МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Функциональный анализ

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) программы

Информатика и компьютерные науки

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Форма обучения **заочная**

Статус дисциплины: <u>входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений</u>

Махачкала, 2022

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки *44.03.01 – Педагогическое образование (уровень бакалавриата)* от 22.02.2018 г. № 121.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,

Меджидов З.Г., к. ф.-м. н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры ДУиФА от «15» марта 2022 г.,
протокол № 8

Зав. кафедрой __________ Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук «23» марта 2022 г., протокол № 7.

Председатель __________ Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ __________ Гасангаджиева А.Г.

Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины ... 4

1. Цели освоения дисциплины ... 5
2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата ... 5
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения ... 6
4. Объем, структура и содержание дисциплины. ... 8
5. Образовательные технологии ... 11
6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. ... 12
7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины ... 15
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины ... 19
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины. ... 20
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины. ... 20
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем. ... 21
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине. ... 21

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Функциональный анализ» входит в часть ОПОП бакалавриата, формируемую участниками образовательных отношений по направлению 44.03.01 Педагогическое образование

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с метрическими и нормированными пространствами, теорией операторов. Изучаемый материал применяется в задачах математической физики, в теории интегральных уравнений, в общей теории приближенных методов и т.д. Дисциплина «Функциональный анализ» необходимо изучать для овладения общими методами решения операторных уравнений и применения их при решении конкретных задач.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

универсальных УК-1, профессиональных – ПК-2.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа*.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме *коллоквиумов, контрольных работ*, промежуточный контроль в форме *экзамена*.

Объем дисциплины 5 зачетных единиц, в том числе 180 академических часов, распределенных по видам учебных занятий:

<table>
<tr><th rowspan="5">Семестр</th><th colspan="7">Учебные занятия</th><th rowspan="5">Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)</th></tr>
<tr><th rowspan="4">Всего</th><th colspan="6">в том числе</th></tr>
<tr><th colspan="5">Контактная работа обучающихся с преподавателем</th><th rowspan="3">СРС, в том числе экзамен</th></tr>
<tr><th colspan="5">из них</th></tr>
<tr><th>Лекции</th><th>Лабораторные занятия</th><th>Практические занятия</th><th>КСР</th><th>Консультации</th></tr>
<tr><td>6</td><td>108</td><td>16</td><td></td><td>16</td><td></td><td></td><td>67+9</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>72</td><td>6</td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>51+9</td><td>Экзамен</td></tr>
</table>

1. Цели освоения дисциплины

- ✓ овладение теорией метрических и нормированных пространств;
- ✓ ознакомление с фундаментальными свойствами основных функциональных пространств и операторов, действующих в них;
- ✓ творческое овладение общими методами исследования и решения операторных уравнений;
- ✓ ознакомление с прикладными аспектами функционального анализа.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина *Функциональный анализ* входит в часть ОПОП бакалавриата, формируемую участниками образовательных отношений по направлению 44.03.01 Педагогическое образование.

Курс функционального анализа преподается на 3 и 4 курсах, после изучения математического анализа, дифференциальных уравнений, алгебры и геометрии. Функциональный анализ преподается параллельно с курсами «Уравнения в частных производных» и «Теория функций комплексного переменного». Это позволяет иллюстрировать свойства обратных операторов, сопряженных операторов, ограниченных и неограниченных операторов на конкретных примерах краевых задач для уравнений математической физики.

К учебным дисциплинам, так или иначе влияющим на качество получаемых знаний по данной дисциплине, относятся:

- Математический анализ – основная дисциплина для профессионального математика, изучающая предельные переходы в бесконечно малых и бесконечно больших величинах, дифференциальное и интегральное исчисление, для представления решений дифференциальных уравнений как пределы последовательностей или суммы бесконечных рядов.
- Геометрия и алгебра – позволяющая отработать навыки геометрического представления абстрактных метрических и топологических пространств, для успешного восприятия линейных вполне непрерывных операторов в бесконечномерных гильбертовых пространствах.

