МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Теория операторов

Кафедра ***дифференциальных уравнений и функционального анализа*** **факультета** ***математики и компьютерных наук***

Образовательная программа

01.03.01 – Математика

Профиль подготовки

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Уровень **высшего** образования

бакалавриат

Форма обучения
очная

Статус дисциплины: входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений

Махачкала, 2022

Рабочая программа дисциплины «Теория операторов» составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки *01.03.01 – Математика (уровень бакалавриата)* от 10.01.2018 г. № 8.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,

Меджидов З.Г., к. ф.-м. н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры ДУиФА от «15» марта 2022 г., протокол № 8

Зав. кафедрой ________ Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук «23» марта 2022 г., протокол № 7.

Председатель ________ Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ ________ Гасангаджиева А.Г.

Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Теория операторов» входит в вариативную часть ОПОП по направлению 01.03.01 – Математика.
Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, относящихся к теории самосопряженных операторов, спектральной теории операторов и дифференциальному исчислению нелинейных операторов.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: универсальных УК-1, общепрофессиональных – ОПК-1, профессиональных – ПК-3.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа*.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме *контрольных работ и коллоквиумов,* промежуточный контроль в форме *зачета*.

Объем дисциплины 4 зачетные единицы, в том числе 108 академических часов, распределенных по видам учебных занятий:

<table>
<tr><td rowspan="5">Семестр</td><td colspan="8">Учебные занятия</td><td rowspan="5">Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Всего</td><td colspan="7">в том числе</td></tr>
<tr><td colspan="6">Контактная работа обучающихся с преподавателем</td><td rowspan="3">СРС</td></tr>
<tr><td colspan="6">из них</td></tr>
<tr><td>Лекции</td><td>Лабораторные занятия</td><td>Практические занятия</td><td>КСР</td><td>консультации</td></tr>
<tr><td>8</td><td>144</td><td>34</td><td></td><td>34</td><td></td><td></td><td>76</td><td>Зачет</td></tr>
</table>

1. Цели освоения дисциплины

- Базовая подготовка бакалавра в области теории операторов,
- Выстраивание общего контекста математического мышления как культурной формы деятельности, определяемой как структурными особенностями математического знания, так и местом математики в системе наук.
- Развитие способности применять общие методы анализа и теории функций к конкретным прикладным задачам.
- Развитие способности переходить от частных результатов к общему и выстраивать общую теорию.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина *Теория операторов* входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений_по направлению 01.03.01 – Математика. Изучению этой дисциплины должны предшествовать курсы: математический и функциональный анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения.

На курс дисциплины *Теория операторов* опираются практически все математические специальные курсы по теории дифференциальных уравнений, уравнений типа свёртки, теории сингулярных интегральных уравнений, теории разностных уравнений, теории краевых задач для аналитических функций, теории численных методов.

Курс *Теория операторов* является логическим продолжением курса функционального анализа, и для его освоения студент должен знать теорию линейных операторов в конечномерных линейных пространствах, теорию бесконечномерных линейных нормированных пространств, владеть основами теории линейных операторов в рамках курса функционального анализа.

Знания, умения и навыки, полученные в результате освоения данной дисциплины, будут нужны при написании выпускных квалификационных работ по соответствующей тематике, а также при дальнейшей учебе в магистратуре.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения.

Код и наименование компетенции из ОПОП	**Код и наименование индикатора достижения компетенций** *(в соответствии с ОПОП)*	**Планируемые результаты обучения**	**Процедура освоения**
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**УК-1.1.** Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации.	*Знает*: структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, а также базовые составляющие таких задач. *Умеет*: анализировать постановку данной математической задачи, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения. *Владеет*: навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математических дисциплин.	Контрольные работы, коллоквиум
	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.	*Знает*: принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации научной информации в области математики и компьютерных наук. *Умеет*: системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук. *Владеет*: навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок.	
	УК-1.3 Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.	*Знает*: современные методы сбора и анализа научного материала с использованием информационных технологий; основные методы работы с ресурсами сети Интернет. *Умеет*: применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; практически использовать научно-образовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях и в деятельности педагога. *Владеет*: навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками использования современных баз данных;	

		навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах.	
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и пользовать их в профессиональной деятельности	**ОПК 1.1.** Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	*Знает*: теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а также теоретической механики, физики. *Умеет*: решать задачи, связанные с исследованием свойств функций и их производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами. *Владеет*: базовыми методами современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.	Контрольные работы, зачет
	ОПК 1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	*Знает*: способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук. *Умеет*: применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. *Владеет*: навыками применения методов современного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.	

