

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
**Геометрия**

**Кафедра:** дифференциальных уравнений и функционального анализа  
**Факультет:** математики и компьютерных наук

Образовательная программа  
44.03.01 – Педагогическое образование

Профили подготовки  
«Математика»

Уровень высшего образования:  
бакалавриат

Форма обучения:  
заочная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП,  
предметно-содержательный модуль ОПОП

Махачкала 2021


Рабочая программа дисциплины «Геометрия» составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (уровень бакалавриата) от 22.02.2018 №121.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,  
Рагимханов В.Р., к. ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:  
на заседании кафедры ДУ и ФА от 31.05.2021 г., протокол № 10

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.  
(подпись)

на заседании Методической комиссии факультета М и КН от 27.06.2021г.,  
протокол № 6.

Председатель  Бейбалаев В.Д.  
(подпись)

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «\_09\_» июля 2021г.

Начальник УМУ  Гасангаджиева А.Г.

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Геометрия» входит в обязательную часть образовательной программы бакалавриата по направлению **44.03.01 Педагогическое образование**.

Дисциплина реализуется на *факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ*.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с формированием и развитием у студентов профессиональных и специальных компетенций, позволяющих им на базе освоенных теоретических и практических основ математического аппарата осуществлять профессиональную деятельность.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:  
*универсальная компетенция (УК): УК-1;*  
*профессиональная компетенция (ПК): ПК-2.*

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: *контрольной работа и коллоквиума, промежуточный контроль в форме зачета и экзамена.*

Объем дисциплины 8 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)
	Всего	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации				
3	144	12		12			116+4	Зачет
4	144	10		10			115+9	Экзамен
Итого	288	22		22			231+13	

### 1. Цели освоения дисциплины

Основной целью освоения дисциплины «Геометрия» является формирование готовности студентов к профессиональной деятельности, к преподаванию школьного курса математики, в частности, его геометрической составляющей, развитие у студентов компетенций, определенных федеральным образовательным стандартом высшего образования для бакалавров по направлению подготовки 44.03.01 – Педагогическое образование.

Данная дисциплина призвана обеспечить будущих учителей математики глубокими знаниями по основным разделам геометрии как науки, представляющим собой развитие и углубление основных тематических направлений школьного курса геометрии.

Задачи освоения данной дисциплины:

- обеспечение знаниями в области геометрии в тех её разделах и в тех объёмах, которых будет достаточно для решения будущим учителем математики педагогических и научно-методических задач по преподаванию курса геометрии, как в базовой, так и в профильной школе;
- обеспечение знаниями в области истории развития геометрии и формирования её основных методов, включая основной метод всей математической науки – аксиоматический метод;
- формирование способности развивать у своих будущих учеников пространственного представления, логики мышления, интереса к изучению математических наук, формированию у них начальных представлений о разделах высшей математики, о сферах её применения в самых разнообразных областях науки и практики;
- систематизация и углубление знаний элементарной геометрии, освоение и систематизация основных методов решения геометрических задач;
- знакомство с основными направлениями современной геометрии.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Геометрия» входит в обязательную часть образовательной программы по направлению 44.03.01 – Педагогическое образование.

Классическая ветвь математики – геометрия – является разделом современной математики, без знания которой невозможно представить квалифицированного бакалавра–математика.

Современные геометрия используются как для решения теоретических вопросов математики, так и для решения прикладных математических задач.

Всё это показывает важность и актуальность изучения геометрии для подготовки квалифицированных бакалавров по направлению **44.03.01–Педагогическое образование**.

Для освоения дисциплины Геометрия студенты используют знания, умения, навыки, сформированные в процессе изучения математики, геометрии в общеобразовательной школе, а также предполагает знания, умения и навыки, приобретенные при освоении дисциплин Аналитическая геометрия, Алгебра и Математический анализ.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
УК-1. Способен	УК-1.1. Анализирует задачу, демонстрируя	Знает: основные принципы и методы	Конспектирование и проработка

<p>осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</p>	<p>знание особенностей системного, критического и логического мышления; применяет логические формы и процедуры; выделяет этапы ее решения.</p>	<p>критического анализа. Умеет: получать новые знания на основе анализа, синтеза; применять логические формы и процедуры; реконструировать и анализировать план построения собственной или чужой мысли; выделять его состав и структуру; Владеет: способностью исследовать проблемы, связанные с профессиональной деятельностью, с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; сознательно планировать, регулировать и контролировать свое мышление; способностью оценивать логическую правильность мыслей; готовностью применять системный подход при принятии решений в профессиональной деятельности.</p>	<p>лекционного материала. Участие в практических занятиях. Самостоятельная работа.</p>
	<p>УК-1.2. Находит и критически анализирует источники информации; сопоставляет разные источники с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений; выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи.</p>	<p>Знает: методы поиска источников информации и анализа проблемной ситуации. Умеет: собирать информацию по научным проблемам, относящимся к профессиональной области; осуществлять поиск решений проблемы; сравнивать преимущества разных вариантов решения проблемы и оценивать их риски.</p>	
	<p>УК-1.3. Рассматривает</p>	<p>Владеет: способностью выявлять научные</p>	

	разные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски.	проблемы и выбирать адекватные методов для их решения; способностью исследовать проблемы профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности.	
ПК-2 Способен применять предметные знания при реализации образовательного процесса	ПК-2.1. Способен определять содержание математического образования школьников, адекватное ожидаемым результатам, уровню развития современной математики и возрастным особенностям обучающихся	Знает: требования к организации образовательного процесса по математике; структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного предмета «Математика»	Конспектирование и проработка лекционного материала. Участие в практических занятиях. Самостоятельная работа.
	ПК-2.2. Проектирует элементы образовательной программы, рабочую программу учителя по математике	Умеет: формулировать дидактические цели и задачи обучения математике и реализовывать их в образовательном процессе; планировать и реализовывать различные организационные средства и формы в процессе обучения математики (урок, экскурсию, домашнюю, внеклассную и внеурочную работу); обосновывать выбор методов обучения математике и образовательных технологий, исходя из особенностей содержания учебного материала, возраста и образовательных потребностей	

		обучаемых.	
	ПК-2.3. Способен осуществлять обучение учебному предмету на основе использования предметных методик и применения современных образовательных технологий	Владеет: предметным содержанием математики; умениями отбора вариативного содержания с учетом взаимосвязи урочной и внеурочной форм обучения математике; умениями по планированию и проектированию образовательного процесса; способностью применять различные методы обучения и современные образовательные технологии в образовательном процессе в области математики	

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет зачетных единиц 8, академических часов 288.

4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			всего	лекции	практ. занятия	Контр. сам. раб.		
<i>Третий семестр</i>								
<b>Модуль 1. Векторы и их свойства</b>								
<i>Всего по модулю 1</i>	<b>3</b>		<b>36</b>	<b>3</b>	<b>3</b>		<b>30</b>	коллоквиум
1. Векторы на плоскости и в пространстве и их координаты.	3		12	1	1		10	Устный опрос, письменная контрольная работа
2. Скалярное произведение векторов.	3		12	1	1		10	
3. Векторное и смешанное произведение векторов в пространстве.	3		12	1	1		10	
<b>Модуль 2. Координаты точек на плоскости и в пространстве</b>								
<i>Всего по модулю 2</i>	<b>3</b>		<b>36</b>	<b>3</b>	<b>3</b>		<b>30</b>	коллоквиум
4. Аффинные и прямоугольные	3		12	1	1		10	Устный опрос, письменная

декартовы координаты точек на плоскости и в пространстве								контрольная работа
5. Уравнения линий и поверхностей	3		12	1	1		10	
6. Применение свойств координат точек к решению задач элементарной геометрии	3		12	1	1		10	
<b>Модуль 3. Алгебраические линии первого и второго порядков на плоскости</b>								
<b>Всего по модулю 3</b>	<b>3</b>		<b>36</b>	<b>3</b>	<b>3</b>		<b>30</b>	коллоквиум
7. Уравнение прямой в прямоугольной декартовой системе координат	3		12	1	1		10	Устный опрос, письменная контрольная работа
8. Эллипс, гипербола и парабола	3		12	1	1		10	
9. Классификация кривых второго порядка	3		12	1	1		10	
<b>Модуль 4. Плоскости, прямые и поверхности второго порядка в пространстве</b>								
<b>Всего по модулю 4</b>	<b>3</b>		<b>36</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>26</b>	коллоквиум
10. Уравнение плоскости в пространстве	3		12	1	1		8	Устный опрос, письменная контрольная работа
11. Метод сечений, цилиндрические и конические поверхности, поверхности вращения	3		12	1	1		8	
12. Эллипсоиды, гиперboloиды и параболоиды	3		12	1	1		10	
Подготовка к зачету	3					4		зачет
<b>ИТОГО за 3 семестр</b>	<b>3</b>		<b>144</b>	<b>12</b>	<b>12</b>	<b>4</b>	<b>116</b>	<b>зачет</b>
<i>Четвертый семестр</i>								
<b>Модуль 5. Геометрические преобразования</b>								
<b>Всего по модулю 5</b>	<b>4</b>		<b>36</b>	<b>3</b>	<b>3</b>		<b>30</b>	коллоквиум
13. Движения плоскости и трехмерного пространства	4		12	1	1		10	Устный опрос, письменная контрольная работа
14. Подобия и инверсии плоскости	4		12	1	1		10	
15. Аффинные преобразования	4		12	1	1		10	
<b>Модуль 6. Геометрические построения на плоскости</b>								
<b>Всего по модулю 6</b>	<b>4</b>		<b>36</b>	<b>3</b>	<b>3</b>		<b>30</b>	коллоквиум
16. Методы решения задач на построение	4		12	1	1		10	Устный опрос, письменная контрольная работа
17. Алгебраический метод. Разрешимость задач на построение циркулем и линейкой	4		12	1	1		10	
18. Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой	4		12	1	1		10	
<b>Модуль 7. Метод изображений</b>								
<b>Всего по модулю 7</b>	<b>4</b>		<b>36</b>	<b>3</b>	<b>3</b>		<b>30</b>	коллоквиум
19. Изображение плоских фигур при параллельном	4		12	1	1		10	Устный опрос, письменная



проектировании								контрольная работа
20. Изображение цилиндра, конуса и шара	4		12	1	1		10	
21. Сечения многогранников	4		12	1	1		10	
<b>Модуль 8. Основания геометрии</b>								
<i>Всего по модулю 8</i>	4		<b>36</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>9</b>	<b>25</b>	коллоквиум
22. Аксиоматика евклидова пространства	4		12	1	1		10	Устный опрос, письменная контрольная работа
23. Аксиома параллельности и утверждения, ей эквивалентные	4		15				15	
Подготовка к экзамену	4					9		экзамен
<b>ИТОГО за 4 семестр</b>	<b>4</b>		<b>144</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>115</b>	<b>экзамен</b>
<b>ИТОГО</b>	<b>3-4</b>		<b>288</b>	<b>22</b>	<b>22</b>	<b>4+9</b>	<b>231</b>	<b>экзамен</b>

### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

#### 4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

##### *Третий семестр*

#### **Модуль 1. Векторы и их свойства**

##### ***Тема 1. Векторы на плоскости и в пространстве и их координаты.***

Понятие вектора и сопутствующие понятия. Откладывание вектора от точки. Сложение векторов и свойства сложения. Вычитание векторов. Умножение вектора на число (скаляр), свойства этой операции. Признак коллинеарности двух векторов. Теорема о разложении вектора на плоскости в линейную комбинацию векторов. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Признак коллинеарности двух векторов – вторая формулировка. Координаты вектора на плоскости. Теорема о координатах линейной комбинации векторов. Признак коллинеарности двух векторов в координатах. Проекция вектора на прямую. Численное значение проекции вектора на ось. Ортонормированный базис, направляющие косинусы вектора.