Освоение данной дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин "Методы вычислений", "Вариационное исчисление".

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения.

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций *(в соответствии с ОПОП)*	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**УК-1.1.** Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формулирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение.	*Знает*: основные принципы и методы критического анализа. *Умеет*: получать новые знания на основе анализа, синтеза; применять логические формы и процедуры; реконструировать и анализировать план построения собственной или чужой мысли; выделять его состав и структуру; *Владеет*: способностью исследовать проблемы, связанные с профессиональной деятельностью, с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; сознательно планировать, регулировать и контролировать свое мышление; способностью оценивать логическую правильность мыслей; готовностью применять системный подход при принятии решений в профессиональной деятельности.	Контрольные работы, коллоквиум
	УК-1.2. Принимает логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	*Знает*: методы поиска источников информации и анализа проблемной ситуации. *Умеет*: собирать информацию по научным проблемам, относящимся к профессиональной области; осуществлять поиск решений проблемы; сравнивать преимущества разных вариантов решения проблемы и оценивать их риски. *Владеет*: способностью выявлять научные проблемы и выбирать адекватные методов для их решения; способностью исследовать проблемы профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности.	
	УК-1.3 Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений.	*Знает*: методы поиска источников информации и анализа проблемной ситуации. *Умеет*: собирать информацию по научным проблемам, относящимся к профессиональной области; осуществлять поиск решений проблемы; сравнивать преимущества разных вариантов реше-	

		ния проблемы и оценивать их риски. *Владеет*: способностью выявлять научные проблемы и выбирать адекватные методов для их решения; способностью исследовать проблемы профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности.	
ПК-2 Способен осуществлять целенаправленную воспитательную деятельность.	**ПК-2.1** Демонстрирует умение постановки воспитательных целей, проектирования воспитательной деятельности и методов ее реализации в соответствии с требованиями ФГОС ВО и спецификой учебного предмета. **ПК-2.2** Демонстрирует способы организации и оценки различных видов внеурочной деятельности ребенка (учебной, игровой, трудовой, спортивной, художественной и т.д.), методы и формы организации коллективных творческих дел, экскурсий, походов, экспедиций и других мероприятий по выбору). **ПК-2.3** Выбирает и демонстрирует способы оказания консультативной помощи родителям (законным представителям) обучающихся по вопросам воспитания, в том числе родителям детей с особыми образовательными потребностями.	*Знает*: требования к организации образовательного процесса по математике; структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного предмета «Математика» *Умеет*: формулировать дидактические цели и задачи обучения математике и реализовывать их в образовательном процессе; планировать и реализовывать различные организационные средства и формы в процессе обучения математики (урок, экскурсию, домашнюю, внеклассную и внеурочную работу); обосновывать выбор методов обучения математике и образовательных технологий, исходя из особенностей содержания учебного материала, возраста и образовательных потребностей обучаемых. *Владеет*: предметным содержанием математики; умениями отбора вариативного содержания с учетом взаимосвязи урочной и внеурочной форм обучения математике; умениями по планированию и проектированию образовательного процесса; способностью применять различные методы обучения и современные образовательные технологии в образовательном процессе в области математики	Контрольные работы, коллоквиум, экзамен

