МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Функциональный анализ

Кафедра *дифференциальных уравнений и функционального анализа*
факультета *математики и компьютерных наук*

Образовательная программа

01.03.01 - Математика

Профиль подготовки

Математическое моделирование и вычислительная математика

Уровень **высшего** образования

бакалавриат

Форма обучения
очная

Статус дисциплины: входит в ***обязательную часть ОПОП***
фундаментальный модуль ОПОП

Махачкала, 2022

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки *01.03.02 Прикладная математика и инфоматика (уровень бакалавриата)* от 10.01.2018 г. № 9.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,

Меджидов З.Г., к. ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры ДУиФА от «15» марта 2022 г.,
протокол № 8

Зав. кафедрой ________ Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук «23» марта 2022 г., протокол № 7.

Председатель __________ Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ ____________ Гасангаджиева А.Г.

Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины 5
1. Цели освоения дисциплины 6
2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата 6
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения. 7
4. Объем, структура и содержание дисциплины. 10
5. Образовательные технологии 13
6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. 13
7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины 17
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины 23
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины. 24
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины 24
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем. 25
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине. 25

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Функциональный анализ» входит в обязательную часть образовательной программы по направлению **01.03.02 – Прикладная математика и информатика.**

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с метрическими и нормированными пространствами, теорией операторов. Изучаемый материал применяется в задачах математической физики, в теории интегральных уравнений, в общей теории приближенных методов и т.д. Дисциплина «Функциональный анализ» необходимо изучать для овладения общими методами решения операторных уравнений и применения их при решении конкретных задач.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

универсальных **УК-1**, общепрофессиональных – **ОПК-1,** профессиональных – **ПК-1**.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: **лекции, практические занятия и самостоятельная работа**.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме **контрольных работ и коллоквиумов**, промежуточный контроль в форме **зачета**.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе 108 академических часов, распределенных по следующим видам учебных занятий:

<table>
<tr><td rowspan="5">Семестр</td><td colspan="7">Учебные занятия</td><td rowspan="5">Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Всего</td><td colspan="6">в том числе</td></tr>
<tr><td colspan="5">Контактная работа обучающихся с преподавателем</td><td rowspan="3">СРС</td></tr>
<tr><td colspan="5">из них</td></tr>
<tr><td>Лекции</td><td>Лабораторные занятия</td><td>Практические занятия</td><td>КСР</td><td>консультации</td></tr>
<tr><td>5</td><td>108</td><td>16</td><td></td><td>28</td><td></td><td></td><td>64</td><td>Зачет</td></tr>
</table>

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «*Функциональный анализ»* являются:

- овладение теорией метрических и нормированных пространств.
- ознакомление с фундаментальными свойствами основных функциональных пространств и операторов, действующих в них.
- творческое овладение общими методами исследования и решения операторных уравнений.
- ознакомление с прикладными аспектами функционального анализа.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина «Функциональный анализ» входит в обязательную часть ОПОП бакалавриата по направлению **01.03.02 - Прикладная математика и информатика**.

Курс функционального анализа преподается на 3 курсе, после изучения математического анализа, дифференциальных уравнений, алгебры и геометрии. Функциональный анализ преподается параллельно с дисциплинами «Уравнения в частных производных» и «Теория функций комплексного переменного». Это позволяет иллюстрировать свойства обратных операторов, сопряженных операторов, ограниченных и неограниченных операторов на конкретных примерах краевых задач для уравнений математической физики.

К учебным дисциплинам, так или иначе влияющим на качество получаемых знаний по данной дисциплине, относятся:

- Математический анализ – основная дисциплина для профессионального математика, изучающая предельные переходы в бесконечно малых и бесконечно больших величинах, дифференциальное и интегральное исчисление, для представления решений дифференциальных уравнений как пределы последовательностей или суммы бесконечных рядов.
- Геометрия и алгебра – позволяющая отработать навыки геометрического представления абстрактных метрических и топологических пространств, для успешного восприятия линейных вполне непрерывных операторов в бесконечномерных гильбертовых пространствах.

Освоение данной дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин: "Методы вычислений", "Вариационное исчисление", "Интегральные уравнения".

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения.

