

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

Рабочая программа по дисциплине:

«Теория устойчивости»

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа

Образовательная программа:

01.03.01 Математика

Профиль подготовки:

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Форма обучения:

Очная

Статус дисциплины:

дисциплина по выбору

Махачкала 2022

Рабочая программа дисциплины «Теория устойчивости» составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 – Математика (уровень бакалавриат) от 10.01.2018 г. №8

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа, Сиражудинов М.М., д. ф.-м.н., профессор

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры ДУ и ФА от «15» марта 2022 г., протокол № 8

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «23» марта 2022 г., протокол №7.

Председатель  Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ  Гасангаджиева А.Г.

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

- Знакомство с современным состоянием устойчивости движения, основными понятиями и теоремами.
- Изучение вопросов устойчивости решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
- Формирование у студентов фундаментальных знаний в области теории устойчивости и ее применению к качественному исследованию систем дифференциальных уравнений.
- Изложение основных понятий теории устойчивости ,способов исследования устойчивости автономных систем.
- Выработка практических навыков исследования устойчивости и качественного анализа динамических систем.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП бакалавриата

Курс «Теория устойчивости в часть дисциплины по выбору образовательной программы бакалавриата по направлению (специальности) **01.03.01 Математика**

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы следующие знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Дифференциальные уравнения», «Математическая физика», «Функциональный анализ»

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: « Операторы Штурма -Лиувилля» ,«Качественная теория дифференциальных уравнений. » Курс «Теория устойчивости» входит в блок специальных дисциплин по выбору (СД). Предполагается, что учащиеся освоили университетские курсы «Математического анализа», «Алгебры и геометрии», «Дифференциальных уравнений», «Математической физики», «Функционального анализа». Курс «Теория устойчивости» наиболее тесно связан со следующими спецкурсами для бакалавров: «Самосопряженные операторы», «Обобщенные функции и их приложения», «Качественная теория дифференциальных уравнений».

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения и процедура освоения).

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
УК-1. Способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации.	<p>Знает: структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, а также базовые составляющие таких задач.</p> <p>Умеет: анализировать постановку данной математической задачи, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения.</p> <p>Владеет: навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математических дисциплин</p>	Устный опрос, письменный опрос; контрольная работа, коллоквиум
	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.	<p>Знает: принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации научной информации в области математики и компьютерных наук.</p> <p>Умеет: системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук.</p> <p>Владеет: навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок</p>	

	<p>УК-1.3.Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных</p>	<p>Знает: современные методы сбора и анализа научного материала с использованием информационных технологий; основные методы работы с ресурсами сети Интернет.</p> <p>Умеет: применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных;</p>	
--	--	--	--

		<p>практически использовать научнообразовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях и в деятельности педагога.</p> <p>Владет: навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками использования современных баз данных; навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах.</p>	
--	--	--	--

<p>ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.1.Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и естественных наук.</p>	<p>Знает: теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а также теоретической механики, физики.</p> <p>Умеет: решать задачи, связанные с исследованием свойств функций и их производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами.</p> <p>Владеет: базовыми методами современного математического</p>	<p>Устный опрос, письменный опрос; контрольная работа, коллоквиум</p>
		<p>анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач</p>	
	<p>ОПК-1.2.Умеет использовать их в профессиональной деятельности</p>	<p>Знает: способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.</p>	

	...	<p>Умеет: применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p> <p>Владеет: навыками применения методов современного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.</p>	
	<p>ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний</p>	<p>Знает: различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p> <p>Умеет: корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук.</p> <p>Владеет: навыками выбора методов решения задач современного математического анализа</p>	
ПК-1. Способность демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	ПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.	<p>Знает: основы математического анализа и различные приложения дифференциального и интегрального исчисления в математических и естественных науках; современные языки программирования и современные информационные технологии.</p> <p>Умеет: применять дифференциальное и интегральное исчисления для решения различных задач математических и естественных наук; составлять программы на современных</p>	Круглый стол Устный опрос, письменный опрос; контрольная работа, коллоквиум