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации
				Лекции	**Практ. занятия**	**Лабор. занятия**	**Контр. сам. раб**	**Самост. работа**	
Третий курс, 2 семестр									
	Модуль 1. ***Линейные нормированные и гильбертовы пространства***								
1	Линейное нормированное пространства. Банахово пространство.	6	1-2	4	4			12	*Устный опрос*
2	Евклидовы и гильбертовы пространства	6	3-4	2	2			12	*Контрольная работа*
	Итого по модулю 1			**6**	**6**			**24**	***Коллоквиум***
	Модуль 2. ***Мера и интеграл Лебега***								
3	Измеримые функции	6	5	2	2			10	
4	Интеграл Лебега	6	6-7	4	4			12	
	Итого по модулю 2			**6**	**6**			**22**	
	Модуль 3. ***Линейные операторы***								
5	Линейные ограниченные операторы.	6	8	2	2		2	11	*Устный опрос*
6	Обратный оператор	6	9	2	2			10	
	Итого по модулю 3			**4**	**4**			**21**	
	Итого за 3 курс			**16**	**16**			**67+9**	
	Модуль 4. ***Линейные функционалы***								
7	Сопряженное пространство	7	1	*1*	*1*			*10*	
8	Сопряженные операторы	7	1	*1*	*1*			*10*	
	Итого по модулю 4			**2**	**2**		5	**20**	*Коллоквиум*
	Модуль 5. ***Вполне непрерывные операторы и уравнения с ними***								
9	Понятие компактного	7	2	1	1			10	*Устный*

	множества и критерии компактности								*опрос*
10	Вполне непрерывные операторы и их применение	7	3	2	2			10	*Контрольная работа*
11	Спектр и резольвента	7	4	1	1			11	
	Подготовка к экзамену							***9***	*Экзамен*
	Итого по модулю 5			**4**	**4**			***31+9***	
	Итого за 4 курс			**6**	**6**		**9**	**51+9**	

4.3. Содержание разделов учебной дисциплины

4.3.1. Содержание лекционных занятий

Модуль 1. Линейные нормированные и гильбертовы пространства

Тема 1. Метрические и линейные нормированные пространства.

Метрическое и линейное нормированное пространства. Открытые и замкнутые множества. Сходимость. Сепарабельные и банаховы пространства. Лемма о вложенных шарах. Принцип сжимающих отображений.

Тема 2. Гильбертово пространство.

Евклидово и гильбертово пространства. Неравенство Коши-Шварца. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств. Ряды Фуре по ортогональной системе.

Модуль 2. Мера и интеграл Лебега

Тема 3. Измеримые функции

Измеримые множества. Мера и его свойства. Измеримые функции и их свойства.

Тема 4. Интеграл Лебега

Функции, интегрируемые по Лебегу. Свойства интеграла Лебега. Связь с интегралом Римана.

Модуль 3. Линейные операторы

Тема 5. Линейные ограниченные операторы.

Линейные ограниченные операторы и функционалы. Пространство линейных ограниченных операторов.

Тема 6. Обратный оператор

Обратный оператор. Непрерывная обратимость линейного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе.

Модуль 4. Линейные функционалы

Тема 7. Сопряженное пространство

Сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

Тема 8. Сопряженные операторы

Сопряженные операторы и их свойства. Самосопряженные операторы.

Модуль 5. Вполне непрерывные операторы и уравнения с ними

Тема 9. Понятие компактного множества и критерии компактности

Компактные и предкомпактные множества. Теорема Хаусдорфа. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Теорема Арцела.

Тема 10. Вполне непрерывные операторы и их применение.

Вполне непрерывные операторы. Свойства вполне непрерывных операторов. Компактность интегральных операторов с вырожденным и непрерывным ядрами. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве.

Тема 11. Спектр и резольвента.

Спектр оператора в конечномерном и бесконечномерном пространствах. Регулярное множество. Резольвента оператора. Спектральный радиус. Спектр компактного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.

4.3.2. Содержание практических занятий

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час)
	Модуль 1.	**Линейные нормированные и гильбертовы пространства**	
1.		Метрическое и линейное нормированное пространства. Банахово пространство. Евклидово и гильбертово пространства. Ряды Фуре по ортогональной системе.	8
	Модуль 2	**Мера и интеграл Лебега**	
		Измеримые множества. Мера и его свойства. Измеримые функции и их свойства. Функции, интегрируемые по Лебегу. Свойства интеграла Лебега. Связь с интегралом Римана.	
	Модуль 3.	**Линейные операторы**	
2.		Линейные ограниченные операторы и функционалы. Пространство линейных ограниченных операторов. Обратный оператор. Непрерывная обратимость линейного оператора	8
	Модуль 4	**Линейные функционалы**	
		Сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Сопряженные и самосопряженные операторы.	
	Модуль 5	**Вполне непрерывные операторы и уравнения с ними**	
		Компактные и предкомпактные множества. Теоремы Больцано-Вейерштрасса и Арцела. Вполне непрерывные операторы. Компактность интегральных операторов с вырожденным и непрерывным ядрами. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве. Спектр оператора. Регулярное множество. Резольвента оператора. Спектральный радиус. Спектр компактного оператора.	
	Итого		22