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций *(в соответствии с ОПОП)*	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**УК-1.1.** Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации.	*Знает*: структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, а также базовые составляющие таких задач. *Умеет*: анализировать постановку данной математической задачи, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения. *Владеет*: навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математических дисциплин	Контрольные работы, тестирование, зачет
	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.	*Знает*: принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации научной информации в области математики и компьютерных наук. *Умеет*: системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук. *Владеет*: навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок.	
	УК-1.3. Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.	*Знает*: современные методы сбора и анализа научного материала с использованием информационных технологий; основные методы работы с ресурсами сети Интернет. *Умеет*: применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации	

		научных данных; практически использовать научно-образовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях и в деятельности педагога. *Владеет*: навыками использования информационных технологий в организации и проведении	
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	**ОПК-1.1.** Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	*Знает:* теоретические основы функционального анализа *Умеет:* решать задачи, связанные с исследованием различных методов, полученных в области математических и физических наук. *Владеет:* базовыми методами по исследованию математических и естественнонаучных задач.	Контрольные работы, коллоквиум
	ОПК-1.2. Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности.	*Знает*: способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук. *Умеет*: применять различные методы по исследованию математических и естественнонаучных задач. *Владеет*: навыками применения математических методов при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.	
	ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний, полученных в области математических и (или) естественных наук	*Знает*: различные методы исследованию математических и естественнонаучных задач. *Умеет*: корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук. *Владеет*: навыками выбора методов решения задач.	

ПК-1. Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	**ПК-1.1.** Обладает умением сбора и обработки данных, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	*Знает:* основы теории вероятностей и математической статистики, численные методы; современные языки программирования и современные информационные технологии. *Умеет:* применять современные научные исследования для решения различных задач математических и естественных наук; составлять программы на современных языках программирования. *Владеет* навыками программирования на современных языках и методами построения математических моделей.	Контрольные работы, зачет
	ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике.	*Знает*: методы построения математически моделей; различные языки программирования. *Умеет*: решать задачи, связанные: с исследованием операций, численными методами; применять различные языки программирования в численном анализе. *Владеет*: методами построения математических моделей.	
	ПК-1.3. Имеет практический опыт использования методов современных научных исследований	*Знает*: методы исследования прикладных задач; современные информационные технологии. *Умеет*: применять методы исследования прикладных задач; современных информационных технологий. *Владеет*: навыками построения математических моделей для решения задач прикладного характера.	

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации
				Лекции	Практич. занятия	Лаборат. занятия	Контр. сам. раб.	Самост. работа	
	Модуль 1. ***Линейные нормированные и гильбертовы пространства***								
1	Линейное нормированное пространство. Банахово пространство.	5	1-4	4	4			10	*Устный опрос*
2	Гильбертовы пространства	5	5-6	2	4			10	*Контрольная работа*
	Итого по модулю 1			***6***	***8***			***20***	*Коллоквиум*
	Модуль 2. ***Линейные операторы в линейных нормированных и гильбертовых пространствах***								
3	Линейные ограниченные операторы и функционалы. Сопряженное пространство.	5	7-10	2	6			12	*Устный опрос*
4	Линейные операторы и линейные функционалы в гильбертовом пространстве	5	11-12	2	4			10	*Контрольная работа*
	Итого по модулю 2			***4***	***10***			***22***	*Коллоквиум*
	Модуль 3. ***Вполне непрерывные операторы и их приложение***								
5	Понятие компактного множества и критерии компактности	5	13-14	2	4			8	*Устный опрос*
6	Вполне непрерыв-	5	15-	2	4			8	*Тестирова-*

	ные операторы и их свойства		16						*ние*
7	Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра	5	17-18	2	2			6	*Контрольная работа*
	Итого по модулю 3			***6***	***10***			***22***	*Коллоквиум*
	ИТОГО			**16**	**28**			**64**	**Зачет**

4.3. Содержание разделов учебной дисциплины

4.3.1. Содержание лекционных занятий

Модуль 1. Линейные нормированные и гильбертовы пространства

Тема 1. Метрические и линейные нормированные пространства.

Метрическое и линейное нормированное пространства. Открытые и замкнутые множества. Сходимость. Сепарабельные и банаховы пространства. Лемма о вложенных шарах. Принцип сжимающих отображений.