	ОПК 1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	*Знает*: различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. *Умеет*: корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук. *Владеет*: навыками выбора методов решения задач современного математического анализа.	
ПК-3 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	**ПК-3.1** Знает основы современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	*Знает*: разные подходы к определению основных понятий математики; основные понятия информатики; формулировки математических утверждений при различных изменениях их исходных условий; различные языки программирования; *Умеет*: устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики математики и информатики необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям. *Владеет*: определенными навыками планирования и проведения работы по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	Контрольные работы, коллоквиум, зачет
	ПК-3.2 Планирует популярные лекции, экскурсии и другие виды деятельности необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	*Знает*: разнообразные формы пропаганды и популяризации знаний в области математики и информатики. *Умеет*: планировать изложение различных базовых вопросов изучения математики и информатики в доступной для данной аудитории форме. *Владеет*: определенным опытом планирования и проведения экскурсий для пропаганды и популяризации знаний в области математики и информатики.	

	ПК-3.3 Проводит необходимую работу по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	*Знает*: современные методы по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям. *Умеет*: привлечь внимание обучающихся к математическим и компьютерным наукам. *Владеет*: навыками проведения работы по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации
				Лекции	Практич. занятия	Лаборат. занятия	Контр. сам. раб.	Самост. работа	
	Модуль 1. ***Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах***								
1	Линейные ограниченные операторы. Норма оператора	7	1-2	2	2			6	*Устный опрос*
2	Пространство ЛОО. Сопряжённое пространство	7	3-4	4	4			6	*Контрольная работа*
	Итого по модулю 1			**6**	**6**			**12**	
	Модуль 2. ***Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве***								

1	Вполне непрерывные и сопряженные операторы	7	5-6	4	4			6	*Устный опрос*
2	Теоремы Фредгольма и их применение	7	7	4	4			6	*коллоквиум*
3	Нормально разрешимые операторы	7	8-9	2	2			8	*Контрольная работа*
	Итого по модулю 2			***10***	***10***			***20***	*Коллоквиум*
	Модуль 3. ***Элементы спектральной теории линейных операторов***								
1	Спектр и резольвента	7	10-11	4	4			10	*коллоквиум*
2	Спектральное разложение операторов	7	12-13	6	6			10	*Устный опрос*
	Итого по модулю 2			***10***	***10***			***20***	*Контрольная работа*
	Модуль 4. ***Дифференцирование нелинейных операторов***								
1	Сильный и слабый дифференциал	7	14-15	4	4			12	*Устный опрос*
2	Теорема о неявной функции	7	16-17	4	4			12	*Контрольная работа*
	Итого по модулю 3			***8***	***8***			***24***	*Коллоквиум*
	ИТОГО			**34**	**34**			**76**	**Зачет**

4.3. Содержание разделов учебной дисциплины

4.3.1. Содержание лекционных занятий

Модуль 1. Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах

Тема 1. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора

Ограниченные линейные операторы. Непрерывная обратимость. Теорема Банаха об обратном операторе. Интегральные операторы.

Тема 2. Пространство ЛОО. Сопряжённое пространство

Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха.

Модуль 2. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Тема 3. Вполне непрерывные и сопряженные операторы.

Вполне непрерывные операторы и их свойства. Сопряженный оператор. Определение и свойства. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. Квадратный корень из неотрицательного оператора.

Тема 4. Теоремы Фредгольма и их применение.

Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве. Применение к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода. Интегральные уравнения 2-го рода, содержащие параметр. Решение с помощью итерированных ядер. Метод определителей Фредгольма решения интегральных уравнений, содержащих параметр.

Тема 5. Нормально разрешимые операторы

Нормально разрешимые операторы. Нетеровы и фредгольмовы операторы. Теорема Никольского. Априорные оценки и вопросы разрешимости линейных уравнений.

Модуль 3. Элементы спектральной теории линейных операторов

Тема 6. Спектр и резольвента

Собственные значения, собственные векторы, спектр и резольвента линейного оператора. Спектр самосопряженного ограниченного оператора. Спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора. Спектр и резольвента неограниченных операторов.