5. Образовательные технологии

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела.
При проведении отдельных занятий материал может параллельно транслироваться на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мульмедиа-

проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации презентаций).

В процессе преподавания дисциплины применяются такие виды лекций, как вводная обзорная лекция, проблемная лекция, лекция визуализация с использованием компьютерной презентационной техники. Для этого на факультете математики и компьютерных наук имеются специальные, оснащенные такой техникой, лекционные аудитории.

По теме «Линейные ограниченные операторы» целесообразно провести мастер-класс с приглашением специалистов по линейной алгебре и дифференциальным уравнениям.

При прохождении темы «Непрерывная обратимость линейных операторов» предполагается встреча со специалистами по дифференциальным уравнениям из ДГПУ и ДНЦ РАН.

Вузовская лекция должна выполнять не только информационную функцию, но также и мотивационную, воспитательную и обучающую.

Информационная функция лекции предполагает передачу необходимой информации по теме, которая должна стать основой для дальнейшей самостоятельной работы студента

Мотивационная функция должна заключаться в стимулировании интереса студентов к науке. На лекции необходимо заинтересовать, озадачить студентов с целью выработки у них желания дальнейшего изучения той или иной математической проблемы.

Воспитательная функция ориентирована на формирование у молодого поколения чувства ответственности, закладку нравственных, этических норм поведения в обществе и коллективе, формирование патриотических взглядов, мотивов социального поведения и действий, естественнонаучного мировоззрения.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Для успешного освоения отдельных разделов рекомендуется выполнить в письменном виде и сдать преподавателю по одной самостоятельной работе. Ниже приведены примерные варианты самостоятельных работ. При выполнении заданий рекомендуется использовать учебно-методические пособия [9], [10], учебные пособия [1], [4], [5] из списка рекомендованной литературы (п. 8 настоящей Программы).

6.1. Примерные варианты самостоятельных работ по теме «Линейные нормированные и метрические пространства»

Вариант 1

1. Доказать, что замыкание $[A]$ множества A есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A.

2. Сходится ли в $C^1[0,1]$ последовательность $x_n(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}$?
3. Доказать, что в $CL_1[0,1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой $\|x\|=\int_0^1|x(t)|dt$ этого пространства.
4. Доказать, что любое конечное множество метрического пространства замкнуто.
5. Доказать, что равномерно ограниченное множество функций $M\subset C[a,b]$, удовлетворяющее условию Липшица с общей постоянной, компактно в $C[a,b]$.
6. Проверить, можно ли на вещественной прямой метрику задать равенством:

   a) $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$; b) $\rho(x,y)=|x^2-y^2|$; c) $\rho(x,y)=|\sin x-\sin y|$.

Вариант 2

1. Доказать, что множество изолированных точек сепарабельного пространства не более чем счетное.
2. Банахово пространство X изоморфно линейному нормированному пространству Y. Доказать, что Y – банахово пространство.
3. Пусть $x_n(t)\in C[a,b]$, $n=1,2,\ldots$ – равностепенно непрерывное множество функций и $x_n(t)\to x_0(t)$, $n\to\infty$, для любого $t\in[a,b]$. Доказать, что $x_0(t)\in C[a,b]$.
4. Пусть L – подпространство гильбертова пространства H, $L\neq H$. Доказать, что существует $x\in H$ такой, что $x\perp L$.
5. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t)\equiv 1$, $x_1(t)=t$, $x_2(t)=t^2, x_3(t)=t^3$ в пространстве $CL_2[-1,1]$.
6. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $x(t)$ таких, что

   $$|x(a)|\le k_1,\ \int_a^b|x'(t)|^2dt\le k_2$$

   ($k_1\ge 0,\ k_2>0$ – константы) относительно компактно в $C[a,b]$.
7. Доказать, что всякое множество, предкомпактное в пространстве $C^1[a,b]$, является предкомпактным и в пространстве $C[a,b]$.