Тема 2. Гильбертово пространство.

Евклидово и гильбертово пространства. Неравенство Коши-Шварца. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств. Ряды Фуре по ортогональной системе.

Модуль 2. Линейные операторы в линейных нормированных и гильбертовых пространствах

Тема 3. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах

Линейные ограниченные операторы и функционалы. Норма оператора и функционала. Сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха. Обратный оператор. Непрерывная обратимость линейного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента оператора.

Тема 4. Линейные операторы и линейные функционалы в гильбертовом пространстве

Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве. Спектр самосопряженного оператора.

Модуль 3. Вполне непрерывные операторы и их приложение

Тема 5. Понятие компактного множества и критерии компактности.

Компактные и предкомпактные множества. Теорема Хаусдорфа. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Теорема Арцела.

Тема 6. Вполне непрерывные операторы и их свойства.

Вполне непрерывные операторы. Свойства вполне непрерывных операторов. Спектр компактного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.

Тема 7. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра.

Интегральные уравнения второго рода. Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции. Компактность интегральных операторов с вырожденным и непрерывным ядрами. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.

4.3.2. Содержание практических занятий

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час)
	Модуль 1.	**Линейные нормированные и гильбертовы пространства**	
1.		Метрическое и линейное нормированное пространства. Банахово пространство. Евклидово и гильбертово пространства. Ряды Фуре по ортогональной системе.	8
	Модуль 2.	**Линейные операторы в линейных нормированных и гильбертовых пространствах**	
2.		Линейные ограниченные операторы и функционалы. Сопряженное пространство. Линейные операторы и линейные функционалы в гильбертовом пространстве. Непрерывная обратимость линейного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента оператора. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.	10
	Модуль 3.	**Вполне непрерывные операторы и их приложение**	
3.		Компактные и предкомпактные множества. Теорема Хаусдорфа. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Теорема Арцела. Вполне непрерывные операторы. Спектр компактного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. Интегральные уравнения второго рода. Компактность интегральных операторов с вырожденным и непрерывным ядрами.	10
	Итого		28

5. Образовательные технологии

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела.

При проведении отдельных занятий материал может параллельно транслироваться на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мульмедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации презентаций).

В процессе преподавания дисциплины применяются такие виды лекций, как вводная обзорная лекция, проблемная лекция, лекция визуализация с использованием компьютерной презентационной техники. Для этого на факультете математики и компьютерных наук имеются специальные, оснащенные такой техникой, лекционные аудитории.

По теме «Линейные ограниченные операторы» целесообразно провести мастер-класс с приглашением специалистов по линейной алгебре и дифференциальным уравнениям.

При прохождении темы «Непрерывная обратимость линейных операторов» предполагается встреча со специалистами по дифференциальным уравнениям из ДГПУ и ДНЦ РАН.

Вузовская лекция должна выполнять не только информационную функцию, но также и мотивационную, воспитательную и обучающую.

Информационная функция лекции предполагает передачу необходимой информации по теме, которая должна стать основой для дальнейшей самостоятельной работы студента

Мотивационная функция должна заключаться в стимулировании интереса студентов к науке. На лекции необходимо заинтересовать, озадачить студентов с целью выработки у них желания дальнейшего изучения той или иной математической проблемы.

Воспитательная функция ориентирована на формирование у молодого поколения чувства ответственности, закладку нравственных, этических норм поведения в обществе и коллективе, формирование патриотических взглядов, мотивов социального поведения и действий, естественнонаучного мировоззрения.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Для успешного освоения отдельных разделов рекомендуется выполнить в письменном виде и сдать преподавателю по одной самостоятельной работе. Ниже приведены примерные варианты самостоятельных работ. При выполнении заданий рекомендуется использовать учебно-методические пособия [9], [10], учебные пособия [1], [4], [5] из списка рекомендованной литературы (п. 8 настоящей Программы).