##### ***Тема 2. Скалярное произведение векторов***

Скалярное произведение двух векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения двух векторов в ортонормированных (декартовых) координатах. Признак перпендикулярности двух векторов в ортонормированных (декартовых) координатах.

Понятие векторного пространства и евклидова векторного пространства (аксиоматический подход). Основные свойства векторных пространств.

##### ***Тема 3. Векторное и смешанное произведение векторов в пространстве***

Теорема о разложении вектора в пространстве в линейную комбинацию векторов. Признак компланарности трёх векторов. Координаты вектора в пространстве. Векторное произведение двух векторов: определение; свойства. Смешанное произведение трёх векторов: определение; свойства; геометрический смысл. Выражение векторного произведения двух векторов в дек. координатах. Выражение смешанного произведения трёх векторов в дек. координатах. Условие компланарности трёх векторов в декартовых координатах. Вычисление объёма тетраэдра в декартовых координатах.

## **Модуль 2. Координаты точек на плоскости и в пространстве**

### ***Тема 4. Аффинные и прямоугольные декартовы координаты точек на плоскости и в пространстве***

Аффинная система координат в пространстве. Нахождение координат вектора по координатам его начала и конца. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Декартова (ортонормированная) система координат. Преобразование аффинной системы координат в пространстве; матрица перехода. Ориентация пространства.

Переход от ортонормированной системы координат к ортонормированной.

### ***Тема 5. Уравнения линий и поверхностей***

Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами.

Простейшие задачи аналитической геометрии. Уравнения различных линий и поверхностей.

### ***Тема 6. Применение свойств координат точек к решению задач элементарной геометрии***

Применение свойств координат точек к решению задач элементарной геометрии.

## **Модуль 3. Алгебраические линии первого и второго порядков на плоскости**

### ***Тема 7. Уравнение прямой в прямоугольной декартовой системе координат***

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой в отрезках. Параметрические уравнения прямой. Каноническое уравнение прямой. Прямые как алгебраические линии первого порядка. Общее уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами.

Задание полуплоскости.

### ***Тема 8. Эллипс, гипербола и парабола***

Эллипс: определение; основные элементы, вывод канонического уравнения; свойства.

Гипербола: определение; основные элементы, вывод канонического уравнения; свойства. Парабола: определение; основные элементы, вывод канонического уравнения; свойства.

### ***Тема 9. Классификация кривых второго порядка***

Приведение общего уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду. Теорема, дающая описание всех линий 2-го порядка на плоскости. Пример приведения общего уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду.

## **Модуль 4. Плоскости, прямые и поверхности второго порядка в пространстве**

### ***Тема 10. Уравнение плоскости в пространстве***

Параметрические уравнения плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум неколлинеарным векторам. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через две данные точки параллельно данному вектору. Общее уравнение плоскости. Плоскости как алгебраические поверхности первого порядка. Условие коллинеарности вектора и плоскости. Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения плоскости в декартовой системе координат. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Расстояние от точки до плоскости в

декартовой системе координат. Угол между двумя плоскостями в декартовой системе координат. Условие перпендикулярности двух плоскостей в декартовой системе координат. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Взаимное расположение трёх плоскостей в пространстве

### ***Тема 11. Метод сечений, цилиндрические и конические поверхности, поверхности вращения***

Цилиндрические поверхности. Конические поверхности. Поверхности вращения. Метод сечений в исследовании поверхностей. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду (выбор специальной системы координат). Описание всех поверхностей второго порядка.

### ***Тема 12. Эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды***

Эллипсоид. Однополостный гиперболоид, его прямолинейные образующие. Двуполостный гиперболоид. Эллиптический параболоид. Гиперболический параболоид, его прямолинейные образующие.

## *Четвертый семестр*

## **Модуль 5. Геометрические преобразования**

### ***Тема 13. Движения плоскости и трехмерного пространства***

Понятие преобразования множества, композиция преобразований и обращение преобразования. Понятие группы, её свойства. Группа всех преобразований плоскости. Параллельный перенос, выражение его в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение). Осевая симметрия, выражение её в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение). Поворот вокруг точки, выражение его в координатах, определяемость

парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение). Центральная симметрия, выражение её в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение). Скользящая симметрия, её выражение в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение). Движения (перемещения) плоскости и их свойства. Движения 1-го рода и движения 2-го рода. Аналитическое выражение движения. Теорема Шаля о классификации движений 1-го рода. Теорема о классификации движений 2-го рода. Группа всех движений плоскости и её подгруппы. Группы симметрий геометрических фигур.

#### ***Тема 14. Подобия и инверсии плоскости***

Преобразования подобия и гомотетия. Аналитическое выражение преобразования подобия и гомотетии. Подобие фигур. Группа преобразований подобия. Применение преобразований подобия и гомотетии к решению задач.

#### ***Тема 15. Аффинные преобразования***

Аффинные преобразования плоскости и их свойства. Аналитическое выражение аффинных преобразований плоскости. Группа аффинных преобразований. Аффинная эквивалентность фигур. Групповой подход к геометрии. Эрлангенская программа Ф.Клейна. Приложение преобразований плоскости к решению задач на построение (общая логическая схема).

### **Модуль 6. Геометрические построения на плоскости**

#### ***Тема 16. Методы решения задач на построение***

Формулировка задачи на построение; понятие её решения. Система аксиом построения с помощью циркуля и линейки. Простейшие построения на плоскости с помощью циркуля и линейки. Основные задачи на построение. Общая схема решения задачи на построение. Обзор методов решения задач на построение. Метод пересечений для решения задач на построение. Задачи на построение точек. Задачи на построение прямых, лучей и отрезков. Задачи на построение треугольников. Задачи на построение четырехугольников. Задачи на построение окружностей. Построение фигур по данным точкам. Построение отрезков, задаваемых простейшими формулами. Однородные функции и построение отрезков. Построение отрезков циркулем и линейкой. Связи между различными видами отрезков.

Примеры отрезков, результат построения которых зависит от выбора единицы масштаба.

#### ***Тема 17. Алгебраический метод. Разрешимость задач на построение циркулем и линейкой***

Сущность алгебраического метода и образцы задач, решаемых им. Построение правильных многоугольников. Алгебраический метод: задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой

#### ***Тема 18. Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой***

Алгебраический метод: задачи на построение, не разрешимые циркулем и линейкой (об удвоении куба, о трисекции угла, о квадратуре круга). Понятие о решении задач на построение иными средствами.

## Модуль 7. Метод изображений

### **Тема 19. Изображение плоских фигур при параллельном проектировании**

Постановка задачи. Многообразие методов изображений. Параллельное проектирование и его свойства. Центральное проектирование и его свойства. Изображение треугольника при параллельном проектировании. Изображение параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции и правильного шестиугольника при параллельном проектировании. Изображение окружности при ортогональном проектировании: лемма о сжатии окружности, теорема и следствие. .

### **Тема 20. Изображение цилиндра, конуса и шара**

Построение эллипса по двум сопряженным диаметрам. Теорема Польке-Шварца об изображении пространственного четырёхугольника (тетраэдра) при параллельном проектировании. Теорема об определяемости изображения пространственной фигуры изображением четырёх её точек, не лежащих в одной плоскости. Изображение основных пространственных фигур: призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара

### **Тема 21. Сечения многогранников**

Понятие многогранника и выпуклого многогранника. Первый признак выпуклого многогранника. Второй признак выпуклого многогранника. Теорема Эйлера для выпуклых многогранников. Правильные многогранники: существование не более пяти типов правильных многогранников. Правильные многогранники: существование пяти типов

правильных многогранников (пять платоновых тел). Группы симметрий правильных многогранников. Сечения многогранников

## Модуль 8. Основания геометрии

### **Тема 22. Аксиоматика евклидова пространства**

Понятие об аксиоматическом методе: первоначальные понятия, аксиомы, теоремы. Интерпретация системы аксиом. Изоморфизм структур. Непротиворечивость, полнота, категоричность и независимость системы аксиом.

### **Тема 23. Аксиома параллельности и утверждения, ей эквивалентные**

Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика системы Евклида. Пятый постулат Евклида, история его доказательства, и его эквиваленты.

Эквивалентность аксиомы параллельности и пятого постулата Евклида. Эквивалентность аксиомы параллельности Евклида и утверждения о том, что сумма мер внутренних углов любого треугольника равна  $2d$ .

### **4.3.2. Содержание лабораторно-практических занятий по дисциплине**

#### *Третий семестр*

#### **Модуль 1. Векторы и их свойства**

##### ***Тема 1. Векторы на плоскости и в пространстве и их координаты.***

Понятие вектора и сопутствующие понятия. Откладывание вектора от точки. Сложение векторов и свойства сложения. Вычитание векторов. Умножение вектора на число (скаляр), свойства этой операции. Признак коллинеарности двух векторов. Теорема о разложении вектора на плоскости в линейную комбинацию векторов. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Признак коллинеарности двух векторов – вторая формулировка. Координаты вектора на плоскости. Теорема о координатах линейной комбинации векторов. Признак коллинеарности двух векторов в координатах. Проекция вектора на прямую. Численное значение проекции вектора на ось. Ортонормированный базис, направляющие косинусы вектора.

##### ***Тема 2. Скалярное произведение векторов***

Скалярное произведение двух векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения двух векторов в ортонормированных (декартовых) координатах. Признак перпендикулярности двух векторов в ортонормированных (декартовых) координатах.

Понятие векторного пространства и евклидова векторного пространства (аксиоматический подход). Основные свойства векторных пространств.

##### ***Тема 3. Векторное и смешанное произведение векторов в пространстве***

Теорема о разложении вектора в пространстве в линейную комбинацию векторов. Признак компланарности трёх векторов. Координаты вектора в пространстве. Векторное произведение двух векторов: определение; свойства. Смешанное произведение трёх векторов: определение; свойства; геометрический смысл. Выражение векторного произведения двух векторов в дек. координатах. Выражение смешанного произведения трёх векторов в дек. координатах. Условие компланарности трёх векторов в декартовых координатах. Вычисление объёма тетраэдра в декартовых координатах.

#### **Модуль 2. Координаты точек на плоскости и в пространстве**

##### ***Тема 4. Аффинные и прямоугольные декартовы координаты точек на плоскости и в пространстве***

Аффинная система координат в пространстве. Нахождение координат вектора по координатам его начала и конца. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Декартова (ортонормированная) система координат.

Преобразование аффинной системы координат в пространстве; матрица перехода. Ориентация пространства.

Переход от ортонормированной системы координат к ортонормированной.

### ***Тема 5. Уравнения линий и поверхностей***

Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами.

Простейшие задачи аналитической геометрии. Уравнения различных линий и поверхностей.

### ***Тема 6. Применение свойств координат точек к решению задач элементарной геометрии***

Применение свойств координат точек к решению задач элементарной геометрии.