6.2. Примерные варианты самостоятельных работ по теме «Линейные ограниченные операторы»

Вариант 3

1. Доказать формулу для нормы ограниченного линейного оператора $A:X\to Y,\ X,Y$ - ЛНП, $D(A)=X$: $\|A\|=\sup\limits_{x\in X,\|x\|=1}\|Ax\|$.

2. Доказать ограниченность линейного оператора $A: CL_2[0,1] \to CL_2[0,1]$, $Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)d\tau$ и найти его норму.
3. В пространстве $C^1[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$ и оператор $A: L \to C[0,1]$, $Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt} + tx(t)$. Доказать, что A – непрерывно обратим.
4. Доказать, что функционал $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}x_k$, $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_1$, является линейным ограниченным, и найти его норму.
5. Доказать, что оператор $\Phi: L(X,Y) \to R$, $\Phi(A) = \|A\|$, непрерывен.
6. Пусть $A: X \to Y$ – замкнутый линейный оператор, $R(A) = Y$ и A^{-1} существует. Доказать, что $A^{-1} \in L(X,Y)$.
7. В пространстве $C^1[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$ и оператор $A: L \to C[0,1]$,
$$Ax(t) = \frac{dx}{dt} + a(t)x(t),\ a(t) \in C[0,1].$$
Доказать, что A непрерывно обратим и найти A^{-1}.

6.3. Другие виды самостоятельной работы, распределенные по темам, со ссылками на рекомендуемую литературу

Разделы (модули) и темы для самостоятельного изучения	*Виды и содержание самостоятельной работы*
Модуль 1. Линейные нормированные и гильбертовы пространства	
1. Метрическое и линейное нормированное пространства. Банахово пространство.	Рефераты на темы: 1. Применение принципа сжимающих отображений к решению функциональных уравнений ([1], [2], [5]). 2. Применение принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений ([1], [2], [5]).
2. Евклидовы и гильбертовы пространства.	Доклады на темы: 1. Построение элемента наилучшего приближения элементами подпространства ([3], [5]). 2. Разложение функций по ортогональным системам ([1], [2], [5]).
Модуль 3. Линейные операторы в линейных нормированных и гильбертовых пространствах	
1. Линейные ограниченные операторы и функционалы. Сопряженное пространство.	Решение задач и упражнений ([4], [7], [8], [10]).

2. Линейные операторы и линейные функционалы в гильбертовом пространстве.	Решение задач и упражнений ([4], [7], [8], [10]).
3. Интегральные операторы Фредгольма и Вольтерра	Доклад на тему: Некоторые применения интегральных уравнений типа Вольтерра ([1], [5]).

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Типовые контрольные задания

7.1.1. Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу «Линейные ограниченные операторы и функционалы. Сопряженное пространство»

1. Линейные ограниченные операторы и функционалы.
2. Формулы для нормы оператора и функционала.
3. Линейные ограниченные операторы и функционалы в конечномерном пространстве.
4. Линейные ограниченные операторы и функционалы в пространстве непрерывных функций.
5. Линейные ограниченные операторы и функционалы в пространстве числовых последовательностей.
6. Пространство линейных ограниченных операторов и его полнота.
7. Два вида сходимости в пространстве линейных ограниченных операторов.
8. Принцип равномерной ограниченности линейных операторов.
9. Будет ли линейный функционал $f(x) = x'\left(\frac{1}{2}\right)$, определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций из $C[0;1]$, ограниченным? Если да, то найти его норму.
10. Доказать, что если линейный оператор $A: X \to X$ не является ограниченным в одной из двух эквивалентных норм, то он не будет ограниченным и в другой норме.
11. Доказать, что всякий линейный оператор, заданный на конечномерном пространстве, ограничен.
12. Сопряженное пространство. Два вида сходимости последовательности непрерывных линейных функционалов.
13. Слабая ограниченность и слабая сходимость.
14. Теорема Хана-Банаха. Следствия.