6.1. Примерные варианты самостоятельных работ по теме «Линейные нормированные и метрические пространства»

СР-1

1. Доказать, что замыкание $[A]$ множества A есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A.
2. Сходится ли в $C^1[0,1]$ последовательность $x_n(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1}-\dfrac{t^{n+2}}{n+2}$?
3. Доказать, что в $CL_1[0,1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой $\|x\|=\int_0^1|x(t)|dt$ этого пространства.
4. Доказать, что любое конечное множество метрического пространства замкнуто.
5. Доказать, что равномерно ограниченное множество функций $M\subset C[a,b]$, удовлетворяющее условию Липшица с общей постоянной, компактно в $C[a,b]$.
6. Проверить, можно ли на вещественной прямой метрику задать равенством: a) $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$; b) $\rho(x,y)=|x^2-y^2|$; c) $\rho(x,y)=|\sin x-\sin y|$.

СР-2

1. Доказать, что метрическое пространство, состоящее из иррациональных чисел отрезка $[0;1]$ с метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$ сепарабельно.
2. Доказать, что совокупность внутренних точек $intA$ множества A есть наибольшее открытое множество, содержащееся в A.
3. Сходится ли в $C[0,1]$ последовательность $y_n(t)=t^n-t^{2n},\ n=1,2,\ldots$?
4. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ в себя имеет неподвижную точку.
5. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ n – мерных векторов можно ввести метрику формулой $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$. Будет ли $\mathbb{R}^n$ с этой метрикой полным метрическим пространством?
6. Доказать, что на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел метрику можно ввести формулой
$$\rho(n,m)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n+m}, & n\neq m.\\ 0, & n=m.\end{cases}$$
Будет ли $(\mathbb{N},\rho)$ полным пространством?

СР-3

1. Доказать, что множество изолированных точек сепарабельного пространства не более чем счетное.
2. Банахово пространство X изоморфно линейному нормированному пространству Y. Доказать, что Y – банахово пространство.

3. Пусть $x_n(t) \in C[a,b]$, $n = 1,2,\ldots$ – равностепенно непрерывное множество функций и $x_n(t) \to x_0(t)$, $n \to \infty$, для любого $t \in [a,b]$. Доказать, что $x_0(t) \in C[a,b]$.
4. Пусть L – подпространство гильбертова пространства H, $L \neq H$. Доказать, что существует $x \in H$ такой, что $x \perp L$.
5. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2, x_3(t) = t^3$ в пространстве $CL_2[-1,1]$.
6. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $x(t)$ таких, что

$$|x(a)| \le k_1,\ \int_a^b |x'(t)|^2 dt \le k_2$$

($k_1 \ge 0,\ k_2 > 0$ – константы**)** относительно компактно в $C[a,b]$.
7. Доказать, что всякое множество, предкомпактное в пространстве $C^1[a,b]$, является предкомпактным и в пространстве $C[a,b]$.

6.2. Примерные варианты самостоятельных работ по теме «Линейные ограниченные операторы»

СР-4

1. Доказать формулу для нормы ограниченного линейного оператора $A: X \to Y,\ X,Y$ - ЛНП, $D(A) = X:\ \|A\| = \sup\limits_{x \in X, \|x\|=1} \|Ax\|$.
2. Доказать ограниченность линейного оператора $A: CL_2[0,1] \to CL_2[0,1]$, $Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)d\tau$ и найти его норму.
3. В пространстве $C^1[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$ и оператор $A: L \to C[0,1]$, $Ax(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} + tx(t)$. Доказать, что A – непрерывно обратим.
4. Доказать, что функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k$, $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_1$, является линейным ограниченным, и найти его норму.
5. Доказать, что оператор $\Phi: L(X,Y) \to R,\ \Phi(A) = \|A\|$, непрерывен.
6. Пусть $A: X \to Y$ – замкнутый линейный оператор, $R(A) = Y$ и A^{-1} существует. Доказать, что $A^{-1} \in L(X,Y)$.
7. В пространстве $C^1[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[0,1] :$ $x(0) = 0\}$ и оператор $A: L \to C[0,1]$,

$$Ax(t) = \frac{dx}{dt} + a(t)x(t),\ a(t) \in C[0,1].$$

Доказать, что A непрерывно обратим и найти A^{-1}.

СР-5

1. Пусть $A: l_2 \to l_1,\ Ax = x,\ D(A) = \{x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$. Найти $D(A^*)$ и A^*.