Тема 7. Спектральное разложение операторов

Операторы ортогонального проектирования на подпространство в гильбертовом пространстве и их свойства. Интегрирование абстрактных функций. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в конечномерном пространстве. Спектральная теорема для вполне непрерывного оператора. Спектральная функция самосопряженного оператора. Спектральная теорема для самосопряженного ограниченного оператора.

Модуль 4. Дифференцирование нелинейных операторов

Тема 8. Сильный и слабый дифференциал

Производные Фреше и Гато. Связь между сильной и слабой дифференцируемостью. Формула Тейлора.

Тема 9. Теорема о неявной функции

Теорема о неявной функции. Теорема о зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных.

4.3.2. Содержание практических занятий

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час)
	Модуль 1.	**Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах**	

1.		Линейные ограниченные операторы. Норма оператора Пространство ЛОО. Сопряжённое пространство	6
	Модуль 2.	**Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве**	
2.		Вполне непрерывные и сопряженные операторы. Теоремы Фредгольма и их применение. Нормально разрешимые операторы.	10
	Модуль 3.	**Элементы спектральной теории линейных операторов**	
3.		Спектр и резольвента Спектральное разложение операторов. Операторы ортогонального проектирования на подпространство в гильбертовом пространстве и их свойства. Интегрирование абстрактных функций. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в конечномерном пространстве. Спектральная теорема для вполне непрерывного оператора. Спектральная функция самосопряженного оператора.	10
	Модуль 4.	**Дифференцирование нелинейных операторов**	
4.		Производные Фреше и Гато. Связь между сильной и слабой дифференцируемостью. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции	8
	Итого		34

5. Образовательные технологии

Курс *Теория операторов* является математическим курсом, насыщенным большим числом понятий, теорем и формул. Поэтому наиболее целесообразной формой проведения занятий является *классическая лекция*. На самостоятельную работу в виде рефератов и докладов студентов выносятся наиболее важные типы и классы конкретных операторов, возникающие в многочисленных и разнообразных приложениях. Активные формы занятий составляют около 20% аудиторных часов.

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела. При проведении отдельных занятий материал может параллельно транслироваться на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мульмедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации презентаций).

В процессе преподавания дисциплины могут быть применены такие виды лекций, как вводная обзорная лекция, проблемная лекция, лекция-визуализация с использованием компьютерной презентационной техники.

Для этого на факультете математики и компьютерных наук имеются специальные, оснащенные такой техникой, лекционные аудитории.

По теме «Спектральная теория линейных операторов» целесообразно провести мастер-класс с приглашением специалистов по дифференциальным уравнениям.

Вузовская лекция должна выполнять не только информационную функцию, но также и мотивационную, воспитательную и обучающую.
Информационная функция лекции предполагает передачу необходимой информации по теме, которая должна стать основой для дальнейшей самостоятельной работы студента
Мотивационная функция должна заключаться в стимулировании интереса студентов к науке. На лекции необходимо заинтересовать, озадачить студентов с целью выработки у них желания дальнейшего изучения той или иной математической проблемы.
Воспитательная функция ориентирована на формирование у молодого поколения чувства ответственности, закладку нравственных, этических норм поведения в обществе и коллективе, формирование патриотических взглядов, мотивов социального поведения и действий, естественнонаучного мировоззрения.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Для успешного освоения отдельных разделов рекомендуется выполнить в письменном виде и сдать преподавателю по одной самостоятельной работе. Ниже приведен примерный вариант самостоятельной работы. При выполнении заданий рекомендуется использовать учебные пособия [1] – [5] из списка рекомендованной литературы (п. 8 настоящей Программы).