1. Обратный оператор. Непрерывная обратимость линейного оператора.
2. Теорема Банаха об обратном операторе.
3. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

15. Доказать, что в конечномерном пространстве всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.
16. Исследовать на сходимость последовательность операторов $A_n: l_2 \to l_2$, $A_n x = A_n(x_1, x_2, \dots) = (0,0, \dots, x_n, 0,0, \dots)$.
17. Доказать, что оператор $A: C[0;1] \to C[0;1]$, $Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)d\tau$, является линейным ограниченным и найти его норму.

7.1.2. Примерные вопросы к экзамену по дисциплине

1. Метрическое и линейное нормированное пространства. Примеры: $\mathbb{R}^n, C[a;b], CL_p[a;b], l_p, C^k[a;b]$.
2. Открытые и замкнутые множества. Сходимость в основных функциональных пространствах.
3. Банаховы пространства. Лемма о вложенных шарах.
4. Теорема Бэра о категориях.
5. Принцип сжимающих отображений и его применение.
6. Теорема о пополнении.
7. Гильбертово пространство. Примеры. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве.
8. Практический способ построения элемента наилучшего приближения элементами подпространства.
9. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств.
10. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.
11. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
12. Компактность и сепарабельность в ЛНП. Критерий конечномерности ЛНП.
13. Равномерно ограниченные и равностепенно непрерывные семейства непрерывных функций. Теорема Арцела.
14. Линейные ограниченные операторы и функционалы. Норма оператора и функционала.
15. Сопряженное пространство. Два вида сходимости последовательности непрерывных линейных функционалов.
16. Слабая ограниченность и слабая сходимость.
17. Теорема Хана-Банаха.
18. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор в евклидовом пространстве.
19. Обратный оператор. Непрерывная обратимость линейного оператора.
20. Теорема Банаха об обратном операторе.
21. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
22. Компактные операторы. Спектр компактного оператора.
23. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве.
24. Спектр самосопряженного оператора.

25. Интегральные уравнения второго рода. Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции.
26. Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода с вырожденным и симметричным ядрами.
27. Компактность интегральных операторов с непрерывным ядром.
28. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.
29. Решение интегральных уравнений Вольтерра второго рода с вырожденным и симметричным ядрами.

7.1.3. Примерные варианты контрольных работ по теме «Линейные ограниченные операторы»

Вариант 1

8. Доказать формулу для нормы ограниченного линейного оператора $A: X \to Y,\ X,Y$ - ЛНП, $D(A) = X:\ \|A\| = \sup\limits_{x \in X, \|x\|=1} \|Ax\|$.
9. Доказать ограниченность линейного оператора $A: CL_2[0,1] \to CL_2[0,1]$, $Ax(t) = t\int\limits_0^1 x(\tau)d\tau$ и найти его норму.
10. В пространстве $C^1[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$ и оператор $A: L \to C[0,1]$, $Ax(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} + tx(t)$. Доказать, что A – непрерывно обратим.
11. Доказать, что функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k$, $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_1$, является линейным ограниченным, и найти его норму.
12. Доказать, что оператор $\Phi: L(X,Y) \to R,\ \Phi(A) = \|A\|$, непрерывен.
13. Пусть $A: X \to Y$ – замкнутый линейный оператор, $R(A) = Y$ и A^{-1} существует. Доказать, что $A^{-1} \in L(X,Y)$.
14. В пространстве $C^1[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$ и оператор $A: L \to C[0,1]$,
$$Ax(t) = \frac{dx}{dt} + a(t)x(t),\ a(t) \in C[0,1].$$
Доказать, что A непрерывно обратим и найти A^{-1}.

