

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
**Теория меры и интегралов**

**Кафедра:** дифференциальных уравнений и функционального анализа  
**Факультете:** математики и компьютерных наук

Образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профили подготовки  
«Математический анализ и приложения»

Уровень высшего образования:  
бакалавриат

Форма обучения:  
очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП,  
модуль профильной направленности ОПОП

Махачкала 2021


Рабочая программа дисциплины «Теория меры и интегралов» составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.01 Математика (уровень бакалавриата) от 23.08.2017 № 807.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,  
Рагимханов В.Р., к. ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:  
на заседании кафедры ДУ и ФА от 31.05.2021 г., протокол № 10

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.  
(подпись)

на заседании Методической комиссии факультета М и КН от 27.06.2021г.,  
протокол № 6.

Председатель  Бейбалаев В.Д.  
(подпись)

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «\_09\_» июля 2021г.

Начальник УМУ  Гасангаджиева А.Г.

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Теория меры и интегралов» входит в обязательную часть образовательной программы бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ.

К основным задачам данного курса относятся изучение основных понятий, определений и теорем теории меры; четкое понимание как строится интеграл по мере; знание основных предельных теорем теории интеграла Лебега, теоремы Радона-Никодима, теорем Фубини и Тонелли.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:  
универсальная компетенция (УК): УК-1;  
общепрофессиональная компетенция (ОПК): ОПК-1;  
профессиональная компетенция (ПК): ПК-1.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: лекции, практические занятия и самостоятельная работа.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: контрольной работа и коллоквиума, промежуточный контроль в форме экзамена.

Объем дисциплины 3 зачетных единиц, в том числе 108 в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцирован ный зачет, экзамен
	в том числе							
	Контактная работа обучающихся с преподавателем							
	Всего	из них						
Лек ции		Лабораторн ые занятия	Практиче ские занятия	КСР	консульта ции			
8	108	14		14			44	Экзамен

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины теория меры и интегралов является научить слушателей понимать основные положения теории меры и абстрактной теории интеграла. Понятие и факты курса составляют фундамент многих разделов современного анализа.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина *Теория меры и интегралов* входит в основную часть образовательной программы по направлению *02.03.01 Математика и компьютерные науки* и входит в модуль профильной направленности.

Предполагает знание основных понятий и методов математического анализа, знаний свойств функций, основных классов функций действительного переменного.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	<b>Знает:</b> структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, а также базовые составляющие таких задач. <b>Умеет:</b> анализировать постановку данной математической задачи, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения. <b>Владет:</b> навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математических дисциплин	
	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.	<b>Знает:</b> принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации научной информации в области математики и компьютерных наук. <b>Умеет:</b> системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук. <b>Владет:</b> навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок	
	УК-1.3 Имеет практический опыт работы с	<b>Знает:</b> современные методы сбора и анализа научного материала с	

	информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.	использованием информационных технологий; основные методы работы с ресурсами сети Интернет. <b>Умеет:</b> применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; практически использовать научно-образовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях и в деятельности педагога. <b>Владеет:</b> навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками использования современных баз данных; навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах.	
ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	<b>Знает:</b> теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а также теоретической механики, физики. <b>Умеет:</b> решать задачи, связанные с исследованием свойств функций и их производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами. <b>Владеет:</b> базовыми методами современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач	Конспектирование и проработка лекционного материала. Устный опрос. Коллоквиум. Контрольная работа Самостоятельная работа

профессиональной деятельности	ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности	<b>Знает:</b> способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук. <b>Умеет:</b> применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. <b>Владеет:</b> навыками применения методов современного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и естественных наук	
	ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	<b>Знает:</b> различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. <b>Умеет:</b> корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук. <b>Владеет:</b> навыками выбора методов решения задач современного математического анализа	
ПК-1. Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	ПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.	<b>Знает:</b> основы математического анализа и различные приложения дифференциального и интегрального исчисления в математических и естественных науках; современные языки программирования и современные информационные технологии. <b>Умеет:</b> применять дифференциальное и интегральное исчисления для решения различных задач математических и естественных наук; составлять программы на современных языках программирования. <b>Владеет:</b> базовыми методами дифференциального и интегрального исчислений; навыками программирования на современных языках.	Конспектирование и проработка лекционного материала. Участие в практических занятиях. Выполнение домашних заданий. Самостоятельная работа.
	ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и	<b>Знает:</b> области применения дифференциального и интегрального	