		<p>языках программирования.</p> <p>Владеет: базовыми методами дифференциального и интегрального исчислений; навыками программирования на современных языках</p>	
	<p>ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике</p>	<p>Знает: области применения дифференциального и интегрального исчисления; различные языки программирования.</p> <p>Умеет: решать задачи, связанные: с исследованием свойств функций и их производных, с изучением функциональных рядов, с оценкой погрешности аппроксимации функций; применять различные языки программирования в численном анализе.</p> <p>Владеет: методами дифференциального исчисления для исследования функций и навыками приложения интегрального исчисления к геометрии и физике</p>	
	<p>ПК-1.3. Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике и информатике</p>	<p>Знает: методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов; методы исследования сходимости рядов; численные методы анализа; современные информационные технологии. Умеет: применять методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов и методы исследования сходимости рядов в численном анализе с использованием современных информационных технологий.</p> <p>Владеет: навыками решения задач численного анализа с использованием методов дифференциального и интегрального исчисления</p>	

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет **зачетных единиц 4, академических часов 144.**

4.2. Структура дисциплины.

4.2.1. Структура дисциплины в очной форме

№ п/п	Разделы и темы дисциплины по модулям	Семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	...	Самостоятельная работа в т.ч. экзамен	
	Модуль 1. Устойчивость линейных однородных и неоднородных дифференциальных систем.							
1	Тема 1. Основные понятия теории устойчивости. Методы решения задач на устойчивость		4	4			10	Контрольная работа
2	Тема 2. Исследование устойчивости для автономных систем. Функции Ляпунова и их свойства. Теорема Ляпунова об устойчивости и неустойчивости.		4	4			10	Контрольная работа
3	Итого по 1 модулю	36	8	8			20	коллоквиум
4	Модуль2. Устойчивость по первому приближению							

5	Тема 3. Критерии устойчивости по первому приближению. Устойчивость систем первого приближения. Построение функции Ляпунова для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению		4	4			10	Контрольная работа
6	Тема 4. Критерии Гурвица и Михайлова. Обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению		4	4			10	Контрольная работа
7	Итого по 2 модулю	36	8	8			20	коллоквиум
8	Модуль 3. Исследование устойчивости решения автономных систем в критических случаях.							
9	Тема 5. Исследование устойчивости решения автономных систем. Приведение к специальному виду. Исследование систем, имеющих приложения в физике, химии, экономике.		6	6			8	Контрольная работа
10	Тема 6. Устойчивость периодических движений. Постановка задачи, определение. Теоремы второго метода Ляпунова для неустановившихся движений. Линейные с периодическими коэффициентами. Нелинейные уравнения с периодическими коэффициентами		4	4			8	Контрольная работа

	Итого за 3 модуль	36	10	10			16	коллоквиум	
	Модуль 4 : подготовка к экзамену							36	
	Итого	144	26	26			56	36	

4.3. Содержание дисциплины по темам .

4.3.1.Содержание лекционных занятий

Модуль 1.Устойчивость линейных однородных и неоднородных дифференциальных систем.

Тема 1. Введение.

Возникновение теории устойчивости. Применение теории устойчивости в физике ,технике ,экономике. Основные понятия теории устойчивости. Основные методы решения задачи устойчивости.

Тема 2.Исследование устойчивости для автономных систем.

Функции Ляпунова и их свойства. Теорема Ляпунова об устойчивости и неустойчивости. Теоремы Красовского об асимптотической устойчивости и неустойчивости. Теоремы Четаева.

Модуль2. Устойчивость по первому приближению Тема

3.Критерии устойчивости по первому приближению.

Устойчивость систем первого приближения. Построение функции Ляпунова для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Тема 4.Критерии Гурвица и Михайлова.

Обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Модуль 3..Исследование устойчивости решения автономных систем в критических случаях.

Тема 5.Исследование устойчивости решения автономных систем .

Приведение к специальному виду. Исследование систем ,имеющих приложения в физике ,химии ,экономике.

Тема 6.Устойчивость периодических движений.

Постановка задачи, определение. Теоремы второго метода Ляпунова для неустановившихся движений. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Нелинейные уравнения с периодическими коэффициентами.

4.3.2. Содержание тем практических занятий.