Вариант 2

1. Пусть $A: l_2 \to l_1,\ Ax = x,\ D(A) = \{x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$. Найти $D(A^*)$ и A^*.
2. Доказать, что функционал $f: l_1 \to R,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{k}) x_k$ ограничен и найти его норму.
3. Доказать, что сопряженное к нормированному пространству – банахово.
4. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 e^{s+t} x(s) ds$ непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}.

5. Пусть линейный функционал f определен на вещественном ЛНП X и неограничен. Доказать, что в любой окрестности нуля он принимает все вещественные значения.
6. Доказать, что ядро $KerA$ ограниченного линейного оператора $A: X \to Y$ является подпространством в X.
7. Доказать, что функционал $f(x)=\int_{-1}^{1} x(\frac{|t-1|}{2})dt$ является линейным непрерывным на $C[0,1]$ и найти его норму.
8. Пусть X – линейное пространство $A, B: X \to X$ – линейные операторы с $D_A = D_B = X$, удовлетворяющие соотношениям $AB + A + I = 0, BA + A + I = 0$. Доказать, что оператор A^{-1} существует.

7.1.4. Задачи к коллоквиуму по модулю 2 «Мера и интеграл Лебега»

1. Доказать, что если B – множество меры нуль, то $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A \setminus B) = \mu^*(A)$.
2. Существует ли замкнутое подмножество отрезка [a,b], отличное от всего отрезка, имеющее меру Лебега b-a.
3. Доказать, что если две функции, определенные на X, отличаются друг от друга на множестве меры нуль, то они либо обе измеримы, либо обе неизмеримы.
4. Проверить по определению, будет ли измеримой функция $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)},\ x \in (0,1)$.
5. Верно ли, что если E – множество меры нуль на [a,b], то характеристическая функция χ_E этого множества интегрируема по Риману на [a,b].
6. Доказать, что если $\mu^* E = 0$, то E измеримо.
7. Пусть $\{A_n\}_{n\ge 1}$ - последовательность измеримых множеств в $\mathbf{R^n}$, $A_n \supset A_{n+1},\ \forall n$. Доказать, что множество $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо, причем $\mu(A)=\lim \mu(A_n)$.
8. Показать, что если множество E неизмеримо, то ее характеристическая функция χ_E неизмерима.
9. Доказать, что любая монотонная на отрезке [a,b] функция измерима на этом отрезке.
10. Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ для x иррациональных, больших 1/3,} \\ x^3 \text{ для x иррациональных, меньших 1/3,} \\ 0 \text{ для x рациональных.} \end{cases}$ интегрируема по Лебегу и найти ее интеграл на отрезке [0;1].
11. Доказать, что если множество $E \subset \mathbf{R^n}$ содержит внутреннюю точку, то его мера Лебега больше нуля.
12. Доказать, что если φ - конечно-аддитивная неотрицательная функция множеств, заданная на кольце R, то из равенства $\varphi(A_1 \Delta A_2)=0,\ A_1, A_2 \in R$, следует, что $\varphi(A_1)=\varphi(A_2)$.
13. Пусть $\chi(x)$ - характеристическая функция множества рациональных чисел. Доказать, что ее произведение на любую функцию есть функция измеримая.
14. Определить, будет ли функция $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ если x иррационально,} \\ n, \text{ если } x=\dfrac{m}{n} \end{cases}$ измеримой.
15. Доказать свойство интеграла Лебега: если $f \in L(\mu)$ на E, а A – измеримое множество, $A \subset E$, то $f \in L(\mu)$ на A.