	<p>решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике.</p>	<p>исчисления; различные языки программирования.  <b>Умеет:</b>          решать задачи, связанные: с исследованием свойств функций и их производных, с изучением функциональных рядов, с оценкой погрешности аппроксимации функций; применять различные языки программирования в численном анализе.  <b>Владеет:</b>          методами дифференциального исчисления для исследования функций и навыками приложения интегрального исчисления к геометрии, физике</p>	
	<p>ПК-1.3.          Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике и информатике</p>	<p><b>Знает:</b>          методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов; методы исследования сходимости рядов; численные методы анализа; современные информационные технологии.  <b>Умеет:</b>          применять методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов и методы исследования сходимости рядов в численном анализе с использованием современных информационных технологий.  <b>Владеет:</b>          навыками решения задач численного анализа с использованием методов дифференциального и интегрального исчислений</p>	

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет **зачетных единиц 3, академических часов 108.**

#### 4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практ. занятия	лабор. работы	Контр. сам. раб.		
<b>Модуль 1. Теория меры</b>								

<b>Всего по модулю 1</b>	<b>8</b>		<b>4</b>	<b>4</b>			<b>28</b>	Контрольная работа, коллоквиум
1. Основные классы множеств.			1	1			6	
2. Функции множеств. Меры. Продолжении меры			1	1			8	
3. Заряды.			1	1			6	
4. Измеримые функции			1	1			8	
<b>Модуль 2. Абстрактный интеграл Лебега</b>								
<b>Всего по модулю 2</b>	<b>8</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	Контрольная работа, коллоквиум
1. Определение интеграла Лебега и его основные свойства.			2	2			4	
2. Основные предельные теоремы для интеграла Лебега			2	2			4	
3. Связь интегралов Лебега и Римана. Интеграл Лебега-Стилтьеса			2	2			4	
4. Теорема Радона-Никодима.			2	2			2	
5. Произведение мер и теорема Фубини			2	2			2	
<b>Модуль 3. Промежуточная аттестация</b>								
Подготовка к экзамену							36	экзамен
<b>ИТОГО</b>	<b>108</b>		<b>14</b>	<b>14</b>			<b>44+36</b>	<b>36</b>

### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

#### 4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

## Модуль 1. Теория меры

**Тема 1: «Основные классы множеств» и Тема 2: «Функции множеств. Меры. Продолжении меры»**

#### Лекция № 1:

- 1) Полукольцо, полуалгебра, кольцо, алгебра,  $\sigma$ -кольцо,  $\sigma$ -алгебра и монотонный класс.
- 2) Порожденные классы множеств.
- 3) Борелевские множества
- 4) Основные классы функций множеств.
- 5) Меры и их элементарные свойства.
- 6) Примеры мер.
- 7) Продолжение меры с полукольца  $A$  на кольцо  $k(A)$ .
- 8) Внешняя мера.
- 9) Теорема Каратеодори.
- 10) Мера Лебега на прямой.
- 11) Мера Лебега на  $\mathbb{R}^n$ .



### ***Тема 3: «Заряды» и Тема 4: «Измеримые функции»***

#### *Лекция № 2:*

- 1) Определение заряда.
- 2) Разложения Хана и Жордана.
- 3) Измеримые функции.
- 4) Измеримое пространство и измеримые отображения.
- 5) Борелевские функции. Функции, измеримые по Лебегу.
- 6) Простые функции. Критерий измеримости в терминах простых функций.
- 7) Свойства измеримых функций.
- 8) Эквивалентные функции.
- 9) Сходимость почти всюду и сходимость по мере.