№ модуля	Наименование практических занятий	Кол-во часов
Модуль 1	Тема 1. Основные понятия и определения. Примеры. Устойчивость движения: уравнения в отклонениях. Значение исследований на устойчивость, стабилизация процессов, математическая теория устойчивости, определение устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову. Экспоненциальная устойчивость.	4
	Тема 2. Теоремы Ляпунова об устойчивости для однородных систем дифференциальных уравнений. Примеры. Теоремы Четаева о неустойчивости.	4
Модуль 2. Устойчивость по первому приближению	Тема 3. Устойчивость и неустойчивость линейных дифференциальных систем частного вида. Устойчивость периодических движений. Исследование устойчивости решения автономных систем в критических случаях.	4
	Тема 4. Устойчивость решений автономных систем в критических случаях. Устойчивость периодических движений	4
Модуль 3. Исследование устойчивости решения автономных систем в критических случаях.	Тема 5. Исследование устойчивости решения автономных систем. Приведение к специальному виду. Исследование систем, имеющих приложения в физике, химии, экономике.	6

	<p>Тема 6. Устойчивость периодических движений.</p> <p>Постановка задачи, определение. Теоремы второго метода Ляпунова для неустановившихся движений. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Нелинейные уравнения с периодическими коэффициентами</p>	4
--	---	----------

4.4 . Самостоятельное изучение модулей дисциплины.

<i>Разделы и темы для самостоятельного изучения</i>	<i>Виды и содержание самостоятельной работы</i>
Модуль 1. Устойчивость линейных однородных дифференциальных систем	
1. Теоремы Ляпунова и их доказательство.	Рефераты на темы: 1. История возникновения теории устойчивости.
2. Применение теории устойчивости в механике.	Решение задач и упражнений.
Устойчивость линейных неоднородных дифференциальных систем .	
1. Линейные неоднородные системы и методы построение решений.	Решение задач и упражнений.
2. Второй метод Ляпунова.	Рефераты на темы: 1. Функции Ляпунова и их свойства.
Модуль 2. Устойчивость по первому приближению	
1. Критерии устойчивости и их доказательство.	Решение задач и упражнений.
2. Обобщение теоремы Ляпунова.	Решение задач и упражнений.
Модуль 3. Исследование устойчивости решения автономных систем в критических случаях.	
1. Исследование устойчивости решения автономных систем в критических случаях	Доклады на тему: Устойчивость периодических решений.
2. Стабилизация управляемых движений.	Решение задач и упражнений.

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В основе преподавания дисциплины "Теория устойчивости" лежит лекционносеминарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия.

Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

Вузовская лекция должна выполнять не только информационную функцию, но также и мотивационную, воспитательную и обучающую.

Информационная функция лекции предполагает передачу необходимой информации по теме, которая должна стать основой для дальнейшей самостоятельной работы студента.

Мотивационная функция должна заключаться в стимулировании интереса студентов к науке. На лекции необходимо заинтересовывать, озадачивать студентов с целью выработки у них желания дальнейшего изучения той или иной экономической проблемы.

Воспитательная функция ориентирована на формирование у молодого поколения чувства ответственности, закладку нравственных, этических норм поведения в обществе и коллективе, формирование патриотических взглядов, мотивов социального поведения и действий, финансовоэкономического мировоззрения.

Обучающая функция реализуется посредством формирования у студентов навыков работы с первоисточниками и научной и учебной литературой.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная домашняя работа студентов включает:

- изучение основной и дополнительной литературы по теме лекции, закрепление лекционного материала;
- выполнение письменных домашних заданий (задач, расчетов и пр.).

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для домашней работы студентов, направленной на закрепление лекционного материала, представлен в рабочей программе дисциплины. Выполнение письменных домашних заданий осуществляется в виде конспектирования отдельных вопросов лекционного материала, составления аналитических обзоров и решения задач по указанию преподавателя из числа заданий, содержащихся в методических материалах по проведению практических занятий по дисциплине. В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по собственной директории в рамках индивидуального

рабочего плана, изучение данной дисциплины базируется на следующих возможностях: - индивидуальные консультации преподавателя (очно, в часы консультаций, по электронной почте, а также с использованием программ Skype, Viber, а также возможностей социальных сетей

Учебно-методические пособия для самостоятельной работы:

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959
2. Левенштам В.Б. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми. Изд-во Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, 2008, 366стр.
- Монография
3. До Н.Т., Левенштам В.Б. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с большим параметром в критическом случае // ЖВМ и МФ. 2011, т.51, №6. С.1043-1055.
4. До Н.Т., Левенштам В.Б. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Диф. уравн. .2012, т.48, №8. С.1190-1192

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

7.1. Типовые контрольные задания

Вариант №1

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{aligned} x' &= \ln(3 \exp(y) - 2 \cos x), \\ y' &= 2 \exp(x) - (8 + 12y). \end{aligned}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{aligned} x' &= -x - y, \\ y' &= x - y. \end{aligned}$$

3. При каких значениях a устойчив многочлен $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + a$?
4. Построить фазовой портрет системы $x' = 2 - 1x$, $y' = 3 - 4$.
5. При каких k и ω уравнение $y'' + k^2y = \sin \omega t$ имеет хотя бы одно периодическое решение?