## **Модуль 3. Алгебраические линии первого и второго порядков на плоскости**

### ***Тема 7. Уравнение прямой в прямоугольной декартовой системе координат***

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой в отрезках. Параметрические уравнения прямой. Каноническое уравнение прямой. Прямые как алгебраические линии первого порядка. Общее уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами.

Задание полуплоскости.

### ***Тема 8. Эллипс, гипербола и парабола***

Эллипс: определение; основные элементы, вывод канонического уравнения; свойства. Гипербола: определение; основные элементы, вывод канонического уравнения; свойства. Парабола: определение; основные элементы, вывод канонического уравнения; свойства.

### ***Тема 9. Классификация кривых второго порядка***

Приведение общего уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду. Теорема, дающая описание всех линий 2-го порядка на плоскости. Пример приведения общего уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду.

## **Модуль 4. Плоскости, прямые и поверхности второго порядка в пространстве**

### ***Тема 10. Уравнение плоскости в пространстве***

Параметрические уравнения плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум неколлинеарным векторам. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через две данные точки параллельно данному вектору. Общее уравнение плоскости. Плоскости как алгебраические поверхности первого порядка. Условие коллинеарности вектора и плоскости. Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения плоскости в декартовой системе координат. Уравнение плоскости,

проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Расстояние от точки до плоскости в декартовой системе координат. Угол между двумя плоскостями в декартовой системе координат. Условие перпендикулярности двух плоскостей в декартовой системе координат. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Взаимное расположение трёх плоскостей в пространстве

### ***Тема 11. Метод сечений, цилиндрические и конические поверхности, поверхности вращения***

Цилиндрические поверхности. Конические поверхности. Поверхности вращения. Метод сечений в исследовании поверхностей. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду (выбор специальной системы координат). Описание всех поверхностей второго порядка.

### ***Тема 12. Эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды***

Эллипсоид. Однополостный гиперболоид, его прямолинейные образующие. Двуполостный гиперболоид. Эллиптический параболоид. Гиперболический параболоид, его прямолинейные образующие.

## *Четвертый семестр*

### **Модуль 5. Геометрические преобразования**

### ***Тема 13. Движения плоскости и трехмерного пространства***

Понятие преобразования множества, композиция преобразований и обращение преобразования. Понятие группы, её свойства. Группа всех преобразований плоскости. Параллельный перенос, выражение его в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение). Осевая симметрия, выражение её в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение). Поворот вокруг точки, выражение его в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение). Центральная симметрия, выражение её в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение). Скользящая симметрия, её выражение в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение). Движения (перемещения) плоскости и их свойства. Движения 1-го рода и движения 2-го рода. Аналитическое выражение движения. Теорема Шаля о классификации движений 1-го рода. Теорема о классификации движений 2-го рода. Группа всех движений плоскости и её подгруппы. Группы симметрий геометрических фигур.

### ***Тема 14. Подобия и инверсии плоскости***

Преобразования подобия и гомотетия. Аналитическое выражение преобразования подобия и гомотетии. Подобие фигур. Группа преобразований подобия. Применение преобразований подобия и гомотетии к решению задач.



### ***Тема 15. Аффинные преобразования***

Аффинные преобразования плоскости и их свойства. Аналитическое выражение аффинных преобразований плоскости. Группа аффинных преобразований. Аффинная эквивалентность фигур. Групповой подход к геометрии. Эрлангенская программа Ф.Клейна. Приложение преобразований плоскости к решению задач на построение (общая логическая схема).

## **Модуль 6. Геометрические построения на плоскости**

### ***Тема 16. Методы решения задач на построение***

Формулировка задачи на построение; понятие её решения. Система аксиом построения с помощью циркуля и линейки. Простейшие построения на плоскости с помощью циркуля и линейки. Основные задачи на построение. Общая схема решения задачи на построение. Обзор методов решения задач на построение. Метод пересечений для решения задач на построение. Задачи на построение точек. Задачи на построение прямых, лучей и отрезков. Задачи на построение треугольников. Задачи на построение четырехугольников. Задачи на построение окружностей. Построение фигур по данным точкам. Построение отрезков, задаваемых простейшими формулами. Однородные функции и построение отрезков. Построение отрезков циркулем и линейкой. Связи между различными видами отрезков.

Примеры отрезков, результат построения которых зависит от выбора единицы масштаба.

### ***Тема 17. Алгебраический метод. Разрешимость задач на построение циркулем и линейкой***

Сущность алгебраического метода и образцы задач, решаемых им. Построение правильных многоугольников. Алгебраический метод: задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой

### ***Тема 18. Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой***

Алгебраический метод: задачи на построение, не разрешимые циркулем и линейкой (об удвоении куба, о трисекции угла, о квадратуре круга). Понятие о решении задач на построение иными средствами.

## **Модуль 7. Метод изображений**

### ***Тема 19. Изображение плоских фигур при параллельном проектировании***

Постановка задачи. Многообразие методов изображений. Параллельное проектирование и его свойства. Центральное проектирование и его свойства. Изображение треугольника при параллельном проектировании. Изображение параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции и правильного шестиугольника при параллельном проектировании. Изображение окружности при ортогональном проектировании: лемма о сжатии окружности, теорема и следствие. .

### ***Тема 20. Изображение цилиндра, конуса и шара***

Построение эллипса по двум сопряженным диаметрам. Теорема Польке-Шварца об изображении пространственного четырёхугольника (тетраэдра) при параллельном проектировании. Теорема об определяемости изображения пространственной фигуры изображением четырёх её точек, не лежащих в одной плоскости. Изображение основных пространственных фигур: призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара

### ***Тема 21. Сечения многогранников***

Понятие многогранника и выпуклого многогранника. Первый признак выпуклого многогранника. Второй признак выпуклого многогранника. Теорема Эйлера для выпуклых многогранников. Правильные многогранники: существование не более пяти типов правильных многогранников. Правильные многогранники: существование пяти типов

правильных многогранников (пять платоновых тел). Группы симметрий правильных многогранников. Сечения многогранников

## **Модуль 8. Основания геометрии**

### ***Тема 22. Аксиоматика евклидова пространства***

Понятие об аксиоматическом методе: первоначальные понятия, аксиомы, теоремы. Интерпретация системы аксиом. Изоморфизм структур. Непротиворечивость, полнота, категоричность и независимость системы аксиом.

### ***Тема 23. Аксиома параллельности и утверждения, ей эквивалентные***

Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика системы Евклида. Пятый постулат Евклида, история его доказательства, и его эквиваленты. Эквивалентность аксиомы параллельности и пятого постулата Евклида. Эквивалентность аксиомы параллельности Евклида и утверждения о том, что сумма мер внутренних углов любого треугольника равна  $2d$ . Система аксиом Гильберта. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Примеры доказательства некоторых теорем. Непротиворечивость и полнота системы аксиом Вейля. Система аксиом школьного курса геометрии

## **5. Образовательные технологии**

В основе преподавания дисциплины «Геометрия» лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

Важную роль при освоении дисциплины играет самостоятельная работа студентов.

Самостоятельная работа способствует:

- углублению и расширению знаний;
- формированию интереса к познавательной деятельности;
- овладению приёмами процесса познания;
- развитию познавательных способностей.

К самостоятельной работе относятся:

- самостоятельная работа на аудиторных занятиях (лекциях, практических занятиях);
- внеаудиторная самостоятельная работа.

В процессе обучения предусмотрены следующие виды самостоятельной работы обучающегося:

- Работа с конспектами лекций;
- Проработка пройденных лекционных материалов по конспекту лекций, учебникам и пособиям в соответствии с вопросами, предложенными преподавателем;
- Проработка дополнительных тем, не вошедших в лекции, но обязательных согласно учебной программе модуля;
- Самостоятельное решение сформулированных задач по основным разделам курса;
- Подготовка к практическим и семинарским занятиям;
- Изучение литературы;
- Подготовка к текущему и промежуточному контролю знаний;
- Выполнение контрольных работ;

### **Вопросы для самостоятельной работы**

1. Группа аффинных преобразований.
2. Аффинная эквивалентность фигур.
3. Групповой подход к геометрии.
4. Эрлангенская программа Ф.Клейна.
5. Приложение преобразований плоскости к решению задач на построение (общая логическая схема).
6. Аффинные преобразования пространства.
7. Движения пространства и их свойства, определяемость парой ортонормированных реперов.
8. Движения 1-го рода и движения 2-го рода.
9. Примеры движений пространства: параллельный перенос, симметрия (отражение) относительно плоскости, скользящая симметрия, поворот вокруг прямой, винтовое движение, поворотное отражение.
10. Описание (классификация) всех движений пространства.
11. Понятие  $n$ -мерного векторного (линейного) пространства и его свойства.

12. Базис и размерность векторного пространства.
13. Понятие  $n$ -мерного евклидова векторного (линейного) пространства и его свойства.
14. Ортонормированный базис евклидова векторного пространства.
15. Понятие об  $n$ -мерном аффинном точечном пространстве  $A^n$  и  $n$ -мерном евклидовом точечном пространстве  $E^n$ .
16. Вычисление расстояний и углов в  $E^n$ .
17.  $k$ -мерные плоскости и гиперплоскости в  $E^n$ .
18. Аффинные преобразования пространства  $A^n$  и движения пространства  $E^n$
19. Непротиворечивость системы аксиом геометрии Лобачевского.
20. Модели Кэли-Клейна, Пуанкаре, Бельтрами.
21. Другие аксиоматики евклидовой геометрии.
22. Система А.В.Погорелова построения школьного курса геометрии.
23. Система Л.С.Атанасяна построения школьного курса геометрии.
24. Система А.Д.Александрова построения школьного курса геометрии.
25. Измерение длин отрезков в системе аксиом Вейля.
26. Измерение длин отрезков в системе аксиом Гильберта.
27. Понятие многоугольника и его площади.
28. Лемма о площади треугольника. Лемма о площади многоугольника.
29. Теорема существования площади многоугольника.
30. Единственность измерения площади прямоугольника.
31. Единственность измерения площади треугольника.
32. Теорема о единственности измерения площади многоугольника.
33. Площадь произвольной фигуры.
34. Равновеликие и равносторонние многоугольники.
35. Проблема измерения объема тел.

## **7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

### **7.1. Типовые контрольные задания**

#### **7.1.1. Примерные вопросы к коллоквиумам**

##### **Модуль 1: «Векторы и их свойства»**

- 1) Понятие вектора и сопутствующие понятия.
- 2) Откладывание вектора от точки.
- 3) Сложение векторов и свойства сложения. Вычитание векторов.
- 4) Умножение вектора на число (скаляр), свойства этой операции.
- 5) Признак коллинеарности двух векторов.
- 6) Теорема о разложении вектора на плоскости в линейную комбинацию векторов. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов.
- 7) Признак коллинеарности двух векторов – вторая формулировка.
- 8) Координаты вектора на плоскости.
- 9) Теорема о координатах линейной комбинации векторов.
- 10) Признак коллинеарности двух векторов в координатах.