## **Модуль 2. Абстрактный интеграл Лебега**

### ***Тема 1: «Определение интеграла Лебега и его основные свойства»***

#### *Лекция №3:*

- 1) Определение интеграла Лебега.
- 2) Элементарные свойства интеграла Лебега.
- 3) Счетная аддитивность интеграла Лебега.
- 4) Другие свойства интеграла Лебега.

### ***Тема 2: «Основные предельные теоремы для интеграла Лебега»***

#### *Лекция №4:*

- 1) Теорема об интегрировании монотонной последовательности.
- 2) Теорема Лебега о сходимости мажорированной последовательности.
- 3) Теорема Витали.

### ***Тема 3: «Связь интегралов Лебега и Римана на отрезке прямой»***

#### *Лекция №5:*

- 1) Интегрируемость по Риману влечет интегрируемость по Лебегу.
- 2) Критерий интегрируемости функции по Риману на отрезке.

### ***Тема 4: «Теорема Радона-Никодима»***

#### *Лекция №6:*

- 1) Абсолютная непрерывность и сингулярность одной меры относительно другой.
- 2) Теорема Радона-Никодима.

### ***Тема 5: «Произведение мер и теорема Фубини»***

#### *Лекция №7:*

- 1) Измеримые множества в произведении пространств.
- 2) Измеримые функции на произведении пространств.
- 3) Произведение мер.
- 4) Теорема Фубини.

#### 4.3.2. Содержание лабораторно-практических занятий по дисциплине

### Модуль 1. Теория меры

**Тема 1: «Основные классы множеств» и Тема 2: «Функции множеств. Меры. Продолжении меры»**

*Практическое занятие № 1:*

- 12) Полукольцо, полуалгебра, кольцо, алгебра,  $\sigma$ -кольцо,  $\sigma$ -алгебра и монотонный класс.
- 13) Порожденные классы множеств.
- 14) Борелевские множества
- 15) Основные классы функций множеств.
- 16) Меры и их элементарные свойства.
- 17) Примеры мер.
- 18) Продолжение меры с полукольца  $A$  на кольцо  $k(A)$ .
- 19) Внешняя мера.
- 20) Теорема Каратеодори.
- 21) Мера Лебега на прямой.
- 22) Мера Лебега на  $\mathbb{R}^n$ .

**Тема 3: «Заряды» и Тема 4: «Измеримые функции»**

*Практическое занятие № 2:*

- 10) Определение заряда.
- 11) Разложения Хана и Жордана.
- 12) Измеримые функции.
- 13) Измеримое пространство и измеримые отображения.
- 14) Борелевские функции. Функции, измеримые по Лебегу.
- 15) Простые функции. Критерий измеримости в терминах простых функций.
- 16) Свойства измеримых функций.
- 17) Эквивалентные функции.
- 18) Сходимость почти всюду и сходимость по мере.

### Модуль 2. Абстрактный интеграл Лебега

**Тема 1: «Определение интеграла Лебега и его основные свойства»**

*Практическое занятие №3:*

- 5) Определение интеграла Лебега.
- 6) Элементарные свойства интеграла Лебега.
- 7) Счетная аддитивность интеграла Лебега.
- 8) Другие свойства интеграла Лебега.

## ***Тема 2: «Основные предельные теоремы для интеграла Лебега»***

### *Практическое занятие №4:*

- 4) Теорема об интегрировании монотонной последовательности.
- 5) Теорема Лебега о сходимости мажорированной последовательности.
- 6) Теорема Витали.

## ***Тема 3: «Связь интегралов Лебега и Римана на отрезке прямой»***

### *Практическое занятие №5:*

- 3) Интегрируемость по Риману влечет интегрируемость по Лебегу.
- 4) Критерий интегрируемости функции по Риману на отрезке.

## ***Тема 4: «Теорема Радона-Никодима»***

### *Практическое занятие №6:*

- 3) Абсолютная непрерывность и сингулярность одной меры относительно другой.
- 4) Теорема Радона-Никодима.

