сепарабельное пространство

19. Пусть $s=\{f \mid f:N\to R\}$ и фикция $\rho : s\times s\to R$ определена равенством

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|f(n)-g(n)|}{1+|f(n)-g(n)|}.$$

Какие из следующих утверждений верны?

a.На (s,ρ) можно задать норму так, что $\rho(x,y)=\| x-y \|$

b.Любое множество в (s,ρ) предкомпактное

c.(s,ρ)- линейное метрическое пространство

d. Сходимость в s по координатная

20. Какие из следующих утверждений справедливы?

a. В любом метрическом пространстве замыкание шара $\overline{B(x,r)}$ лежит в замкнутом шаре $\overline{B}(x,r)$.

b. В любом метрическом пространством E для любого $r>0$ выполняется неравенство $0 \le diamB(x,r) \le 2r.$

c. $diamB(x,r) \ge 3r$

d. $diamB(x,r)=0$.

7.1.3. Вопросы к зачету по дисциплине

1. Кольцо множеств, полукольцо множеств, алгебра и сигма-алгебра множеств. Измеримое пространство.
2. Монотонный класс множеств и теорема о монотонном классе.
3. Конечно-аддитивная и счетно-аддитивная функция множеств, продолжение меры на кольцо.
4. Мера Стилтьеса.
5. Внешняя мера, измеримые множества.
6. Теорема Каратеодори об измеримых множествах.
7. Продолжение меры по Лебегу и Жордану.
8. Измеримые функции и их свойства.
9. Различные типы сходимости функций и связь между ними.
10. Теоремы Лузина и Егорова.
11. Интеграл Лебега по счетно-аддитивной функции множества.
12. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега и теорема Радона-Никодима (без доказательства).
13. Теорема о монотонной сходимости.
14. Лемма Фату.
15. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
16. Произведение мер и теорема Фубини (без доказательства).
17. Мера Лебега в R^n.
18. Критерий Лебега интегрируемости по Риману.
19. ЛНП и (В)-пространства: определения и примеры.
20. Пространства ограниченных операторов L(E,F) и его полнота.
21. Изоморфизм (В)-пространств.
22. Принцип продолжения линейных ограниченных операторов по непрерывности в (В)-пространствах.
23. Теорема Хана-Банаха о продолжении.
24. Сопряженные и рефлексивные пространства.
25. Теорема об общем виде функционала $f \in \left(C_{([a,b])}\right)^*$.
26. Биортогональные системы: определение и примеры.
27. Отображения двойственности и рефлексивные пространства.
28. Неравенства Гельдера и Минковского для рядов и интегралов.

29. Лебеговы пространства $L_p(X)$ ($1 \le p \le \infty$) и их свойства.
30. Сопряженное пространство $L_p^*(X)$ ($1 \le p \le \infty$).
31. Сопряженные линейные операторы.
32. Строго ЛНП и наилучшие приближения в ЛНП.
33. Наилучшие приближения в $L_p(X)$ ($1 \le p \le \infty$).
34. Всюду плотные множества в $L_p(X)$ ($1 \le p \le \infty$), аппроксимация гладкими функциями.
35. Предгильбертовы (=евклидовы) и гильбертовы пространства: определения и примеры.
36. Теорема о наилучшем приближении и ее следствия.
37. Теорема Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
38. Ортогональные системы и теорема Стеклова о полноте.
39. Изоморфизм гильбертовых пространств.
40. Преобразование Фурье в $L_1(R^n)$, формулы преобразования Фурье.
41. Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$, теорема Планшереля об операторе Фурье
42. Аксиомы сходимости по Френе, линейные пространства сходимости, полнота сопряженных пространств.
43. Принцип равномерной сходимости функционалов в сопряженном пространстве для пространства сходимости.
44. Локально выпуклые пространства.
45. Пространства основных функций D(Rn) и обобщенный функций D´(Rn), Действия с обобщенными функциями.
46. Структура обобщенных функций.
47. Сопряженное пространство E´(Rn).
48. Свойства пространства E´(Rn), регулярные обобщенные функции.
49. Пространства Соболева.
50. Пространства Шварца J´(Rn) и преобразование Фурье в J´(Rn).
51. Теорема Бэра о категориях в метрическом пространстве.
52. Принцип равномерной ограниченности для ЛНП.
53. Сильная и слабая сходимость операторов.
54. Слабая* сходимость функционалов.
55. Теорема о замкнутом графике.
56. Теорема об обратном операторе.
57. Спектр ограниченного оператора, граница спектра и спектральный радиус.
58. Компактные множества и их свойства в метрическом пространстве.
59. Критерий компактности Хаусдорфа и ее следствие.
60. Критерий компактности множества в C(X).
61. Критерий компактности множества в пространствах lp и Lp(X) ($1 \le p \le \infty$).
62. Слабо* компактные множества и их свойства.
63. Критерий слабой* компактности множества
64. Компактные операторы и их основные свойства.
65. Теорема Рисса-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора в (B)-пространстве.
66. Четыре теоремы Фредгольма.
67. Свойства эрмитовых операторов.
68. Теорема Гильберта-Шмидта.