Вариант №2

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{tg}(-x + y), \\ y' &= 2y - 2\cos^x - x. \end{aligned}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему $x' = -xy^4 - 2x^3 - y$,

$$y' = 2x + 2x^2y^3 - y^7.$$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + b\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda + 2$?
4. Построить фазовой портрет системы $x' = 1 - 4x$, $y' = 2 - 3$.
5. При каких значениях параметров p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy =$

0 ограничены при всех $x \geq 0$?

Вариант №3

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$x' = 2 - (8 - 6x + 3y)^{1/3},$$

$$y' = 1 - \exp(2x + y).$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость системы

$$x' = -2x - 3y,$$

$$y' = x - y.$$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + a\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + b$?

$$x' = x - 3y,$$

4. Построить фазовой портрет системы $y' = 3x + y$.

5. При каких значениях параметров p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy =$

0 являются периодическими функциями от x ?

Вариант №4

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$x' = 2,5x \exp(x) - 3y + \sin x^2, \quad y' = 2x + y \exp(-y^2/2) - y^4 \cos x.$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость системы

$$x' = xy - x^3 + y,$$

$$y' = x^4 - x^2y - x^3.$$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $a\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b$?

$$x' + x + 5y = 0 \quad 4.$$

Построить фазовой портрет системы $y' - y - x = 0$.

5. Докажите, что среди всех решений уравнения $x + 2x' + 11x'' = \cos \omega t$ есть ровно одно периодическое.

Вопросы к коллоквиуму:

1. Решить уравнение $y = xy' - \frac{1}{2}y'^2$.
2. Решить систему $x' = 2x - y + z, y' = x + 2y - z, z' = x - y + 2z, (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$
3. Решите уравнение $(x - y + 1)dx + (-x + 2y)dy = 0$.
4. Решите систему $x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, y' = x + 2y$.
5. Решить уравнение $xy' + y = y'^2$.
6. Решить систему $x' = x + 2y, y' = x + 5\cos t$.
7. Решить уравнение $xy' - y = x^3$.
8. При каких значениях a асимптотически устойчиво нулевое решение системы $x' = ax - 2y + x^2, y' = x + y + xy$.
9. Решить уравнение $xy' - y = x^3y^2$.
10. Исследовать систему $x' = -x + y + xy, y' = x - 7y + x^2$ на устойчивость.
11. Решить уравнение $(2x + y + 5)dx + (x - 2y)dy = 0$.
12. Исследовать на устойчивость $x' = x - y + xy, y' = x + 2y + y^2$.
13. Найти особые решения уравнения $8(y')^3 - 12(y')^2 = 27(y - x)$.
14. Решить задачу Коши для системы $\frac{dx}{dt} = 4x - 5y, \frac{dy}{dt} = x, x(0) = 0, y(0) = 1$.
15. Каждая из функций семейства $y = Ce^x + 4$ является решением уравнения $(y')^2 - yy' + 4e^x = 0$. Найти особые решения этого уравнения.
16. Решить задачу Коши $x' = x + y, y' = 4y - 2x, x(0) = 0, y(0) = 1$.
17. Решить уравнение $(x - y)dx + (-x + 5y + 4)dy = 0$.
18. С помощью $V = x^2 + y^2$ исследовать систему $x' = y - x^3, y' = -x - 3y$ на устойчивость.
19. Решить уравнение $y'''' + y' = x$.
20. С помощью функции $V = x^2 + 2y^2$ исследовать на устойчивость тривиальное решение $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы $x' = -2y + x^2y^2, y' = x - 0,5y - 0,5x^3y$.
21. Определить тип особой точки уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{2x + y}$.

22. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы $x' = -2x + x^2 + y^2, y' = -x + 3y + 5x^2$
23. Найти особые решения уравнения $(y')^2 - 2xy^2 + y = 0$.
24. Найти область асимптотической устойчивости системы $x' = \ln(e + ax) - e^y, y' = bx + \operatorname{tg} y$.
25. Решить уравнение $y = 2xy' - y'^2$.
26. Найти область асимптотической устойчивости системы $x' = ax - y, y' = -x + by + x^2$.
27. Являются ли функции $x, |x|, 2x + 4\sqrt{x^2}$ линейно зависимыми.
28. Решить систему $x' = y + z, y' = x + z, z' = x + y$.
29. Найти общее решение уравнения $(2x^2)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$, зная два частных решения $y_1 = 2x, y_2 = (x + 1)^2$.
30. Решить уравнение $x \frac{\partial u}{\partial x} + 3y \frac{\partial u}{\partial y} + 5z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
31. Решить уравнение $y''' - 2y'' - 3y' = x + e^{-x}$.
32. Найти решение уравнения $2x \frac{\partial z}{\partial x} - 3y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, удовлетворяющее условию $z = 2x$ при $y = 1$.
33. Найти y_0, y_1, y_2 , если $y' = x^2 - y^2, y(0) = 0$.
34. Решить систему $x' = -x + y + z, y' = x - y + z, z' = x + y - z$.
35. Найти особое решение уравнения $y = x + 2y' - (y')^2$.
36. Решить задачу Коши $x' = 4x - 5y, y' = x, x(0) = 1, y(0) = 0$
37. Построить диф. уравнение семейства кривых $x^2 + c(x - 3y) + c^2 = 0$.
38. Решить задачу Коши $x' = x + 2y, y' = 4y + 2x, x(0) = 0, y(0) = 1$.
39. Найти линии, ортогональные линиям семейства окружностей $x^2 + y^2 = 2cx$.
40. Решить систему $x' = x - y, y' = y - x$.
41. Определить тип особой точки системы $x' = 2x - y, y' = x - 3y$.
42. Решить задачу Коши $y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} z = y^2 - x^2, z(0, y) = y^2$.
43. Решить задачу Коши $y'' - 4y' - 5y = x, y(0) = 1, y'(0) = 0$.
44. Установить тип особой точки системы $x' = 2x - 3y, y' = 4x + y$.
45. Решить задачу Коши $y'' + 4y = \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 1$.
46. Решить систему $x' = x - y - z, y' = x + y, z' = 3x + z, \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm i$.

47. Найти расстояние между нулями решений уравнения $y'' + 6xy = 0$ на $[6;15]$.
48. Решить систему $x' = y - 5\cos t, y' = 2x + y$.
49. Оценить количество нулей любого решения уравнения $y' + 5xy = 0$ на $[5;125]$.
50. Являются ли $\phi_1 = t^2 + 2xy, \phi_2 = y^2 - t^2x^2$ первыми интегралами системы уравнений $x' = -y, y' = \frac{y_2 - t}{x}$.
51. Найти решение уравнения $y'' + 2xy = 0$ в виде степенного ряда.
52. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы
53. $x' = -x + \alpha y + \beta z, y' = -\alpha x - y + \alpha z, z' = -\beta x - \alpha y - z$.
54. Решить уравнение $y'''' - y'' = x + 2$.
55. Найти область асимптотической устойчивости системы $x' = ax - y, y' = 2x + by$.
56. Решить уравнение $y'''' + y' = \cos x$.
57. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы $x' = -x + 2xy, y' = -y - 2xy$.

Примерный тест по дисциплине

1. Семейство линий $y = Cx^3$ является общим решением дифференциального уравнения:

1) $xy' = 3y$; 2) $y^2 + y'^2 = 1$; 3) $x^2y' - xy = yy'$; 4) $y' = 3y^{2/3}$; 5) $y = e^{xy/y}$.

2. Выражение $y^2 - 2 = Ce^{1/x}$ - общий интеграл дифференциального уравнения:

1) $xydx + (x+1)dy = 0$; 2) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$; 3) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$;

4) $xy' + y = y^2$; 5) $y' = 10^{x+y}$.

3. Дифференциальное уравнение является однородным:

1) $(x+2y-1)dx + xdy = 0$; 2) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$; 3) $(x+y)dx + (y-1)dy = 0$;

4) $(x^2+y)dx - xydy = 0$; 5) $(1-x)dx + (x+y)dy = 0$.