- 11) Проекция вектора на прямую.
- 12) Численное значение проекции вектора на ось.
- 13) Ортонормированный базис, направляющие косинусы вектора.
- 14) Скалярное произведение двух векторов и его свойства.
- 15) Выражение скалярного произведения двух векторов в ортонормированных (декартовых) координатах.
- 16) Признак перпендикулярности двух векторов в ортонормированных (декартовых) координатах.
- 17) Понятие векторного пространства и евклидова векторного пространства
- 18) (аксиоматический подход).
- 19) Основные свойства векторных пространств.
- 20) Теорема о разложении вектора в пространстве в линейную комбинацию векторов. Признак компланарности трёх векторов.
- 21) Координаты вектора в пространстве.
- 22) Векторное произведение двух векторов: определение; свойства.
- 23) Смешанное произведение трёх векторов: определение; свойства; геометрический смысл.
- 24) Выражение векторного произведения двух векторов в дек. координатах.
- 25) Выражение смешанного произведения трёх векторов в дек. координатах.
- 26) Условие компланарности трёх векторов в декартовых координатах.
- 27) Вычисление объёма тетраэдра в декартовых координатах.

### **Модуль 2: «Координаты точек на плоскости и в пространстве»**

- 1) Аффинная система координат в пространстве.
- 2) Нахождение координат вектора по координатам его начала и конца.
- 3) Расстояние между двумя точками.
- 4) Деление отрезка в данном отношении.
- 5) Декартова (ортонормированная) система координат.
- 6) Преобразование аффинной системы координат в пространстве; матрица перехода. Ориентация пространства.
- 7) Переход от ортонормированной системы координат к ортонормированной.
- 8) Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами.
- 9) Простейшие задачи аналитической геометрии.
- 10) Уравнения различных линий и поверхностей.
- 11) Применение свойств координат точек к решению задач элементарной геометрии.

### **Модуль 3: «Алгебраические линии первого и второго порядков на плоскости»**

- 1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
- 2) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
- 3) Уравнение прямой в отрезках.
- 4) Параметрические уравнения прямой.
- 5) Каноническое уравнение прямой.
- 6) Прямые как алгебраические линии первого порядка.
- 7) Общее уравнение прямой.

- 8) Расстояние от точки до прямой.
- 9) Угол между двумя прямыми.
- 10) Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
- 11) Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
- 12) Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами.
- 13) Задание полуплоскости.
- 14) Эллипс: определение; основные элементы, вывод канонического уравнения; свойства. Гипербола: определение; основные элементы, вывод канонического уравнения; свойства.
- 15) Парабола: определение; основные элементы, вывод канонического уравнения; свойства.
- 16) Приведение общего уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду.
- 17) Теорема, дающая описание всех линий 2-го порядка на плоскости.
- 18) Пример приведения общего уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду.

#### **Модуль 4: «Плоскости, прямые и поверхности второго порядка в пространстве»**

- 1) Параметрические уравнения плоскости.
- 2) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.
- 3) плоскости, проходящей через три данные точки.
- 4) Уравнение плоскости в отрезках.
- 5) Уравнение плоскости, проходящей через две данные точки параллельно данному вектору.
- 6) Общее уравнение плоскости.
- 7) Плоскости как алгебраические поверхности первого порядка.
- 8) Условие коллинеарности вектора и плоскости.
- 9) Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения плоскости в декартовой системе координат.
- 10) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
- 11) Расстояние от точки до плоскости в декартовой системе координат.
- 12) Угол между двумя плоскостями в декартовой системе координат.
- 13) Условие перпендикулярности двух плоскостей в декартовой системе координат. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.
- 14) Взаимное расположение трёх плоскостей в пространстве
- 15) Цилиндрические поверхности. Конические поверхности.
- 16) Поверхности вращения.
- 17) Метод сечений в исследовании поверхностей.
- 18) Приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду Описание всех поверхностей второго порядка.
- 19) Эллипсоид.
- 20) Однополостный гиперболоид, его прямолинейные образующие.
- 21) Двуполостный гиперболоид.
- 22) Эллиптический параболоид.

- 23) Гиперболический параболоид, его прямолинейные образующие.

### **Модуль 5: «Геометрические преобразования»**

- 1) Понятие преобразования множества, композиция преобразований и обращение преобразования.
- 2) Понятие группы, её свойства.
- 3) Группа всех преобразований плоскости.
- 4) Параллельный перенос, выражение его в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение).
- 5) Осевая симметрия, выражение её в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение).
- 6) Поворот вокруг точки, выражение его в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение).
- 7) Центральная симметрия, выражение её в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение).
- 8) Скользящая симметрия, её выражение в координатах, определяемость парой ортонормированных реперов и применение к решению задач (в частности, на построение).
- 9) Движения (перемещения) плоскости и их свойства.
- 10) Движения 1-го рода и движения 2-го рода.
- 11) Аналитическое выражение движения.
- 12) Теорема Шаля о классификации движений 1-го рода.
- 13) Теорема о классификации движений 2-го рода.
- 14) Группа всех движений плоскости и её подгруппы.
- 15) Группы симметрий геометрических фигур.
- 16) Преобразования подобия и гомотетия.
- 17) Аналитическое выражение преобразования подобия и гомотетии.
- 18) Подобие фигур. Группа преобразований подобия.
- 19) Применение преобразований подобия и гомотетии к решению задач.
- 20) Аффинные преобразования плоскости и их свойства.
- 21) Аналитическое выражение аффинных преобразований плоскости. Группа аффинных преобразований.
- 22) Аффинная эквивалентность фигур.
- 23) Групповой подход к геометрии. Эрлангенская программа Ф.Клейна.
- 24) Приложение преобразований плоскости к решению задач на построение (общая логическая схема).

### **Модуль 6: «Геометрические построения на плоскости»**

- 1) Формулировка задачи на построение; понятие её решения.
- 2) Система аксиом построения с помощью циркуля и линейки.
- 3) Простейшие построения на плоскости с помощью циркуля и линейки.
- 4) Основные задачи на построение.

- 5) Общая схема решения задачи на построение.
- 6) Обзор методов решения задач на построение.
- 7) Метод пересечений для решения задач на построение.
- 8) Задачи на построение точек.
- 9) Задачи на построение прямых, лучей и отрезков.
- 10) Задачи на построение треугольников.
- 11) Задачи на построение четырехугольников.
- 12) Задачи на построение окружностей.
- 13) Построение фигур по данным точкам.
- 14) Построение отрезков, задаваемых простейшими формулами.
- 15) Однородные функции и построение отрезков.
- 16) Построение отрезков циркулем и линейкой.
- 17) Связи между различными видами отрезков.
- 18) Примеры отрезков, результат построения которых зависит от выбора единицы масштаба.
- 19) Сущность алгебраического метода и образцы задач, решаемых им.
- 20) Построение правильных многоугольников.
- 21) Алгебраический метод: задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой
- 22) Алгебраический метод: задачи на построение, не разрешимые циркулем и линейкой (об удвоении куба, о трисекции угла, о квадратуре круга).
- 23) Понятие о решении задач на построение иными средствами.

### **Модуль 7: «Метод изображений»**

- 1) Постановка задачи метода изображений.
- 2) Многообразие методов изображений.
- 3) Параллельное проектирование и его свойства.
- 4) Центральное проектирование и его свойства.
- 5) Изображение треугольника при параллельном проектировании.
- 6) Изображение параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции и правильного шестиугольника при параллельном проектировании.
- 7) Изображение окружности при ортогональном проектировании: лемма о сжатии окружности, теорема и следствие.
- 8) Построение эллипса по двум сопряженным диаметрам.
- 9) Теорема Польке-Шварца об изображении пространственного четырёхугольника (тетраэдра) при параллельном проектировании.
- 10) Теорема об определяемости изображения пространственной фигуры изображением четырёх её точек, не лежащих в одной плоскости.
- 11) Изображение основных пространственных фигур: призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара.
- 12) Понятие многогранника и выпуклого многогранника.
- 13) Первый признак выпуклого многогранника.
- 14) Второй признак выпуклого многогранника.
- 15) Теорема Эйлера для выпуклых многогранников.
- 16) Правильные многогранники: существование не более пяти типов правильных многогранников.



- 17) Правильные многогранники: существование пяти типов правильных многогранников (пять платоновых тел).
- 18) Группы симметрий правильных многогранников.
- 19) Сечения многогранников

### **Модуль 8: «Основания геометрии»**

- 1) Понятие об аксиоматическом методе: первоначальные понятия, аксиомы, теоремы. Интерпретация системы аксиом.
- 2) Изоморфизм структур.
- 3) Непротиворечивость, полнота, категоричность и независимость системы аксиом.
- 4) Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида.
- 5) Критика системы Евклида.
- 6) Пятый постулат Евклида, история его доказательства, и его эквиваленты.
- 7) Эквивалентность аксиомы параллельности и пятого постулата Евклида. Эквивалентность аксиомы параллельности Евклида и утверждения о том, что сумма мер внутренних углов любого треугольника равна  $2d$ .
- 8) Доказать, что аксиома  $I_1$  не зависит от аксиом  $I_2 - I_8$  группы I системы аксиом Гильберта.
- 9) Доказать, что в системе аксиом Гильберта аксиома  $III_5$  не зависит от остальных.
- 10) Сформулируйте определение прямого угла в системах аксиом А.В.Погорелова, Д. Гильберта, Г. Вейля.
- 11) Докажите в каждой из систем аксиом, что прямой угол существует.
- 12) Сформулируйте определение отрезка в системах аксиом А.В.Погорелова, Д. Гильберта, Г. Вейля.
- 13) Докажите в каждой из систем аксиом на любой плоскости существует отрезок.
- 14) Если два утверждения эквивалентны в системе аксиом Д.Гильберта, будут ли эквивалентными: 1) в системе аксиом школьного курса, 2) просто эквивалентными?
- 15) Докажите, что аксиома параллельных и утверждение о том, что сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым, эквивалентны в системе аксиом школьного курса.
- 16) Сформулировать понятие отрезка в системах аксиом А.В.Погорелова, Д. Гильберта, Г. Вейля. Доказать, что отрезок содержит бесчисленное множество точек.
- 17) В системе аксиом Г.Вейля доказать, что если на плоскости прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.
- 18) В системе аксиом А.В.Погорелова доказать, что у любого отрезка существует середина и притом только одна.
- 19) В системе аксиом Вейля доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
- 20) Докажите в системах аксиом Вейля и школьного курса, что если в пространстве  $E_3$  прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым некоторой плоскости, то прямая перпендикулярна плоскости.

- 21) Докажите в системе аксиом Вейля, что для любых двух скрещивающихся прямых существует единственная плоскость, содержащая одну из них, параллельная второй.
- 22) В системе аксиом Гильберта доказать первый признак равенства треугольников.
- 23) Найдите длину окружности радиуса  $r$  в эллиптической плоскости. Чему равно в этой геометрии отношение длины окружности к диаметру?
- 24) Докажите, что на плоскости Лобачевского между отрезками параллельности и углами параллельности существует функциональная зависимость.
- 25) Приведите пример модели окружности на сферической плоскости. Является ли постоянной отношение длины окружности к диаметру?