2. Доказать, что функционал $f: l_1 \to R,\ f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{k})x_k$ ограничен и найти его норму.
3. Доказать, что сопряженное к нормированному пространству – банахово.
4. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t)=x(t)+\int_0^1 e^{s+t}x(s)ds$ непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}.
5. Пусть линейный функционал f определен на вещественном ЛНП X и неограничен. Доказать, что в любой окрестности нуля он принимает все вещественные значения.
6. Доказать, что ядро $KerA$ ограниченного линейного оператора $A: X \to Y$ является подпространством в X.
7. Доказать, что функционал $f(x)=\int_{-1}^{1} x(\frac{|t-1|}{2})dt$ является линейным непрерывным на $C[0,1]$ и найти его норму.
8. Пусть X – линейное пространство $A, B: X \to X$ – линейные операторы с $D_A = D_B = X$, удовлетворяющие соотношениям $AB + A + I = 0, BA + A + I = 0$. Доказать, что оператор A^{-1} существует.

СР-6

1. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t)=x(t)-\int_0^1 e^{t+s}x(s)ds$ непрерывно обратим, и найти A^{-1}.
2. Пусть L – подпространство гильбертова пространства H, $P: H \to L$, $Px=u$, где $x=u+v, u\in L, v\in L^{\perp}$. Доказать, что P ограничен и найти его норму.
3. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t)=\frac{d^2x}{dt^2}+x(t)$ с областью определения D_A – линейным многообразием дважды непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x'(0) = 0$, непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}.
4. Доказать, что функционал $f(x) = \int_0^1 t^{-1/3}x(t)dt$, $x \in L_2[0,1]$, является линейным непрерывным и найти его норму.
5. Доказать ограниченность и найти норму оператора $A: CL_2[0,1] \to CL_2[0,1]$,
$$Ax(t)=\begin{cases} x(t) \text{ при } t \le \frac{1}{2}, \\ 0 \text{ при } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$
6. Пусть X, Y – банаховы пространства, $A_n \in L(X,Y)$ $(n \in N)$ и для любого $x \in X$ последовательность $A_n x$ фундаментальна. Доказать, что существует такой оператор $A \in L(X,Y)$, что $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ сильно.
7. Пусть X, Y – линейные пространства, $A: X \to Y$ - линейный оператор, у которого существует обратный. Доказать, что системы элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \in D_A$, одновременно или линейно независимы или линейно зависимы.

8. Доказать, что область значений линейного оператора является линейным многообразием.

6.3. Другие виды самостоятельной работы, распределенные по темам, со ссылками на рекомендуемую литературу

Разделы (модули) и темы для самостоятельного изучения	*Виды и содержание самостоятельной работы*
Модуль 1. Линейные нормированные и гильбертовы пространства	
1. Метрическое и линейное нормированное пространства. Банахово пространство.	Рефераты на темы: 1. Применение принципа сжимающих отображений к решению функциональных уравнений ([1], [2], [5]). 2. Применение принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений ([1], [2], [5]).
2. Гильбертовы пространства.	Доклады на темы: 1. Построение элемента наилучшего приближения элементами подпространства ([3], [5]). 2. Разложение функций по ортогональным системам ([1], [2], [5]).
Модуль 2. Линейные операторы в линейных нормированных и гильбертовых пространствах	
1. Линейные ограниченные операторы и функционалы. Сопряженное пространство.	Решение задач и упражнений ([4], [7], [8], [10]).
2. Линейные операторы и линейные функционалы в гильбертовом пространстве.	Решение задач и упражнений ([4], [7], [8], [10]).
Модуль 3. Вполне непрерывные операторы и их приложение	
Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра	Доклад на тему: Некоторые применения интегральных уравнений типа Вольтерра ([6], [9]).

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Типовые контрольные задания

7.1.1. Примерные темы рефератов:

1. Метрические пространства числовых последовательностей.

2. Теоремы о неподвижных точках и их применение.
3. Построение элементов наилучшего приближения в пространствах с интегральной метрикой.
4. Интегральные уравнения Фредгольма и методы их решения.
5. Интегральные уравнения Вольтерра и методы их решения.