4. Функция $\mu(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}x_2 + 2y_2$ - интегрирующий множитель дифференциального

уравнения:

1) $(x^2 - y)dx + x(y+1)dy = 0$; 2) $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$; 3)

$(x^2 - y^2 + y)dx - xdy = 0$; 4) $xy^2(xy' + y) = 1$; 5) $(x^2 + 3\ln y)dx = xdy$.

5. Дифференциальное уравнение $(x+1)y'' = y + \sqrt{\quad}$ y имеет единственное решение при начальных условиях:

- 1) $x_0 = -1, y_0 < 0, y_0' - \text{любое}$; 2) $x_0 = -1, y_0 > 0, y_0' - \text{любое}$; 3) $x_0 \neq -1, y_0 = 0, y_0' = 1$; 4) $x_0 = -1, y_0 = -2, y_0' = 0$; 5) $x_0 = -1, y_0 = 0, y_0' = 0$.

6. Функция $y = 0,25x^2$ является особым решением дифференциального уравнения:

- 1) $y = 2xy' - 4y'^2$; 2) $y = xy' - y'^2$; 3) $y = -xy' + 4\sqrt{y'}$; 4) $xy' - y = \ln y'$; 5) $x = y^2 + y'$.

7. Уравнение $y'' - 2y' = 2e^x$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $y(1) = -1, y'(1) = 0$:

- 1) $y = (7-3x)e^{x-2}$; 2) $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$; 3) $y = e^{2x} - 3e^x - 1$; 4) $y = e^{-x} - e + x - 1$; 5) $y = -2x^2 + 4x + 1$.

8. Выражение $y = x^2e^x$ - частное решение (возможно более низкого порядка) дифференциального уравнения:

- 1) $y'' - 4y' + 5y = 0$; 2) $y^{IV} + 2y' + y = 0$; 3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

9. Система функций линейно зависима:

- 1) $x + 2, x - 2$; 2) $6x + 9, 8x + 12$; 3) $\sin x, \cos x$; 4) $1, x, x^2$; 5) e^x, e^{2x}, e^{3x} .

10. Уравнением Эйлера является:

- 1) $x^2y'' - 4y' + 6y = 0$; 2) $x^2y'' - 2y' - 3y = 0$; 3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; 4) $x^3y''' + x^2y' - y = 0$; 5) $(x-2)^2y'' - 3y' + 4y = 0$.

11. Функция $y = x^3$ является решением уравнения:

- 1) $x^2y'' - 4y' + 6y = 0$; 2) $x^2y'' - 2y' - 3y = 0$; 3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; 4) $x^3y''' + x^2y' - y = 0$; 5) $(x-2)^2y'' - 3y' + 4y = 0$.

12. Функция $f(x, y)$ не удовлетворяет условию Липшица по y на прямой $y = -x\sqrt{-1}$ $f(x, y) = x^2 - y^2$; 2) $f(x, y) = x + y$; 3) $f(x, y) = x^2 + y^2$; 4) $f(x, y) = 1 + x + y$; 5) $f(x, y) = 1 + x + y$.

Вопросы к коллоквиуму

1. Основные определения устойчивости. Устойчивость линейных систем. Примеры. 2 .Функции Ляпунова, их определения и условия знакоположительности и знакопеременности.
3. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости, и геометрическая интерпретация.
4. Теоремы Ляпунова и Четаева о неустойчивости.
5. Первый метод Ляпунова.
- 6 .Теорема об асимптотической устойчивости и неустойчивости со знакопостоянной производной.
7. Устойчивость установившихся вращательных движений твердого тела вокруг центра масс.
8. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия механических систем. 9 .Неустойчивость положения равновесия. Основные результаты.
- 10 .Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость положения равновесия механических систем. Примеры.
- 11 .Уравнения Рауса.
12. Стационарные движения.
- 13 .Условия устойчивости и асимптотической устойчивости стационарных движений.
- 14 .Стационарные движения тяжелого твердого тела и их устойчивость.
15. Стационарные вращательные движения симметричного спутника на круговой орбите и их устойчивость.

Экзаменационные вопросы

1. Укажите достаточные условия для существования в целом решения дифференциального уравнения.
2. Сформулируйте определения устойчивости, равномерной устойчивости и неустойчивости по Ляпунову решения нормальной системы.