6.1. Примерный вариант самостоятельной работы по теме «Сильный и слабый дифференциал»

СР-1

1. Доказать теорему о производной сложной функции. Пусть $X,\ Y,\ Z$ – три банаховых пространства, $U(x_0)$ – окрестность точки x_0 в X, A – непрерывное отображение этой окрестности в Y, $y_0 = Ax_0$, $V(y_0)$ – окрестность точки $y_0 \in Y$, и B – непрерывное отображение этой окрестности в Z. Тогда, если отображение A дифференцируемо (в смысле Фреше) в точке x_0, а B дифференцируемо в точке y_0, то отображение $C = BA$ (определенное и непрерывное в некоторой окрестности точки x_0) дифференцируемо в точке x_0 и
$$C'(x_0) = B'(y_0) \cdot A'(y_0).$$

2. Пусть функция $\varphi(x,\xi,u)$ непрерывна по совокупности своих переменных при $a \le x,\xi \le b, -\infty < u < +\infty$ вместе частной производной $\varphi_u(x,\xi,u)$ и
$$F(u) = u(x) - \int_a^b \varphi\big(x,\xi,u(\xi)\big)d\xi.$$
Доказать, что оператор F дифференцируем в каждой точке $u_0 \in C[a,b]$ и
$$F'^{(u_0)}(h) = h(x) - \int_a^b \varphi_u\big(x,\xi,u_0(\xi)\big)d\xi.$$
3. На примере функции
$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 \ne 0, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$$
проверить, что из слабой дифференцируемости оператора в точке еще не вытекает его сильная дифференцируемость.
4. На примере скалярной функции $f(t) = t^3 \cos\frac{1}{t^2}$ проверить, что из существования второй производной Фреше оператора в точке (в частном случае при $t = 0$) не вытекает существование второй производной Гато.
5. Найти производные Фреше функционалов $F(x) = (x,x)$ и $G(x) = \|x\|$ в вещественном гильбертовом пространстве.
6. Пусть функции $f(x,u)$ и $f_u(x,u)$ непрерывны по совокупности переменных при $x \in [a,b]$, $-\infty < u < \infty$. Рассмотрим оператор $F: C[a;b] \to C[a;b]$, $F(u) = f(x,u(x))$. Доказать, что производная F в точке $u_0(x) \in C[a;b]$ и ее дифференциал в этой точке при приращении $h(x) \in C[a;b]$ соответственно равны
$$F'(u_0) = f_u\big(x,u_0(x)\big);\ dF(u_0;h) = f_u\big(x,u_0(x)\big)h(x).$$
7. Найти производную Фреше оператора $F(u) = u(x) - e^{xu(x)}$ в пространстве $C[0;1]$ в точке $u_0(x) \equiv 0$.

6.3. Другие виды самостоятельной работы, распределенные по темам, со ссылками на рекомендуемую литературу

Разделы (модули) и темы для самостоятельного изучения	*Виды и содержание самостоятельной работы*
Модуль 1. Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах	
Пространство линейных ограниченных операторов	Доклад на тему 1. Теорема Банаха-Штейнгауза и принцип ограниченности. ([1], [3])

Модуль 2. ***Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве***	
1. Вполне непрерывные и сопряженные операторы.	Доклады на темы: 1. Спектр компактного оператора. ([1], [3]) 2. Отношения между подпространствами и ортопроекторами. ([4])
2. Теоремы Фредгольма и их применение.	Доклад на тему Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром ([1])
Модуль 2. ***Элементы спектральной теории линейных операторов***	
1. Спектр и резольвента	Решение задач и упражнений ([5])
2. Спектральное разложение операторов.	Доклады на темы: 1. Интеграл Стилтьеса от абстрактной функции. ([4]) 2. Теорема Гильберта-Шмидта. ([1])
Модуль 3. ***Дифференцирование нелинейных операторов***	
1. Сильный и слабый дифференциал	Решение задач и упражнений ([5])
2. Теорема о неявной функции	Доклад на тему: применение теоремы о неявной функции к дифференциальным уравнениям ([1])

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Типовые контрольные задания

7.1.1. Примерные контрольные вопросы для подготовки к коллоквиуму по модулю «Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве»

1. Сопряженный оператор. Определение и свойства.
2. Вполне непрерывные операторы и их свойства.
3. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве.
4. Нормально разрешимые операторы.
5. Нетеровы и фредгольмовы операторы.
6. Теорема Никольского.
7. Априорные оценки и вопросы разрешимости линейных уравнений.
8. Операторы ортогонального проектирования на подпространство в гильбертовом пространстве и их свойства.
9. Связь свойств ортопроекторов и подпространств.