7.1.2. Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу «Линейные ограниченные операторы и функционалы. Сопряженное пространство»

1. Линейные ограниченные операторы и функционалы.
2. Формулы для нормы оператора и функционала.
3. Линейные ограниченные операторы и функционалы в конечномерном пространстве.
4. Линейные ограниченные операторы и функционалы в пространстве непрерывных функций.
5. Линейные ограниченные операторы и функционалы в пространстве числовых последовательностей.
6. Пространство линейных ограниченных операторов и его полнота.
7. Два вида сходимости в пространстве линейных ограниченных операторов.
8. Принцип равномерной ограниченности линейных операторов.
9. Будет ли линейный функционал $f(x) = x'\left(\frac{1}{2}\right)$, определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций из $C[0;1]$, ограниченным? Если да, то найти его норму.
10. Доказать, что если линейный оператор $A: X \to X$ не является ограниченным в одной из двух эквивалентных норм, то он не будет ограниченным и в другой норме.
11. Доказать, что всякий линейный оператор, заданный на конечномерном пространстве, ограничен.
12. Сопряженное пространство. Два вида сходимости последовательности непрерывных линейных функционалов.
13. Слабая ограниченность и слабая сходимость.
14. Теорема Хана-Банаха. Следствия.
1. Обратный оператор. Непрерывная обратимость линейного оператора.
2. Теорема Банаха об обратном операторе.
3. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
15. Доказать, что в конечномерном пространстве всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.
16. Исследовать на сходимость последовательность операторов $A_n: l_2 \to l_2$, $A_n x = A_n(x_1, x_2, \dots) = (0,0, \dots, x_n, 0,0, \dots)$.
17. Доказать, что оператор $A: C[0;1] \to C[0;1]$, $Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)d\tau$, является линейным ограниченным и найти его норму.

7.1.3. Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра"

1. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве.
2. Интегральные уравнения второго рода. Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции.
3. Компактность интегральных операторов с вырожденным и непрерывным ядрами.
4. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.
5. Решение интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным и симметричным ядром.
6. Решение интегральных уравнений Вольтерра с вырожденным и симметричным ядром.
7. В пространстве $C[-1;1]$ решить интегральное уравнение
$$x(t) + \int_{-1}^{1} e^{s+2t} x(s)ds = e^t.$$
8. В пространстве $C[0;1]$ решить интегральное уравнение
$$x(t) = \int_{0}^{1} \sin \pi(t-s)\, x(s)ds + \cos \pi t.$$

7.1.4. Примерные вопросы к экзамену по дисциплине

1. Метрическое и линейное нормированное пространства. Примеры: $\mathbb{R}^n, C[a;b], CL_p[a;b], l_p, C^k[a;b]$.
2. Открытые и замкнутые множества. Сходимость в основных функциональных пространствах.
3. Банаховы пространства. Лемма о вложенных шарах.
4. Теорема Бэра о категориях.
5. Принцип сжимающих отображений и его применение.
6. Теорема о пополнении.
7. Гильбертово пространство. Примеры. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве.
8. Практический способ построения элемента наилучшего приближения элементами подпространства.
9. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств.
10. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.
11. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
12. Компактность и сепарабельность в ЛНП. Критерий конечномерности ЛНП.
13. Равномерно ограниченные и равностепенно непрерывные семейства непрерывных функций. Теорема Арцела.
14. Линейные ограниченные операторы и функционалы. Норма оператора и функционала.
15. Сопряженное пространство. Два вида сходимости последовательности непрерывных линейных функционалов.

16. Слабая ограниченность и слабая сходимость.
17. Теорема Хана-Банаха.
18. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор в евклидовом пространстве.
19. Обратный оператор. Непрерывная обратимость линейного оператора.
20. Теорема Банаха об обратном операторе.
21. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
22. Компактные операторы. Спектр компактного оператора.
23. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве.
24. Спектр самосопряженного оператора.
25. Интегральные уравнения второго рода. Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции.
26. Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода с вырожденным и симметричным ядрами.
27. Компактность интегральных операторов с непрерывным ядром.
28. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.
29. Решение интегральных уравнений Вольтерра второго рода с вырожденным и симметричным ядрами.

7.1.5. Примерные задания тестов

Тест №1

1. Выберите верное утверждение:

А) Если $\boldsymbol{A}$ – сжимающее отображение, то уравнение $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$ имеет единственное решение.