16. Доказать неравенство $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right| \le \mu^*(A\Delta B)$.
17. Доказать, что измеримые по Лебегу множества меры нуль в $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ образуют σ - кольцо.
18. Доказать, что функция Дирихле измерима на любом измеримом множестве.
19. Пусть f измерима и не обращается в нуль. Доказать, что функция 1/f измерима.
20. Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{если x рациональн о,} \\ -x^2, \text{если x иррационал ьно} \end{cases}$ интегрируема по Лебегу и найти ее интеграл на отрезке [0;1].
21. Пусть $\{A_n\}_{n\ge1}$ - последовательность измеримых множеств в $\mathbf{R}^\mathbf{n}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n$. Доказать, что множество $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо, причем $\mu(A)=\lim \mu(A_n)$.
22. Пусть А – счетное ограниченное множество в $\mathbf{R}^\mathbf{n}$. Доказать, что $\mu^*(A)=0$, где μ^* - внешняя мера, соответствующая m.
23. Пусть X – измеримое пространство, $f: X \to \overline{R}$. Доказать, что f измерима тогда и только тогда, когда для любого борелевского множества $B \subset R$ множество $f^{-1}(B)$ измеримо.
24. Доказать, что кусочно-непрерывная на отрезке [a;b] функция измерима относительно меры Лебега на числовой прямой.
25. Доказать свойство интеграла Лебега: если $\mu(E)=0$, а f измерима, то $\int_E f d\mu = 0$.

7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля – 50% и промежуточного контроля – 50%.
Текущий контроль по дисциплине включает:
- посещение занятий – 10 баллов,
- участие на практических занятиях – 10 баллов,
- коллоквиум – 40 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:
- устный опрос – 50 баллов,
- письменная контрольная работа – 50 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1989.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
3. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

4. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

б) дополнительная литература:

5. Меджидов З.Г. Методические указания и задачи по курсу "Интегральные уравнения". Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1999.
6. Константинов Р.В. Лекции по функциональному анализу. Долгопрудный, 2007.
7. Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р. К. Функциональный анализ. Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2010.
8. Глазырина П.Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Глазырина П.Ю., Дейкалова М.В., Коркина Л.Ф.– Электрон. текстовые данные.– Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016.– 216 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/66213.html. – ЭБС «IPRbooks».

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

2319 http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Дисциплина «Функциональный анализ» является основной базой всех математических дисциплин, изучаемых будущими бакалаврами. Специфика дисциплины состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач из разных разделов высшей математики. Эти задачи служат иллюстрацией отдельных понятий, теорем и методов функционального анализа.

Систематическое изложение научных материалов, освещение главных тем данной дисциплины проводится в ходе лекционного курса. Изучение теоретического курса выполняется самостоятельно каждым студентом по итогам каждой из лекций, используя конспект (электронный) лекций, учебники, представленные в разделе 8 «Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины», результаты контролируются преподавателем на практических занятиях.

Если возникают вопросы, следует обратиться на кафедру к преподавателю, согласно графику консультаций ведущего преподавателя. Обращаясь за консультацией, необходимо указать, каким учебником пользовались и какой раздел, глава, параграф вам не понятен.

Решения задач и самостоятельные работы по заданию (индивидуальному, где требуется) преподавателя сдаются в конце каждой зачетной единицы.

Для сдачи зачетной единицы «Линейные нормированные и гильбертовы пространства» необходимо проанализировать лекционный материал с использованием источников литературы, предварительно повторить темы "Векторы и операции над ними", «Модуль комплексного числа и его свойства».

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить соответствующий теоретический материал из следующих литературных источников:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1989.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Решать задачи и упражнения из учебных и учебно-методических пособий:

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.;
2. Меджидов З.Г. Методические указания и задачи по курсу "Интегральные уравнения". Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1999.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине: «Функциональный анализ» необходимы:
Системное программное обеспечение: ОС Windows XP/7/8/10;
Прикладное программное обеспечение: MSOffice 2007/10/13;
Сетевые приложения: электронная почта, поисковые системы Google, Yandex.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для проведения лекционных занятий на факультете необходима аудитория на 25-35 мест, оборудованная ноутбуком, экраном и цифровым проектором.