## ***Тема 5: «Произведение мер и теорема Фубини»***

### *Практическое занятие №7:*

- 5) Измеримые множества в произведении пространств.
- 6) Измеримые функции на произведении пространств.
- 7) Произведение мер.
- 8) Теорема Фубини.

## **5. Образовательные технологии**

В основе преподавания дисциплины *Теория меры и интегралов* лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

- 1) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. Лекции по теории меры и интеграла. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2016.
- 2) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. Аддитивные функции множества и смежные вопросы. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.

- 3) Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильеса и его приложения*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.
- 4) Магомедов Г.А., Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Основы теории меры*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 1997.

### Задания для самостоятельной работы

1. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
2. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$  - кольцо в произведении множеств.
3. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
4. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
5. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
6. Свойства аддитивной функции множества.
7. Свойства полной вариации а.ф.м..
8. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
9. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
10. Свойства положительной а.ф.м..
11. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
12. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
13. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
14. Непрерывность конечной положительной меры.
15. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
16. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
17. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
18. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
19. Лебеговский метод продолжения меры.
20. Теорема Хана о продолжении.
21. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
22. Мера Бореля.
23. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
24. Свойства функции ограниченной вариации
25. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
26. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
27. Критерий функции ограниченной вариации.
28. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
29. Определение функции скачков и их свойства.
30. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.

31. Свойства производной неопределенной полной вариации.
32. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
33. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
34. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
35. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
36. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.

### Рефераты, доклады и задания по темам для самостоятельной работы

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
<b>Раздел 1. Основные классы множеств, их свойства и структура</b>	
1. Основные классы множеств	Доклад на тему: Пи-классы и лямбда-классы множеств
2. Порожденные классы множеств	Доклад на тему: Приложения теоремы о монотонном классе
<b>Раздел 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства</b>	
1. Функции множества. Меры.	Реферат на тему: Основные свойства функций множества.
2. Продолжение мер.	Доклад на тему: Измеримость по Каратеодори
<b>Раздел 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента</b>	
1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации	Доклад на тему: функция скачков.
2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации	Доклад на тему: Теорема Хелли
<b>Раздел 4. Теория меры на прямой</b>	
1. Меры Стильтьеса и Бореля-Стилтьеса	Реферат на тему: Построение меры Лебега в $\mathbb{R}^1$
2. Мера Стильтьеса-Лебега	Доклады на темы: 1. Борелевские множества на прямой. 2. Суслинские множества на прямой.

## 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

### 7.1. Типовые контрольные задания

#### Примерный перечень вопросов к коллоквиуму

1. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
2. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
3. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
4. Свойства аддитивной функции множества.
5. Свойства полной вариации а.ф.м..
6. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
7. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
8. Свойства положительной а.ф.м..

9. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда).  
Пространства с мерой .
10. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
11. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
12. Непрерывность конечной положительной меры.
13. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
14. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
15. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
16. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
17. Лебеговский метод продолжения меры.
18. Теорема Хана о продолжении.
19. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
20. Мера Бореля.
21. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
22. Свойства функции ограниченной вариации
23. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
24. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
25. Критерий функции ограниченной вариации.
26. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
27. Определение функции скачков и их свойства.
28. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
29. Свойства производной неопределенной полной вариации.
30. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
31. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
32. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
33. Полнота пространства функций ограниченной вариации.

### **Примерные контрольные работы**

#### **Вариант 1.**

1. Показать, что неотрицательная, аддитивная и сигма-полуаддитивная функция множества, заданная на кольце есть мера на этом кольце.
2. Доказать, что система всех подмножеств произвольного фиксированного множества является сигма-алгеброй.
3. Найдите полную вариацию функции  $y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$  на отрезке  $[a, b]$ .
4. Доказать, что система всех интервалов (включая пустой) на числовой прямой не является полукольцом.
5. Пусть  $R$  – кольцо. Доказать, что если мы возьмём симметрическую разность в качестве сложения и пересечение в качестве умножения, то  $R$  будет коммутативным кольцом в алгебраическом смысле, причем нулем этого кольца является пустое множество.