7.1.2. Примерные контрольные вопросы для подготовки к коллоквиуму по модулю «Элементы спектральной теории линейных операторов»

1. Спектр и резольвента линейного оператора.
2. Спектр компактного оператора.
3. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма самосопряженного оператора.
4. Спектр компактного самосопряженного оператора.
5. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в конечномерном пространстве.
6. Спектральная теорема для вполне непрерывного оператора.
7. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра 2-го рода. Решение в случае вырожденных и симметричных ядер.
8. Интегральные уравнения, содержащие параметр. Решение с помощью итерированных ядер.
9. Метод определителей Фредгольма решения интегральных уравнений, содержащих параметр.
10. Спектральная теорема для самосопряженного ограниченного оператора.
11. Спектр самосопряженного ограниченного оператора.

7.1.3. Примерные контрольные вопросы для подготовки к коллоквиуму по модулю «Дифференцирование нелинейных операторов»

1. Спектр и резольвента неограниченных операторов.
2. Абстрактные функции и их дифференцирование.
3. Интеграл от абстрактной функции.
4. Производные Фреше и Гато.
5. Связь между сильной и слабой дифференцируемостью.
6. Формулы конечных приращений для нелинейных операторов.
7. Билинейные функции. Норма.
8. Производные и дифференциалы Фреше высших порядков.
9. Теорема о неявной функции в банаховом пространстве и ее применения.

7.1.4. Примерные варианты контрольных работ по теме «Вполне непрерывные и сопряженные операторы»

Контрольная работа 1

1. Является ли оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = tx(t)$ вполне непрерывным?
2. Найти сопряженный к оператору $A: L_2[0;1] \to L_2[0;1]$, если $Ax(t) = tx(t)$.
3. Доказать, что оператор ортогонального проектирования на конечномерное подпространство вполне непрерывен.

4. Является ли оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} x(s) ds$, вполне непрерывным?
5. Является ли оператор $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$, $Ax(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$, вполне непрерывным?
6. Доказать формулы для нормы самосопряженного оператора
$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|\,; \;\; \|A\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(Ax, y)|\,.$$
7. Пусть A – самосопряженный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве. Доказать, что для любого $\lambda > 0$ оператор $A + \lambda I$ непрерывно обратим.

Контрольная работа 2

1. Является ли оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(0) + tx(1)$, вполне непрерывным?
2. Найти сопряженный к оператору $A: L_2[0;1] \to L_2[0;1]$, если $Ax(t) = \int_0^1 tx(s) ds$.
3. Является ли оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 x(s) ds$, вполне непрерывным?
4. Найти сопряженный к оператору $A: L_2[0;1] \to L_2[0;1]$, если $Ax(t) = \int_0^1 sx(s) ds$.
5. Пусть A – самосопряженный непрерывно обратимый оператор в гильбертовом пространстве. Доказать, что обратный оператор A^{-1} также самосопряженный.
6. Пусть A – самосопряженный неотрицательный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве. Доказать, что квадратный корень $\sqrt{A}$ вполне непрерывен.
7. Пусть вполне непрерывный самосопряженный оператор A в бесконечномерном гильбертовом пространстве H имеет конечное множество собственных значений. Доказать, что $\lambda = 0$ – собственное значение оператора A.

7.1.5. Примерные варианты контрольных работ по теме «Дифференцирование нелинейных операторов»

Контрольная работа 1

1. Вычислить производную Фреше отображения $\mathrm{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, заданного формулами $\mathrm{y}_1 = \sin \pi \mathrm{x}_1$, $\mathrm{y}_2 = \cos \pi \mathrm{x}_2$, $\mathrm{y}_3 = \mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2$, в точке (1;1).

2. Найти производную Фреше оператора $\mathrm{F}: \mathrm{C}[0; \pi] \to \mathrm{C}[0; \pi]$, $\mathrm{F}(\mathrm{u}) = \mathrm{x}^2\mathrm{u}(\mathrm{x}) + \mathrm{sh}\,\mathrm{u}(\mathrm{x})$, в точке $\mathrm{u}_0(\mathrm{x}) = 0$.

   Будет ли оператор $F'(u_0)$ непрерывно обратим?

3. Найти производную Гато отображения $\mathrm{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - xy & \text{при } y = x^3, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

   в точке (0;0). Будет ли F дифференцируема по Фреше в точке (0;0)?