### 7.1.2. Примерные вопросы к зачету

1. Аффинная (общая декартова) система координат. Прямоугольная декартова система координат.
2. Полярная система координат и ее связь с прямоугольной декартовой.
3. Цилиндрическая система координат
4. Сферическая система координат.
5. Векторы. Линейные операции над векторами.
6. Понятие линейной зависимости векторов.
7. Скалярное произведение векторов и его свойства.
8. Векторное произведение векторов и его свойства.
9. Смешанное произведение трех векторов.
10. Двойное векторное произведение трех векторов.
11. Каноническое уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой.
12. Общее уравнение прямой и его исследование.
13. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой “в отрезках”.
14. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
15. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Угол между двумя прямыми.
16. Нормальное уравнение прямой.
17. Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду.
18. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
19. Пучок прямых на плоскости.
20. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
21. Общее уравнение плоскости и его исследование.
22. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
23. Уравнение плоскости “в отрезках”.
24. Взаимное расположение плоскостей.
25. Параметрические уравнения плоскости.
26. Нормальное уравнение плоскости.
27. Приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду.

28. Расстояние от точки до плоскости.
29. Пучок плоскостей.
30. Связка плоскостей.
31. Угол между двумя плоскостями.
32. Каноническое уравнение прямой, параметрические и векторно параметрическое уравнения прямой в пространстве.
33. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
34. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.
35. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
36. Взаимное расположение прямых в пространстве.
37. Расстояние между двумя прямыми в пространстве.
38. Прямая и плоскость в пространстве.
39. Угол между прямой и плоскостью.
40. Связка прямых.
41. Окружность.
42. Эллипс. Определение. Вывод канонического уравнения.
43. Исследование канонического уравнения эллипса.
44. Эксцентриситет и директрисы эллипса.
45. Касательная к эллипсу.
46. Оптическое свойство эллипса.
47. Преобразование равномерного сжатия плоскости к прямой.
48. Эллипс как результат равномерного сжатия окружности к одному из своих диаметров.
49. Параметрические уравнения эллипса. Практический способ построения.
50. Гипербола.
51. Исследование канонического уравнения гиперболы.
52. Асимптоты гиперболы.
53. Параметрические уравнения гиперболы.
54. Эксцентриситет гиперболы и выражение фокальных радиусов через эксцентриситет.
55. Директрисы гиперболы.
56. Касательная к гиперболе.
57. Оптическое свойство гиперболы.
58. Парабола.
59. Касательная к параболе.
60. Оптическое свойство параболы.
61. Уравнение эллипса, гиперболы, параболы в полярных координатах.
62. Преобразование равномерного сжатия пространства к плоскости.
63. Вывод уравнения поверхности вращения.
64. Трёхосный эллипсоид.
65. Однополостный гиперболоид.
66. Двуполостный гиперболоид.
67. Эллиптический параболоид.
68. Каноническое уравнение эллиптического конуса.
69. Цилиндрические поверхности.
70. Гиперболический параболоид.

71. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.
72. Общее преобразование аффинной системы координат в аффинную на плоскости.
73. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат в прямоугольную декартовую на плоскости.
74. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к виду, не содержащему произведения неизвестных.
75. Характеристическое уравнение кривой второго порядка.
76. Приведенное уравнение 1 типа кривых второго порядка и его исследование.
77. Приведенное уравнение 2 типа кривых второго порядка.
78. Приведенное уравнение 3 типа кривых второго порядка.
79. Применение преобразования параллельного переноса к общему уравнению кривой второго порядка.
80. Центр кривой второго порядка.
81. Пересечение прямой с кривой второго порядка.
82. Асимптотические направления относительно кривой второго порядка.
83. Диаметры кривой второго порядка.
84. Касательная к кривой второго порядка.

### **7.1.3. Примерные экзаменационные вопросы**

1. Первоначальные понятия, основные построения.
2. Методы решения задач на построение.
3. Алгебраический метод.
4. Разрешимость задач на построение циркулем и линейкой.
5. Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой.
6. Построение правильных многоугольников
7. Изображение плоских фигур при параллельном проектировании
8. Изображение многогранников при параллельном проектировании
9. Изображение цилиндра.
10. Изображение конуса.
11. Изображение шара.
12. Аксонометрия.
13. Полные и неполные изображения.
14. Сечения многогранников.
15. Метрические задачи аксонометрии.
16. Метод Монжа.
17. История попыток доказательства пятого постулата Евклида.
18. Общие вопросы аксиоматики.
19. Требования, предъявляемые к системам аксиом.
20. Система аксиом Гильберта трехмерного евклидова пространства.
21. Следствия аксиом принадлежности и порядка
22. Следствия аксиом конгруэнтности, непрерывности и параллельности.
23. Аксиоматика Вейля трехмерного евклидова пространства.
24. Свойства прямых и плоскостей в аксиоматике.
25. Вейля трехмерного евклидова пространства.
26. Свойства понятия «лежать между» в аксиоматике Вейля. Свойства отрезков, лучей полуплоскостей и углов.

27. Равенство отрезков и углов в аксиоматике Вейля. Аксиомы непрерывности.

#### 7.1.4. Примерные темы курсовых работ и рефератов

1. Сферическое изображение поверхностей.
2. Параллельные поверхности.
3. Линейчатые поверхности.
4. Проективные плоскости над конечными полями.
5. Геометрия комплексных чисел.
6. Тензоры в трехмерном евклидовом пространстве.
7. Аффиноры в трехмерном евклидовом пространстве.
8. Исследование систем Пфаффа.

#### 7.1.5. Примерные вопросы, задания и варианты для письменных контрольных работ

##### Темы контрольных работ

№	Тема
<b>3 семестр</b>	
1.	Векторная алгебра. Прямая линия на плоскости. Метод координат.
2.	Кривые второго порядка на плоскости.
3.	Метод преобразований.
4.	Метод координат в пространстве.
5.	Поверхности в евклидовом пространстве.
<b>4 семестр</b>	
1.	Методы решения задач на построение.
2.	Позиционные и метрические задачи.
3.	Общие вопросы аксиоматики. Системы аксиом школьного курса.
4.	Основания геометрии.

##### Контрольная № 1

###### Вариант 1

1. Дан тетраэдр  $ABCD$ , точка  $M$  – центр тяжести грани  $ABC$ ,  $N$  и  $K$  – середины ребер  $BD$  и  $DA$  соответственно. Найти координаты векторов  $\overrightarrow{DM}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{CN}$  и  $\overrightarrow{NK}$  в базисе  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BD}$ .

2. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  диагонали  $A_1B$  и  $B_1C$  его граней наклонены к плоскости основания под углами  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Вычислить угол между этими диагоналями.

3.  $M$  и  $M_1$  – точки пересечения медиан треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Доказать, что  $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$ .

4. Найти угол между биссектрисами двух плоских углов прямого трехгранного угла.

5. В четырехугольнике  $ABCD$  суммы квадратов длин противоположных сторон равны. Доказать, что его диагонали  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны.

###### Вариант 2

1. Дана треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ ,  $N$  – середина отрезка  $B_1C_1$ ,  $M$  – точка пересечения прямых  $A_1B$  и  $AB_1$ . Найти координаты векторов  $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN}$  в базисе  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA_1}$ .

2. Дан треугольник  $ABC$  такой, что в ортонормированном базисе  $\overrightarrow{BA}(-2, 3)$ ,  $\overrightarrow{BC}(0, 1)$ . Найти длину высоты  $BH$  и угол между векторами  $\overrightarrow{BH}$  и  $\overrightarrow{BA}$ .

3. Доказать, что если для неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  выполнено условие  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} + \vec{b}|$ , то  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .

4. Найти угол между биссектрисами  $AA_1$  и  $AA_2$ , двух граней правильного тетраэдра  $ABCD$ .

5. В правильном тетраэдре  $ABCD$ ,  $M$  и  $N$  – центры граней  $BCD$  и  $ACD$  соответственно. Найти угол между векторами  $\overrightarrow{AM}$  и  $\overrightarrow{BN}$ .

### Вариант 3

1. В тетраэдре  $ABCD$  точка  $M$  – центр тяжести грани  $BCD$ ,  $K$  и  $L$  – середины ребер  $AD$  и  $BD$  соответственно. Найти координаты векторов  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{KL}$  в базисе  $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}$ .

2. Найти длину биссектрисы  $BD$  треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AB = 2$ ,  $BC = 3$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ .

3. Доказать, что если вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны, то  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ .

4. Доказать, что в четырехугольнике с взаимно перпендикулярными диагоналями сумма площадей квадратов, построенных на одной паре противоположных сторон, равна сумме площадей квадратов, построенных на другой паре таких сторон.

5. Найти угол между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба.

### Вариант 4

1. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , у которой все ребра равны. Найти угол между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AM}$ , где  $M$  – середина ребра  $B_1C_1$ .

2. Точка  $O$  – центр параллелограмма  $ABCD$ . Найти координаты векторов  $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OD}$  в базисе  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}$ , где  $M$  – середина стороны  $BC$ .

3. Пусть  $m_a, m_b, m_c$  – медианы треугольника, сторонами которого являются отрезки  $a, b, c$ . Доказать, что  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

4. Найти длину высоты  $AH$  треугольника  $ABC$ , в котором  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $AC = 2$ .

5. Доказать, что если в тетраэдре имеется две пары взаимно перпендикулярных противоположных ребер, то и оставшиеся два ребра будут взаимно перпендикулярными.

### Вариант 5

1. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , точка  $M$  – центр грани  $BCC_1 B_1$ . Найти координаты вектора  $\overrightarrow{AM}$  в базисе  $\overrightarrow{DD_1}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AB}$ .

2. Дан угол  $ABC$ , причем известны координаты векторов  $\overrightarrow{BA}(-3, 0, 4)$  и  $\overrightarrow{BC}(5, -2, -14)$  в ортонормированном базисе. Найти координаты единичного вектора, сонаправленного с биссектрисой данного угла.

3. Пусть  $AH$  – высота,  $AM$  – медиана треугольника  $ABC$ , в котором  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $CA = 4$ . Найти координата векторов  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AM}$  в базисе  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ .

4. В трапеции  $ABCD$  основание  $AD$  в пять раз больше основания  $BC$ . Найти длины диагоналей трапеции и угол между ними, если известно, что  $AB = 6$ ,  $AD = 10$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ .

5. В треугольнике  $ABC$  длины сторон связаны соотношением  $a^2 + b^2 = 5c^2$ . Доказать, что медианы  $AA_1$  и  $BB_1$  взаимно перпендикулярны.

## Контрольная № 2

### Вариант 1

1. Через точку  $M(3,3)$  проведите прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между данными прямыми  $x - 4y + 4 = 0$  и  $3x - 2y + 2 = 0$ , в точке  $M$  делился пополам.

2. По данным расстояниям  $a$  и  $b$  от концов некоторого отрезка до данной прямой определите расстояние до этой прямой от середины данного отрезка.

3. Через точку  $M$  к сторонам треугольника проведены перпендикуляры. Найти множество точек  $M$ , для каждой из которых основания перпендикуляров принадлежат одной прямой.

4. Прямая  $d$  проходит через вершину  $A$  и середину медианы  $BM$  треугольника  $ABC$ ,  $N$  – точка пересечения прямой  $d$  со стороной  $BC$ . Доказать, что отношение  $(BC, N) = \frac{1}{2}$ .

5. На прямой  $2x - y - 10 = 0$  найти точку, сумма расстояний от которой до точек  $A(-5, 0)$  и  $B(-3, 4)$  была бы наименьшей.

### Вариант 2

1. Напишите уравнения сторон треугольника, если даны одна его вершина  $A(2, 7)$  и уравнения двух медиан  $y - 6 = 0$  и  $3x - 4y + 9 = 0$ .