6. Докажите, что функция  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{n}, \\ -x^2, & x = \frac{1}{n} \end{cases}$  интегрируема по Лебегу на  $[0, 1]$  и найдите  $(L)\int_0^1 f(x)dx$ .

### Вариант 2.

1. Доказать, что неотрицательная, аддитивная и непрерывная снизу на кольце функция множества есть мера на этом кольце.
2. Доказать, что система  $\mathcal{B}$  всех конечных подмножеств заданного множества  $A$  является кольцом.
3. Найдите полную вариацию функции  $y = \sin 2x - \cos x$  на отрезке  $[0, \pi]$ .
4. Доказать, что система всех отрезков (с добавлением пустого множества) на числовой прямой не является полукольцом.
5. Построить систему множеств, которая замкнута относительно операций пересечения и объединения, но не является даже полукольцом.

6. Докажите, что функция  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in I \cap [1; 2], \\ 2x, & x \in I \cap [0; 1], \\ \sin x, & x \in Q \end{cases}$  интегрируема по Лебегу на  $[0, 2]$  и найдите  $(L)\int_0^2 f(x)dx$ .

### Вопросы для самостоятельной работы

1. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
2. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$ -кольцо в произведении множеств.
3. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
4. Борелевская  $\sigma$ -алгебра множеств.
5. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
6. Свойства аддитивной функции множества.
7. Свойства полной вариации а.ф.м..
8. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
9. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
10. Свойства положительной а.ф.м..
11. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой.
12. Свойства  $\sigma$ -а.ф.м..
13. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
14. Непрерывность конечной положительной меры.
15. Теорема Хана о разложении вещественной меры.

16. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
17. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
18. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
19. Лебеговский метод продолжения меры.
20. Теорема Хана о продолжении.
21. Теорема Александра о продолжении регулярной меры.
22. Мера Бореля.
23. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
24. Свойства функции ограниченной вариации
25. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
26. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
27. Критерий функции ограниченной вариации.
28. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
29. Определение функции скачков и их свойства.
30. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
31. Свойства производной неопределенной полной вариации.
32. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
33. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
34. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
35. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
36. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.

### **Вопросы к экзамену по дисциплине**

1. Основные системы множеств. Минимальные классы множеств, содержащие данную систему множеств.
2. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
3. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$  - кольцо в произведении множеств.
4. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
5. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
6. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
7. Свойства аддитивной функции множества.
8. Свойства полной вариации а.ф.м..
9. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
10. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
11. Свойства положительной а.ф.м..
12. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
13. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
14. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
15. Непрерывность конечной положительной меры.



16. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
17. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
18. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
19. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
20. Лебеговский метод продолжения меры.
21. Теорема Хана о продолжении.
22. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
23. Мера Бореля.
24. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
25. Свойства функции ограниченной вариации
26. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
27. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
28. Критерий функции ограниченной вариации.
29. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
30. Определение функции скачков и их свойства.
31. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
32. Свойства производной неопределенной полной вариации.
33. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
34. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
35. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
36. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
37. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.
38. Условия сходимости последовательности функций ограниченной вариации к функции ограниченной вариации.
39. Условия поточечной сходимости последовательности функций ограниченной вариации к функции ограниченной вариации.
40. Принцип выбора Э.Хелли.
41. Меры Бореля-Стилтьеса и Лебега-Стилтьеса.
42. Характеристика борелевских мер.