3. Что такое присоединенный полином в критерии Гурвица?
4. Сформулировать критерий Гурвица.
5. Что такое годограф Михайлова?
6. Что такое матричное уравнение Ляпунова ?
7. Что такое функция Ляпунова ?
8. Сформулировать теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.
9. Сформулировать теорему Четаева о неустойчивости.
10. Сформулировать теорему о критериях устойчивости по первому приближению.
11. Основные понятия теории устойчивости.
12. Неравенство Важевского.
13. Общие свойства решений линейных нормальных систем
14. Устойчивость линейных дифференциальных систем.
15. Критерий Гурвица.
16. Критерий Михайлова.
17. Характеристические показатели функций..
18. Достаточное условие асимптотической устойчивости линейной системы.
19. Неравенство Ляпунова.
20. Приводимые системы. Теорема Еругина.
21. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.
22. Теорема Четаева о неустойчивости.
23. Критерий устойчивости по первому приближению.
24. Нормальные системы линейных ОДУ с высокочастотными коэффициентами. .
25. Устойчивость нормальных систем линейных ОДУ с высокочастотными слагаемыми.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

8.1. Основная литература.

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений: пер. с

- англ. / Р. Беллман. – 2-е изд., стер. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 216 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – 3-е изд., стер. – М.: Лань, 2008. – 480 с. – (Серия «Учебники для вузов. Специальная литература»).
 3. Дьяконов В. П. MATLAB R2006/2007/2008. Simulink 5/6/7. Основы применения / В. П. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2008. – 800 с. – (Серия «Библиотека профессионала»).
 4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. – 3-е изд. – М.: Лань, 2010. – 432 с.
 5. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. - Изд. 7-е, стереотип. - М. : Гос. изд-во физ.-мат., 1958. - 467 с. - Допущено в качестве учебника для гос. ун-тов. - 0-0.
 6. Демидович, Борис Павлович. Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Демидович, Борис Павлович, В. П. Моденов. - Изд. 3-е, стер. - СПб. [и др.] : Лань, 2008. - 275,[13] с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-58114-0677-7 : 253-11.
 7. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения : учебник / Л. Э. Эльсгольц. - 6-е изд. - М. :КомКнига, 2006. - 309 с. - (Классический учебник МГУ). - Допущено МО. - ISBN 5-484-00409-8 : 134-86.
 8. Пантелеев А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, К.А. Рыбаков. — Электрон. текстовые данные. — М. : Логос, 2010. — 383 с. — 5-98704-465-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/9280.html>

8.2. Дополнительная литература.

1. Тихонов, Александр Николаевич. Дифференциальные уравнения : [учеб. для физ. специальностей и специальности "Прикладная математика"] / Тихонов, Александр Николаевич ; А.Б.Васильева, А.Г.Свешников; под ред. А.Н.Тихонова и др.; [Моск. гос. унт им. М.В.Ломоносова]. - 4-е изд., стер. - М. :Физматлит, 2005, 2002. - 253 с. : ил. ; 22 см. - (Курс высшей математики и математической физики. вып.6) (Классический университетский учебник). - Библиогр.: с. 249-250. - Предм. указ.: с. 251-253. - ISBN 59221-0134-X : 126-28.
2. Немыцкий, Виктор Владимирович. Качественная теория дифференциальных уравнений / Немыцкий, Виктор Владимирович, В. В. Степанов. - 3-е изд., испр. - М. :Едиториал УРСС, 2004. - 550 с. - ISBN 5-354-00924-3 : 215-27.

3. Дергачев В.М. Дифференциальные и разностные уравнения [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.М. Дергачев, С.Н. Лелявин. — Электрон. текстовые данные. — М. : Русайнс, 2016. — 96 с. — 978-5-4365-0764-4. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/61608.html>
- 4) Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека
2. http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12 – Единое окно доступа к электронным ресурсам
3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer
4. <http://edu.dgu.ru/> - Образовательный сервер ДГУ 5. Moodle[Электронный ресурс]: система виртуального обучения: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: <http://moodle.dgu.ru/> **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Учебная программа по «Теории устойчивости» распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

При осуществлении образовательного процесса по данной дисциплине рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Университет обладает достаточной базой оборудованных аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины избранные главы математического анализа. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами. В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.