4. Пусть оператор $\mathrm{F}: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ непрерывно дифференцируем (по Фреше) на выпуклом множестве $\Omega \subset \mathrm{X}$ и $\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = 0$, $\forall \mathrm{x} \in \Omega$. Докажите, что $\mathrm{F}(\mathrm{x})$ постоянен на Ω.

Контрольная работа 2

1. Вычислить производную Фреше отображения $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного формулами $u = x^2 + y\cos(xy)$, $v = y^2 - x\sin(xy)$, в точке (1;1).

2. Найти производную Фреше оператора $F: C[0; 1] \to C[0; 1]$, $F(u) = u(x) - e^{xu(x)}$, в точке $u_0(x) = 0$.

   Будет ли оператор $F'(u_0)$ непрерывно обратим?

3. Найти производную Гато отображения $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^4} & \text{при } (x, y) \neq (0; 0), \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0; 0) \end{cases}$$

   в точке (0;0). Будет ли F дифференцируема по Фреше в точке (0;0)?

4. Пусть оператор $F: X \to Y$ непрерывно дифференцируем (по Фреше) на выпуклом отрезке $[x_1, x_2] \subset X$ и $F'(x) = 0$ на $[x_1, x_2]$. Докажите, что $F(x)$ постоянен на отрезке $[x_1, x_2]$.

7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля – 50% и промежуточного контроля – 50%.
Текущий контроль по дисциплине включает:
- посещение занятий – 10 баллов,
- участие на практических занятиях – 10 баллов,
- коллоквиум – 40 баллов,

- выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов.
Промежуточный контроль по дисциплине включает:
- устный опрос – 50 баллов,
- письменная контрольная работа – 50 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука,1989, 624 с.
2) Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
3) Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Дрофа, 2003, 384 с.
4) Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, 488 с.

б) дополнительная литература:

5) Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. М.: URSS, 2010, 480 с.
6) Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ, М.: Наука, 1977, 741 с.
7) Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979, 592 с.
8) Асташова И.В. Функциональный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Асташова И.В.– Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, 2011. – 112 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/11120.html. – ЭБС «IPRbooks»

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

1. Федеральный портал http://edu.ru:
2. Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ:
   http://elib.dgu.ru:
   http://edu.icc.dgu.ru:

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Операторный язык является основным языком многих современных направлений математики. Дисциплина «Теория операторов» способствует выработке этого языка у будущих бакалавров. Поэтому творческое овладение этой дисциплиной особенно важно для тех, кто собирается продолжить учебу в магистратуре и аспирантуре по различным направлениям. Специфика дисциплины состоит в том, что здесь путем установления общих закономерностей обобщаются такие базовые понятия классического анализа и линейной алгебры, как обратимость функции, производная, симметричная матрица и др. Обобщение этих понятий не только расширяет круг решаемых задач, но и значительно упрощает решение этих задач, автоматизируя многие математические операции.

Систематическое изложение научных материалов, освещение главных тем данной дисциплины проводится в ходе лекционного курса. Изучение теоретического курса выполняется самостоятельно каждым студентом по итогам каждой из лекций, используя конспект (электронный) лекций, учебники, представленные в разделе 8 «Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины», результаты контролируются преподавателем на практических занятиях.

Если возникают вопросы, следует обратиться на кафедру к преподавателю, согласно графику консультаций ведущего преподавателя. Обращаясь за консультацией, необходимо указать, каким учебником пользовались и какой раздел, глава, параграф вам не понятен.

Решения задач и самостоятельные работы по заданию (индивидуальному, где требуется) преподавателя сдаются в конце каждой зачетной единицы.

Для сдачи зачетной единицы «Спектральная теория линейных операторов» необходимо проанализировать лекционный материал с использованием источников литературы, предварительно повторить темы «Дифференциальные уравнения» и «Системы линейных алгебраических уравнений».

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить соответствующий теоретический материал из следующих литературных источников, рекомендованных в п. 8: [1], [2], [4], [5].

Решать задачи и упражнения из учебных пособий и задачников: [3], [4], [5].

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине: «Теория операторов» необходимы:
Системное программное обеспечение: ОС Windows 7/8/10;
Прикладное программное обеспечение: MSOffice 2007/2010/2013; Mathcad.
Сетевые приложения: электронная почта, поисковые системы Google, Yandex.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для проведения лекционных занятий на факультете необходима аудитория на 25-30 мест, оборудованная ноутбуком, экраном и цифровым проектором.