## **7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

### *Основная литература:*

#### *Основная*

- 1) Канторович Л.В. Функциональный анализ / Канторович, Леонид Витальевич. - 2-е изд., перераб. - М. : Наука, 1977. - 741 с. : ил. ; 22 см. - Список лит.: с.719-730. - Указ. предм.: и обозначений: с. 731-741. - 3-20.
- 2) Рамазанов А. К. Лекции по теории меры и интеграла : учеб. пособие / Рамазанов А. К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2016. - 279,[2] с. - 389-50.
- 3) Магомедов Г.А. Основы теории меры : учебное пособие / Магомедов Г.А., Р. К. Рагимханов, М. М. Сиражудинов. - Махачкала : ИПЦ ДГУ, 1997. - 149 с. - 10-00.
- 4) Рамазанов А.К. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов. Ч.1 / Рамазанов А.К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2013. - 318,[1] с. - 222-00.
- 5) Данилин А.Р. Функциональный анализ для магистрантов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Данилин А.Р.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2013.— 192 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/66614.html>.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)
- 6) Дороговцев А.Я. Элементы общей теории меры и интеграла: учебник / Дороговцев А.Я. – Киев: Выща шк. Головное изд-во, 1989. – 152 с. – 2 ил. – Библиогр.: 16 назв. – ISBN 5-11-001190-7.

#### *Дополнительная*

- 7) Фёдоров В.М. Курс функционального анализа : учебник / Фёдоров В. М. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 351 с. ; 20 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 351. - ISBN 5-8114-0589-8 : 187-66.
- 8) Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : [учебное пособие для вузов] / Кириллов А.А., А. Д. Гвишиани. - М. : Наука, 1979. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 369-372. - Предм. указ.: с. 373-377. - 1-10.
- 9) Глазырина П.Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Глазырина П.Ю., Дейкалова М.В., Коркина Л.Ф.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016.— 216 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/66213.html>.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

## 9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный	Содержание
---	----------	-------------	------------

		<b>адрес</b>	
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	<p><b>Студентам:</b></p> <p>- запустить установленный у Вас математический пакет выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакет подходящий и решить свою задачу по аналогии;</p> <p><b>Преподавателям:</b></p> <p>- использовать математические пакеты для поддержки курса лекций.</p> <p><b>Всем заинтересованным пользователям:</b></p> <p><b>1.</b> – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе. <b>2.</b> – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.</p>
3.	Математика	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	http://elib.dgu.ru, http://edu.icc.dgu.ru	
6.	Общероссийский математический портал (Math-Net.Ru)	www.mathnet.ru	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

## 10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Дисциплина «Теория меры и интегралов» является основной частью, изучаемых будущими студентами. Специфика дисциплины состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач.

На лекциях особенно большое значение имеет реализация следующих задач:

- 1) глубокое осмысливание ряда понятий и положений, введенных в теоретическом курсе;
- 2) раскрытие прикладного значения теоретических сведений;
- 3) развитие творческого подхода к решению практических и некоторых теоретических вопросов;
- 4) закрепление полученных знаний путем многократного практического использования;
- 5) приобретение прочных навыков типовых расчетов;
- 6) расширение кругозора, приобретение полезных сведений, касающихся технических данных реальных объектов и конкретных условий их эксплуатации.

Наряду с перечисленными выше образовательными целями, занятия преследуют и важные цели воспитательного характера, а

именно:

- а) воспитание настойчивости в достижении конечной цели;
- б) воспитание дисциплины ума, аккуратности, добросовестного отношения к работе;
- в) воспитание критического отношения к своей деятельности, умения анализировать свою работу, искать оптимальный путь решения, находить свои ошибки и устранять их.

Учебная программа дисциплине *теория меры и интегралов* распределена по темам и по часам на лекции, практические и лабораторные занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

### **Методические рекомендации**

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить следующие литературные источники:

- 1) Колмогоров А., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1976.
- 2) Федоров В.М. Теория функций и функционального анализа ч.1, - М.: изд. МГУ, 2000.
- 3) Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильбеса и его приложения.* Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.
- 4) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. Аддитивные функции множества и смежные вопросы. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.

Решать задачи и упражнения из учебных пособий

- 1) Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

- 2) Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П. Действительный анализ в задачах. М., 2005.
- 3) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева «Задачи и упражнения по функциональному анализу» Наука 2002

Для проверки остаточных знаний использовать тесты и вопросы для самопроверки

Для подготовки к экзамену: повторить лекционный материал, проанализировать список рекомендованной литературы, решить самостоятельно задачи и примеры из учебного пособия: Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по предмету рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

### **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины математический анализ. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.