7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля – 50 %.
Текущий контроль по дисциплине включает:
- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях -30 баллов,
- выполнение лабораторных заданий – 30 баллов,
- выполнение домашних (аудиторных) контрольных работ - 30баллов.
Промежуточный контроль по дисциплине включает:
- устный опрос -50 баллов,
- письменная контрольная работа -50 баллов,

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

Основная

1) Колмогоров,А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 624 с. : ил. - ISBN 5-02-013993-9 : 1-50.
2) Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие / Люстерник Л.А., В. И. Соболев. - Изд. 2-е, стер. - СПб. [и др.] : Лань : Изд. высшая школа, 1982. - 270,[1] с. - (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-0976-1: 288-75.
   Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : [учебное пособие для вузов] / Кириллов А.А., А. Д. Гвишиани. - М. : Наука, 1979. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 369-372. - Предм. указ.: с. 373-377. - 1-10.
3) Рамазанов А.К. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов. Ч.1 / Рамазанов А.К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2013. - 318,[1] с. - 222-00.
4) Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с. - ISBN 5-9221-0271-0 : 151-01.
5) Асташова И.В. Функциональный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Асташова И.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, 2011.— 112 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/11120.html.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

Дополнительная

6) Фёдоров В.М. Курс функционального анализа : учебник / Фёдоров В. М. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 351 с. ; 20 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 351. - ISBN 5-8114-0589-8 : 187-66.

7) Рудин У. Функциональный анализ / Рудин, Уолтер ; пер. с англ. В.Я.Лина; под ред. Е.А.Горина. - 2-е изд., испр. и доп. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 443 с. ; 23 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 430-431. - Указ. имен. и терминов: с. 435-440 . - ISBN 5-8114-0611-8 : 312-18.
8) Канторович Л.В. Функциональный анализ / Канторович, Леонид Витальевич. - 2-е изд., перераб. - М. : Наука, 1977. - 741 с. : ил. ; 22 см. - Список лит.: с.719-730. - Указ. предм.: и обозначений: с. 731-741. - 3-20.
9) Глазырина П.Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Глазырина П.Ю., Дейкалова М.В., Коркина Л.Ф.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016.— 216 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/66213.html.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	**Студентам:** - запустить установленный у Вас математический пакет, выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий и решить свою задачу по аналогии; **Преподавателям:** - использовать математические пакеты для поддержки курса лекций. **Всем заинтересованным пользователям:** **1.** – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе. **2.** – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
3.	Математика	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	http://elib.dgu.ru, http://edu.icc.dgu.ru	
6.	Общероссийский математический портал (Math-Net.**Ru**)	www.mathnet.ru	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Учебная программа по элементам функционального анализа распределена по темам и по часам на лекции, практические и лабораторные занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

На лекциях особенно большое значение имеет реализация следующих задач:

1) глубокое осмысливание ряда понятий и положений, введенных в теоретическом курсе;
2) раскрытие прикладного значения теоретических сведений;
3) развитие творческого подхода к решению практических и некоторых теоретических вопросов;
4) закрепление полученных знаний путем многократного практического использования;
5) приобретение прочных навыков типовых расчетов;
6) расширение кругозора, приобретение полезных сведений, касающихся технических данных реальных объектов и конкретных условий их эксплуатации.

Наряду с перечисленными выше образовательными целями, занятия преследуют и важные цели воспитательного характера, а именно:

а) воспитание настойчивости в достижении конечной цели;
б) воспитание дисциплины ума, аккуратности, добросовестного отношения к работе;
в) воспитание критического отношения к своей деятельности, умения анализировать свою работу, искать оптимальный путь решения, находить свои ошибки и устранять их.

Методические рекомендации

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить следующие литературные источники:

1 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1981.

2 Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа.* М.: Высшая школа, 1982.
3 Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с. - ISBN
Решить задач и упражнений из учебного пособия Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с.
Для проверки остаточных знаний использовать тесты и вопросами для самопроверки.

Подготовка к зачету

Для подготовки к зачету: повторить лекционный материал, проанализировать список рекомендованной литературы, решить самостоятельно задачи и примеры из учебного пособия: Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

При осуществлении образовательного процесса по элементам функционального анализа рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.
При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины математический анализ. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.
В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.