2. Параллелограмм разбит своей диагональю, длина которого равна  $a$ , на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Найдите длину второй диагонали параллелограмма. Рассмотрите возможные случаи.

3. Найдите множество точек, отношение расстояний от которых до данных взаимно перпендикулярных прямых постоянно и равно  $\lambda$ .

4. Даны два параллелограмма  $ABCD$  и  $AMNP$ , где  $M$  – точка стороны  $AB$ ,  $N$  – точка стороны  $AD$ . Доказать, что прямые  $MD$ ,  $BP$ ,  $NC$  пересекаются в одной точке.

5. Даны точки  $A(5, 2)$  и  $B(2, 1)$ . На прямой  $x + y - 5 = 0$  найти точку  $M$ , такую, чтобы  $\angle AMB = 45^\circ$ .

### Вариант 3

1. Напишите уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину  $A(2, 7)$ , а также уравнения высоты  $3x + y + 11 = 0$  и медианы  $x + 2y + 7 = 0$ , проведенных из одной вершин.

2. Даны расстояния  $a, b, c$  от вершин  $A, B, C$  параллелограмма  $ABCD$  до некоторой прямой. Найдите расстояние до этой прямой от точки пересечения диагоналей параллелограмма.

3. Найдите множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно и равно  $\lambda$ .

4. Точки  $M$  и  $N$  принадлежат соответственно сторонам  $DC$  и  $CB$  параллелограмма  $ABCD$ . Через середину отрезков  $DM$  и  $AB$  проведена прямая. Через середину отрезков  $AD$  и  $BN$  – вторая прямая, пересекающая первую в точке  $P$ . Доказать, что прямая  $AP$  проходит через середину отрезка  $MN$ .

5. Две прямые  $x+y-2=0$ ,  $x+y+3=0$  повернуты вокруг начала координат на  $90^\circ$ . Найти координаты точек пересечения данных прямых и их образов при повороте. Доказать, что полученные точки являются вершинами квадрата.

#### Вариант 4

1. Напишите уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину  $C(2,0)$ , а также уравнения высоты  $x=y$  и медианы  $x=1$ , проведенных из различных вершин.

2. Даны расстояния  $a, b, c$  от вершин  $A, B, C$  параллелограмма  $ABCD$  до некоторой прямой. Найдите расстояние до этой прямой от четвертой его вершины.

3. Найдите множество точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна и равна  $\lambda$ .

4. Дан треугольник  $ABC$ . Прямая  $d$  пересекает прямые  $BC, CA, AB$  соответственно в точках  $A_1, B_1$  и  $C_1$ . На каждой прямой построены точки  $A_2, B_2, C_2$  симметричные точкам  $A_1, B_1, C_1$  относительно середины содержащих их сторон. Доказать, что точки  $A_2, B_2$  и  $C_2$  принадлежат на одной прямой.

5. На сторонах прямого угла  $ACB$  даны две точки  $A$  и  $B$  так, что  $CA=CB$ . Найти множество точек  $M$ , расположенных внутри угла, для которых луч  $MC$  есть биссектриса угла  $AMB$ .

#### Вариант 5

1. Напишите уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину  $A(5,4)$ , а также уравнения высоты  $8x+y-9=0$  и биссектрисы  $2x-y-1=0$ , проведенных из одной вершины.

2. Докажите, что если  $m_1$  и  $m_2$  – медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, причем  $m_1 \leq m_2$ , то  $\frac{1}{2} < \frac{m_1}{m_2} < 2$ .

3. Найдите множество точек плоскости, модуль разности квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна и равен  $\lambda$ .

4. Доказать, что никакие три вершины квадратов клетчатой бумаги не образуют равностороннего треугольника.

5. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $|AB|=|BC|$ ) известны уравнения двух сторон  $(AB): 3x-2y+3=0$ ,  $(AC): 2x-y-5=0$  и точки  $M(1,1)$ , принадлежащей третьей стороне треугольника. Найти уравнение третьей стороны.



### Контрольная работа № 3

#### Тема: «Кривым второго порядка»

**Задание 1.** Не приводя к каноническому виду найти:

- 1) центр линии;
- 2) асимптотические направления;
- 3) написать уравнение касательной к кривой, проходящей через выбранную точку;
- 4) диаметр, проходящий через начало координат;
- 5) диаметр, сопряженный вектору  $i$ ;
- 6) уравнения главных диаметров.

**Задание 2.** Привести уравнение кривой к каноническому виду и изобразить ее. Найти полуоси или параметр и эксцентриситет.

#### Варианты заданий

1. $x^2+y^2+xy+x+y=0$	16. $3xy-4y^2+6x-13y-\frac{11}{2}=0$
2. $40x^2+36xy+25y^2-8x-14y+1=0$	17. $12x^2-24xy+12y^2-48x=0$
3. $3xy+6x+3y+\frac{15}{2}=0$	18. $12xy-16y^2+24x-52y-22=0$
4. $4xy+\frac{3}{2}y^2+8x+6y-18=0$	19. $20x^2+8xy+12\frac{1}{2}y^2-4x-7y+\frac{1}{2}=0$
5. $4xy+8x+4y+10=0$	20. $2xy+\frac{3}{2}y^2+8x+6y-18=0$
6. $9x^2+12xy+4y^2+8x+14y+3=0$	21. $x^2+6xy+9y^2-12x+24y+15=0$
7. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$	22. $4x^2+4xy+y^2+8x+6y+3=0$
8. $2x^2+xy+2y^2+15\sqrt{2}x+50=0$	23. $x^2-2xy+9y^2-8x-6y+12=0$
9. $10x^2+6xy+2y^2-2x+4y-3=0$	24. $9x^2+6y^2+4xy+2x-4y-4=0$
10. $3x^2+4\sqrt{2}xy+5y^2+6x-1=0$	25. $2x^2-3xy+2y^2+7x-3y-3=0$
11. $4x^2+2xy+4y^2+30\sqrt{2}x+100=0$	26. $x^2-2xy+y^2-4x=0$
12. $5x^2+4y^2+6xy-3x-6y+1=0$	27. $9x^2+4y^2-12xy+39=0$
13. $xy+2x+y+\frac{5}{2}=0$	28. $\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}y^2+2xy-2x-2\sqrt{3}y=0$
14. $9x^2+12xy+4y^2+8x+14y+3=0$	29. $x^2+6xy+9y^2-12x+24y+15=0$
15. $3x^2+4\sqrt{2}xy+5y^2+6x-1=0$	30. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$

### Контрольная № 4

#### Тема: «Преобразования плоскости»

#### Вариант 1.

1. Написать в прямоугольной декартовой системе координат формулы осевой симметрии, при которой прямая  $3x-y+5=0$  переходит в прямую  $3x+y-4=0$ .

2. Найти координаты вершин  $A$ ,  $B$  острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$ , если в прямоугольной декартовой системе координат  $C(1,0)$ , точка  $A$  лежит на прямой  $y-1=0$ , точка  $B$  принадлежит окружности  $x^2+(y+2)^2-1=0$ .

3. Составить формулы гомотетии, зная уравнение инвариантной прямой  $x+2y-3=0$  и координаты двух соответствующих точек  $M(2,2)$  и  $M'(-4,-4)$ .

4. Доказать, что формулы  $x'=3x+2y-2=0$ ,  $y'=-x+1$  определяют родство. Написать уравнения инвариантных прямых, а также образа и прообраза оси абсцисс.

5. Постройте треугольник наименьшего периметра, имеющий данные основания и высоту.

## Вариант 2.

1. Написать в прямоугольной декартовой системе координат формулы скользящей симметрии, при которой прямая  $x-y=0$  инвариантна, а образом точки  $M(0,1)$  является точка  $M'(2,1)$ .

2. Через точку пересечения окружностей, заданных в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями  $x^2+y^2=1$ ,  $x^2+(y+2)^2=5$ , проведена прямая  $l$  так, что ее отрезок, заключенный внутри окружностей, делится этой точкой пополам. Записать уравнение прямой  $l$ .

3. Найти координаты вершин треугольника  $A_1B_1C_1$ , гомотетичного треугольнику  $ABC$ , если известно, что вершина  $A_1$  лежит на оси ординат, а вершины данного треугольника и центр гомотетии  $M_0$  имеют координаты  $A(9,2)$ ,  $B(5,6)$ ,  $C(5,4)$ ,  $M_0(3,2)$ .

4. Доказать, что формулы  $x'=3x-2y+2$ ,  $y'=2x-y+2$  определяют перспективно-аффинное преобразование, и найти его инвариантные направления. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат, которая переходит при этом преобразовании в прямую, также проходящую через начало координат.

5. На данной окружности найдите точку, разность расстояний от которой до двух данных на этой окружности точек  $A$  и  $B$  равна длине данного отрезка.

## Вариант 3.

1. Написать в прямоугольной декартовой системе координат формулы движения первого рода, при котором прямая  $x-y+4=0$ , переходит в прямую  $x-y=0$ , а точка  $A(2,0)$  инвариантна.

2. Найти координаты вершин ромба  $ABCD$ , если в прямоугольной декартовой системе координат задано уравнение его диагонали  $AC$ :  $x-2=0$ , длина этой диагонали  $AC=6$ , а вершины  $B$  и  $D$  принадлежат соответственно оси ординат и окружности  $(x-6)^2+(y-3)^2=5$ .

3. Написать в прямоугольной декартовой системе координат формулы гомотетии с коэффициентом  $m=-2$ , переводящей прямую  $x=6$  в ось ординат, если известно, что расстояние от центра гомотетии  $M_0$  до оси абсцисс равно 2.

4. Найти все инвариантные прямые аффинного преобразования, заданного формулами  $x'=2x-3y+6$ ,  $y'=x-2y+6$ .

5. Вокруг данной окружности опишите правильный восьмиугольник.

#### Вариант 4.

1. Написать в прямоугольной декартовой системе координат формулы движения второго рода, которое точку  $B(0, -1)$  переводит в точку  $B'(2, 1)$  и имеет инвариантные точки.

2. На окружностях, заданных в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями  $(x+2)^2 + y^2 = 1$  и  $x^2 + y^2 = 1$ , найти соответственно точки  $A$  и  $B$  так, чтобы  $\overline{AB}$  имел координаты  $(2, 2)$ .

3. Составить в прямоугольной декартовой системе координат формулы гомотетии, переводящей окружность  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$  в окружность  $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 4$ .

4. Найти инвариантные направления аффинного преобразования, заданного формулами  $x' = 5x - 2y + 2$ ,  $y' = 12x - 5y + 6$ .

5. Постройте треугольник  $ABC$ , зная сторону  $b$ , разность углов  $C$  и  $A$  и разность сторон  $c$  и  $a$ .

#### Вариант 5.

1. Написать в прямоугольной декартовой системе координат формулы движения, при котором прямая  $x+y+2=0$  переходит в прямую  $x-y+6=0$  и которое имеет единственную инвариантную точку  $A(4, 0)$ .

2. Написать в прямоугольной декартовой системе координат уравнение окружности, вписанной в квадрат  $ABCD$ , если известно, что уравнение прямой  $AC$  имеет вид  $x=2$ , вершина  $B$  лежит на оси ординат, а вершина  $D$  удалена от точки  $E(6, 3)$  на расстояние  $\sqrt{5}$ .

3. Составить в прямоугольной декартовой системе координат формулы гомотетии, при которой окружность с центром  $(1, 1)$  переходит в окружность с центром  $(4, 4)$  того же радиуса.

4. Записать уравнения инвариантных прямых аффинного преобразования, заданного формулами:  $x' = 5x - 2y + 6$ ,  $y' = 8x - 3y + 12$ .

5. Вокруг данного четырехугольника опишите четырехугольник, подобный данному.

### Контрольная работа № 5

#### Тема: «Прямые и плоскости в пространстве»

#### Вариант 1.

1. Из одной точки отложены направленные отрезки - представители некопланарных векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих отрезков, перпендикулярна вектору  $\vec{p} = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}]$

2. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках  $A(2, -1, -1)$ ,  $B(5, -1, 2)$ ,  $C(3, 0, -3)$ ,  $D(6, 0, -1)$ . Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты

$AH$ ; г) угол между ребрами  $AB$  и  $CD$ ; д) уравнения граней  $ABC$  и  $ABD$  и угол между этими гранями.

3. Написать уравнения прямой, пересекающей каждую из трёх прямых, заданных в аффинной системе координат уравнениями

$$a: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \quad b: \begin{cases} x=1 \\ z=0 \end{cases}, \quad c: \begin{cases} y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

4. Через линию пересечения плоскостей, заданных уравнениями  $x+5y+z=0$  и  $x-z+4=0$ , провести плоскость, образующую угол  $\pi/4$  с плоскостью, заданной уравнением  $x-4y-8z+12=0$ .

5. Найти расстояние между прямыми, заданными уравнениями

$$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-4=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x}{3} = \frac{y+19}{-1} = \frac{z-9}{4},$$

и написать уравнения прямой, содержащей общий перпендикуляр этих прямых.

6. Доказать, что отрезки, соединяющие противоположные ребра тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

## Вариант 2.

1. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках  $A(0,0,0)$ ,  $B(3,4,-1)$ ,  $C(2,3,5)$ ,  $D(6,0,-3)$ . Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты  $AH$ ;

г) угол между ребрами  $AB$  и  $CD$ ; д) уравнения граней  $ABC$  и  $ABD$  и угол между этими гранями.

2. Найти расстояние от точки  $C(3,2,-2)$  до прямой, проходящей через точки  $A(1,2,-3)$  и  $B(5,2,0)$ .

3. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости, заданной уравнением  $3x-6y-2z+14=0$ , и удалённой от неё на расстояние, равное 3.

4. Написать уравнения прямой, проходящей через точку  $A(4,0,-1)$ , которая пересекает прямые, заданные в аффинной системе координат уравнениями

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=5t \\ y=2-t \\ z=-1+2t \end{cases}.$$

5. Написать уравнение плоскости, симметричной координатной плоскости  $Oxz$  относительно плоскости, заданной уравнением  $3x-4y+5z+5=0$ .

6. Пусть ребра  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  тетраэдра  $ABCD$  взаимно перпендикулярны. Доказать, что центр сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, лежит на прямой, соединяющей вершину  $A$  с центром тяжести треугольника  $B CD$ .

## Вариант 3.

1. Найти объём шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью, заданной уравнением

$$2x+3y+6z-18=0.$$

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x-2y=4z-3=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

3. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках  $A(-2,-1,-1)$ ,  $B(5,-1,2)$ ,  $C(3,0,-3)$ ,  $D(6,1,-1)$ . Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты  $AH$ ;

г) угол между ребрами  $AB$  и  $CD$ ; д) уравнения граней  $ABC$  и  $ABD$  и угол между этими гранями.

4. Написать уравнение плоскости  $\gamma$ , которая параллельна плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ , заданным соответственно уравнениями  $x-2y+z-1=0$  и  $x-2y+z-3=0$ , если известно отношение расстояний

$$\rho(\gamma, \alpha) : \rho(\gamma, \beta) = 1 : 3.$$

5. Найти координаты точки, симметричной точке  $A(0,0,2)$  относительно прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}.$$

6. Доказать, что плоскости, перпендикулярные к ребрам тетраэдра и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

#### Вариант 4.

1. Найти площадь треугольника  $ABC$ , если  $\vec{AB} = \vec{m} + \vec{n}$ ,  $\vec{AC} = \vec{m} - \vec{n}$ , где  $|\vec{m}| = 2$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $\angle CAB = 60^\circ$ .

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям, заданным уравнениями  $2x - y + 5z + 3 = 0$  и  $x + 3y - z - 7 = 0$ .

3. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках  $A(2, -1, 1)$ ,  $B(5, -1, 2)$ ,  $C(-3, 0, -3)$ ,  $D(6, 0, -1)$ . Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты  $AH$ ; г) угол между ребрами  $AB$  и  $CD$ ; д) уравнения граней  $ABC$  и  $ABD$  и угол между этими гранями.

4. Написать уравнения прямой, содержащей перпендикуляр, проведенной из точки  $A(2, 3, 1)$  к прямой, заданной уравнениями  $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ .

5. Даны координаты вершин тетраэдра  $ABCD$ :  $A(0,0,2)$ ,  $B(3,0,5)$ ,  $C(1,1,0)$ ,  $D(4,1,2)$ . Вычислить его объем и составить уравнение прямой, содержащей общий перпендикуляр прямым  $AC$  и  $BD$ .

6. В неплоском четырехугольнике отрезки, соединяющие середины двух противоположных сторон и середины диагоналей пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

#### Вариант 5.

1. При каком значении параметра  $\alpha$  векторы  $\vec{m} = 3\alpha\vec{p} + \vec{q}$  и  $\vec{n} = 3\vec{p} - \vec{q}$ :

а) коллинеарны, б) перпендикулярны, если известно, что  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = 60^\circ$ ?

2. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках  $A(2, 1, -1)$ ,  $B(5, 1, 2)$ ,  $C(3, 0, -3)$ ,  $D(6, 0, -1)$ . Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты

$AH$ ; г) угол между ребрами  $AB$  и  $CD$ ; д) уравнения граней  $ABC$  и  $ABD$  и угол между этими гранями.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x-2y+4z-3=0 \\ y=0 \end{cases}$$

4. Найти расстояние между прямыми, заданными уравнениями

$$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-4=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x}{3} = \frac{y+9}{1} = \frac{z-9}{4}.$$

5. Написать уравнения прямой, проходящей через точку  $A(4,0,-1)$ , которая пересекает прямые, заданные уравнениями

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=5t \\ y=2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

6. В неплоском четырехугольнике отрезки, соединяющие середины двух противоположных сторон и середины диагоналей пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

### 7.1.7. Вопросы для контроля самостоятельной работы студентов

#### **Векторная алгебра. Геометрия на плоскости.**

1. Направленные отрезки. Векторы. Понятие вектора. Виды векторов. Лемма о равенстве векторов.
2. Сложение и вычитание векторов. Определения и свойства. Примеры.
3. Умножение вектора на число. Определение и свойства. Примеры.
4. Условия коллинеарности двух векторов и компланарности трех векторов.
5. Линейно зависимая система векторов. Свойства такой системы векторов. Примеры.
6. Линейно независимая система векторов. Свойства такой системы векторов. Примеры.
7. Теорема о разложении вектора по трем некопланарным векторам. Следствие.
8. Базис. Размерность. Понятие координат векторов. Примеры. Свойства координат точек.
9. Ортонормированный базис. Вычисление длины вектора через ее координаты. Примеры.
10. Скалярное произведение векторов. Определение. Вычисление его в координатах. Примеры.
11. Скалярное произведение векторов. Определение. Примеры. Свойства скалярного произведения векторов.
12. Векторные подпространства. Примеры. Двумерное векторное подпространство. Условие коллинеарности двух векторов.
13. Применение векторов к решению задач. Алгоритм применения векторов. Примеры.
14. Аффинная система координат на плоскости. Решение простейших задач в координатах.
15. Деление отрезка в заданном отношении. Примеры.

16. Прямоугольная декартова система координат. Решение простейших задач.
17. Ориентация пространства. Признак компланарности векторов. Матрица перехода. Левый и правый базисы.
18. Формулы преобразования координат на плоскости.
19. Алгебраическая линия. Окружность.
20. Уравнения прямой на плоскости. Выводы. Примеры.
21. Расстояние от точки до прямой. Примеры.
22. Угол между двумя прямыми. Примеры.
23. Полярные координаты. Решение простейших задач в полярных координатах. Присоединенная прямоугольная система координат.
24. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Примеры.
25. Основные задачи на прямую на плоскости.
26. Метод координат на плоскости. Алгоритм применения. Примеры.
27. Эллипс. Вывод уравнения. Построение циркулем и линейкой. Свойства.
28. Гипербола. Вывод уравнения. Построение циркулем и линейкой. Свойства.
29. Парабола. Вывод уравнения. Построение циркулем и линейкой. Свойства.
30. Единое определение эллипса, гиперболы и параболы.
31. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах.
32. Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления.
33. Центр линии второго порядка. Примеры.
34. Касательные к линии второго порядка. Вывод уравнения. Примеры.
35. Диаметры линии второго порядка. Сопряженные направления. Примеры.
36. Главные направления. Главные диаметры линии второго порядка. Примеры.
37. Классификация центральных линий второго порядка. Примеры.
38. Классификация нецентральных линий второго порядка.
39. Приведение линий второго порядка к каноническому виду.

### **Геометрические преобразования. Метод координат в пространстве.**

1. Отображения и преобразования множеств. Группы преобразований множества. Определения. Примеры.
2. Движения плоскости. Определение. Примеры. Основная теорема. 3. Свойства движений плоскости.
4. Группа движений плоскости и ее подгруппы. Теорема о представлении любого движения в виде композиции осевых симметрий.
5. Два вида движений. Аналитическое представление движений.
6. Классификация движений первого рода.
7. Классификация движений 2 рода.
8. Применение движений к решению задач. Признаки применимости метода. Примеры.
9. Группа симметрий геометрической фигуры. Свойства группы симметрий ограниченной фигуры.
10. Гомотетия. Определение. Свойства. Аналитическое задание гомотетии.
11. Преобразование подобия. Свойства. Аналитическое представление подобия.
12. Группа подобий и ее подгруппы. Подобие фигур. Теоремы о подобии линий второго порядка.

13. Применение подобий к решению задач на доказательство, вычисление, построение.
14. Аффинные преобразования плоскости. Основная теорема.
15. Свойства аффинных преобразований плоскости. Аналитическое задание аффинных преобразований.
16. Перспективно-аффинные преобразования и их свойства. Построение образов точек.
17. Аффинные задачи. Применение аффинных преобразований к решению аффинных задач. Признак применимости аффинных преобразований при решении задач. Последовательность действий по применению. Примеры.
18. Аффинная и прямоугольная система координат в пространстве. Деление отрезка в данном отношении. Вычисление расстояния между точками.
19. Ориентация пространства и плоскости.
20. Формулы преобразование координат в пространстве.
21. Векторное произведение векторов. Геометрический смысл модуля векторного произведения векторов. Свойства векторного произведения.
22. Векторное произведение векторов в ортонормированном базисе. Свойства векторного произведения.
23. Смешанное произведение в произвольном базисе. Свойства смешанного произведения.
24. Смешанное произведение в произвольном базисе. Свойства смешанного произведения.
25. Различные способы задания плоскости. Выводы уравнений. Свойства.
26. Общее уравнение плоскости. Параллельность вектора и плоскости. Особенности расположения плоскости относительно системы координат при равенстве нулю некоторых коэффициентов в общем уравнении плоскости.
27. Геометрический смысл знака многочлена  $Ax + By + Cz + D$ .
28. Расстояние от точки до плоскости. Вывод формулы. Примеры.
29. Угол между двумя плоскостями. Вывод формулы. Примеры.
30. Различные способы задания прямой в пространстве. Каноническое уравнение, параметрические уравнения и прямая как линия пересечения двух плоскостей. Примеры.
31. Угол между прямой и плоскостью. Вывод формулы. Примеры.
32. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Вывод формулы. Примеры.
33. Взаимное расположение прямой и плоскости. Примеры.
34. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Примеры.
35. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Примеры.
36. Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве. Примеры.
37. Поверхности второго порядка. Метод сечений.
38. Поверхности вращения.
39. Цилиндрические поверхности второго порядка.
40. Конические поверхности второго порядка.
41. Эллипсоид.
42. Однополостный гиперболоид.
43. Двуполостный гиперболоид.
44. Эллиптический параболоид.



45. Гиперболический параболоид.
46. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.
47. Метод координат в пространстве. Признаки применимости и алгоритм применения метода. Примеры решения аффинных и метрических задач методом координат.

### **Конструктивная геометрия. Методы изображений.**

1. Аксиомы конструктивной геометрии. Простейшие и основные построения.
2. Построение одной линейкой. Построение прямым углом.
3. Построения одним циркулем.
4. Метод пересечений.
5. Параллельный перенос в задачах на построение.
6. Вращение плоскости в задачах на построение.
7. Центральная симметрия в задачах на построение.
8. Осевая симметрия в задачах на построение.
9. Гомотетии и подобия в задачах на построение.
10. Алгебраический метод в задачах на построение.
11. Параллельное проектирование и его свойства.
12. Аксонометрия.
13. Позиционные задачи. Примеры решения позиционных задач.
14. Метрические задачи. Примеры решения метрических задач.
15. Изображение комбинации тел.
16. Метод Монжа.

### **Основания геометрии. Неевклидовы геометрии.**

1. Аксиоматический метод. Понятие о математической структуре.
2. Интерпретация системы аксиом. Изоморфизм структур.
3. Непротиворечивость и независимость системы аксиом.
4. Непротиворечивость и полнота системы аксиом.
5. Геометрия до Евклида.
6. “Начала” Евклида. Достоинства и недостатки.
7. Пятый постулат Евклида. Проблема пятого постулата. Эквиваленты пятого постулата.
8. Теоремы о сумме углов треугольника в абсолютной геометрии. Теоремы Саккери-Лежандра.
9. Обзор системы аксиом Гильберта. Следствия I - II групп аксиом.
10. Обзор системы аксиом Гильберта. Обзор следствий III- V групп аксиом.
11. Аксиома Лобачевского. Параллельные прямые по Лобачевскому. Признак параллельности прямых.
12. Параллельные прямые по Лобачевскому. Существование параллельных прямых на плоскости Лобачевского.
13. Параллельные прямые по Лобачевскому. Отрезок и угол параллельности.
14. Треугольники на плоскости Лобачевского.
15. Четырехугольники на плоскости Лобачевского.
16. Параллельные прямые на плоскости Лобачевского и их свойства.
17. Расходящиеся прямые и их свойства.

18. Окружность на плоскости Лобачевского и ее свойства.
19. Эквидистанта и ее свойства.
20. Орицикл и его свойства.
21. Непротиворечивость геометрии Лобачевского.
22. Система аксиом Вейля трехмерного Евклидова пространства и ее непротиворечивость.
23. Обзор системы аксиом Вейля. Доказательство аксиом I группы Гильберта в системе аксиом Вейля.
24. Определения луча, угла, отрезка в системе аксиом Вейля. Лежать “между” в системе аксиом Вейля. Доказательство аксиом II группы Гильберта.
25. Равенство отрезков и углов. Длина отрезка. Доказательство некоторых аксиом III группы Гильберта в системе аксиом Вейля.
26. Аксиоматика А.В. Погорелова школьного курса геометрии. Примеры определений и доказательств теорем в системе аксиом Погорелова. Независимость, непротиворечивость и полнота системы аксиом школьного курса.
27. Об аксиомах школьного курса геометрии. Системы аксиом школьных учебников под ред. Л.С.Атанасяна, А.Н. Колмогорова.
28. Гиперболическое векторное пространство.
29. Система аксиом плоскости Лобачевского в схеме Вейля. Непротиворечивость системы аксиом.
30. Понятие о сферической геометрии. Непротиворечивость и полнота системы аксиом. Доказательство некоторых теорем сферической геометрии.
31. Понятие об эллиптической геометрии Римана. Непротиворечивость и полнота системы аксиом. Доказательство некоторых теорем римановой геометрии.
32. Об эволюции понятия “геометрия”.
33. Длина отрезка. Теорема существования.
34. Измерение длин отрезков. Теорема единственности.
35. Измерение площадей многоугольников. Теорема существования.
36. Измерение площадей многоугольников. Теорема единственности. Равновеликие и равносторонние многоугольники.
37. Измерение объемов многогранников в евклидовом пространстве (обзорно).

## **7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля – 50 %.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях -30 баллов,
- выполнение лабораторных заданий – 30 баллов,
- выполнение домашних (аудиторных) контрольных работ - 30баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос -50 баллов,
- письменная контрольная работа -50 баллов,

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.**

### **Основная**

- 1) Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия (в 2-х частях). Ч. 2. [Электронный ресурс] / Атанасян Л.С., Базылев В.Т. - Москва: КноРус, 2017. -1424 с. -ISBN 978-5-406-05977-7 Б. ц. Перейти к внешнему ресурсу <http://www.book.ru/book/927669> Книга находится в ЭБС «BOOK.ru»
- 2) Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник / Д.В. Беклемишев. - 16-е Изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2019. - 448 с. - Перейти к внешнему ресурсу <https://e.lanbook.com/book/98235> Книга находится в ЭБС "ЛАНЬ".
- 3) Беклемишева Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.А. Беклемишева, Д.В. Беклемишев, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров. - 6-е Изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2018. - 496 с. - Перейти к внешнему ресурсу <https://e.lanbook.com/book/97281> Книга находится в ЭБС "ЛАНЬ".
- 4) Гусева Н.И., Денисова Н.С., Тесля О.Ю. Сборник задач по геометрии в 2-х частях. Часть 1 [Электронный ресурс] / Гусева Н.И., Денисова Н.С., Тесля О.Ю. - Москва: КноРус, 2018. - 527 с. - ISBN 978-5-406-00908-6 : Б. ц. Перейти к внешнему ресурсу <http://www.book.rulbook/927670> Книга находится в ЭБС "BOOK.ru"
- 5) Матвеев, С. Н. Геометрия : учебно-методическое пособие по аналитической и конструктивной геометрии для самостоятельной работы обучающихся очной, заочной и дистанционной форм обучения по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование / С. Н. Матвеев, Р. Г. Шакиров, Г. Р. Антропова. — Набережные Челны : Набережночелнинский государственный педагогический университет, 2019. — 59 с. — ISBN 978-5-98452-190-1. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/97122.html> (дата обращения: 06.12.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/97122>

### **Дополнительная**

- 1) Дубровин, Борис Анатольевич. Современная геометрия : Методы и приложения. Т. 1 : Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей / Дубровин, Борис Анатольевич ; С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. - 5-е изд., испр. - М. : Эдиториал УРСС: Добросвет, 2001. - 334 с. - ISBN 5-8360-0160-X : 0-0.
- 2) Александров, А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. Учебное пособие./А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит, 1990. — 672 с.: ил. — ISBN 5-02-014336-7.
- 3) Гильберт Д. Основания геометрии /Д. Гильберт – М.: Физматгиз, 1948. – 491 с.

- 4) Игнаточкина Л.А. Топология для бакалавров математики [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Игнаточкина Л.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: Прометей, 2016.— 88 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58207.html>.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

## 9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	<a href="http://www.math.ru">www.math.ru</a>	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	<a href="http://www.exponenta.ru">www.exponenta.ru</a>	<p><b>Студентам:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- запустить установленный у Вас математический пакет</li> <li>выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакет подходящий и решить свою задачу по аналогии;</li> </ul> <p><b>Преподавателям:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- использовать математические пакеты для поддержки курса лекций.</li> </ul> <p><b>Всем заинтересованным пользователям:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе.</li> <li>2. – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.</li> </ol>
3.	Математика	<a href="http://www.mathematics.ru">www.mathematics.ru</a>	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	<a href="http://www.edu.ru">www.edu.ru</a>	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	<a href="http://elib.dgu.ru">http://elib.dgu.ru</a> , <a href="http://edu.icc.dgu.ru">http://edu.icc.dgu.ru</a>	
6.	Общероссийский математический портал (Math-Net.Ru)	<a href="http://www.mathnet.ru">www.mathnet.ru</a>	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

## 10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Учебная программа по геометрии распределена по темам и по часам на лекции, практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите курсовых работ, а

также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

Дисциплин «Геометрия» являются основной базой всех специальных дисциплин, изучаемых будущими бакалаврами. Специфика дисциплины состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач.

На лекциях особенно большое значение имеет реализация следующих задач:

- 1) глубокое осмысливание ряда понятий и положений, введенных в теоретическом курсе;
- 2) раскрытие прикладного значения теоретических сведений;
- 3) развитие творческого подхода к решению практических и некоторых теоретических вопросов;
- 4) закрепление полученных знаний путем многократного практического использования;
- 5) приобретение прочных навыков типовых расчетов;
- б) расширение кругозора, приобретение полезных сведений, касающихся технических данных реальных объектов и конкретных условий их эксплуатации.

Наряду с перечисленными выше образовательными целями, занятия преследуют и важные цели воспитательного характера, а именно:

- а) воспитание настойчивости в достижении конечной цели;
- б) воспитание дисциплины ума, аккуратности, добросовестного отношения к работе;
- в) воспитание критического отношения к своей деятельности, умения анализировать свою работу, искать оптимальный путь решения, находить свои ошибки и устранять их.

### **Методические рекомендации**

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить следующие литературные источники:

- 1) Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия (в 2-х частях). Ч. 2. [Электронный ресурс] / Атанасян Л.С., Базылев В.Т. - Москва: КноРус, 2017. -1424 с. -ISBN 978-5-406-05977-7 Б. ц. Перейти к внешнему ресурсу <http://www.Book.ru/Book/927669> Книга находится в ЭБС «BOOK.ru»

- 2) Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник / Д.В. Беклемишев. - 16-е Изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2019. - 448 с. - Перейти к внешнему ресурсу <https://e.lanbook.com/book/98235> Книга находится в ЭБС "ЛАНЬ".

Решать задачи и упражнения из задачников

1. Гусева Н.И., Денисова Н.С., Тесля О.Ю. Сборник задач по геометрии в 2-х частях.

Для проверки остаточных знаний использовать вопросы для самопроверки

Для подготовки к экзамену: повторить лекционный материал, проанализировать список рекомендованной литературы, решить самостоятельно задачи и примеры из учебного пособия Гусева Н.И., Денисова Н.С., Тесля О.Ю. Сборник задач по геометрии в 2-х частях.

### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по геометрии рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

### **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины математический анализ. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.