Б) В полном метрическом пространстве уравнение $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$ имеет единственное решение.

В) Сжимающее отображение в полном метрическом пространстве имеет только одну неподвижную точку.

2. В конечномерном метрическом пространстве множество предкомпактно. Тогда оно…

А) Замкнуто.

Б) Ограничено.

В) Открыто.

Г) Всюду плотно.

3. Для каких из следующих множеств в $\mathbb{R}$ существует конечная 1-сеть:

А) $[-\boldsymbol{5}, \infty)$;

Б) $(\boldsymbol{7}, \boldsymbol{25}]$;

В) $\mathbb{N}$.

4. Каким из перечисленных свойств операция сопряжения не обладает:

А) $(\boldsymbol{3A})^* = \boldsymbol{3A}^*$;

Б) $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{B}^*$;

В) $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$.

5. Если $\mathbf{A} \in \boldsymbol{\delta}(\mathbf{H})$ то

А) $\boldsymbol{A^3} + \boldsymbol{E} \geq \boldsymbol{0}$;

Б) $\boldsymbol{3A} - \boldsymbol{5E} \in \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{H})$;

В) $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}\ (\boldsymbol{Ay}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{Ax})$.

6. Для того чтобы линейный оператор был взаимно однозначен, необходимо и достаточно, чтобы:

А) его ядро состояло только из нулевого элемента;

Б) его ядро было пустым множеством;

В) его ядро было линейным многообразием.

7. Оператор $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ непрерывно обратим. Тогда неверно

А) $\exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}: \forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{Ax} \neq \boldsymbol{y}$;

Б) $\boldsymbol{A^{-1}}$ ограничен;

В) $\boldsymbol{A}$ взаимно однозначен.

8. Какая из следующих функций является решением интегрального уравнения $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{6} \int_{-\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{1}} \boldsymbol{tsx}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds} - \boldsymbol{2}$:

А) $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t} - \boldsymbol{2}$;

Б) $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{2}$;

В) $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}/\boldsymbol{3} - \boldsymbol{2}$.

Тест №2

1. Одна из аксиом скалярного произведения имеет вид…

А) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$.

Б) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$.

В) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$.

2. Множество называется открытым, если…

А) Все его точки - внутренние.

Б) Оно содержит все свои внутренние точки.

В) Если оно не замкнуто.

3. Какая из приведенных ниже функций не будет элементом пространства $\boldsymbol{C}[-\mathbf{1},\mathbf{1}]$:

А) $\mathbf{tg}(\boldsymbol{t})$;

Б) $(\mathbf{2}^{\boldsymbol{t}}+\mathbf{1})/\boldsymbol{t}$;

В) $\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{t}+\mathbf{2}|$;

Г) $\boldsymbol{ch}^{\mathbf{2}}(\mathbf{2}\boldsymbol{t})$.

4. В гильбертовом пространстве для любых $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$ выражение $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{\mathbf{2}}-\|\boldsymbol{x}\|^{\mathbf{2}}$ равно…

А) $-\|\boldsymbol{y}\|$;

Б) 0;

В) $\|\mathbf{y}\|^{\mathbf{2}}$.

5. Какое из следующих утверждений неверно:

А) В любой окрестности предельной точки множества содержится бесконечно много точек этого множества.

Б) В любой окрестности предельной точки множества содержится хотя бы одна точка этого множества.

В) Если $\boldsymbol{x}$ – предельная точка множества, то найдется последовательность элементов этого множества, сходящаяся к $\boldsymbol{x}$.

Г) Любая предельная точка множества является элементом этого множества.

6. Линейное пространство будет бесконечномерным если в нем …

А) Существует счетный ортонормированный базис.

Б) Любая система из конечного числа элементов линейно независима.

В) Существует линейно независимая система с любым наперед заданным числом элементов.

7.Оператор $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ не является непрерывным в точке $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{X}$, если…

А) $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \forall x\in X:\|x-a\|<\delta\Longrightarrow\|Ax-Aa\|\geq\varepsilon$;
Б)) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X:\|x-a\|<\delta\Longrightarrow\|Ax-Aa\|\geq\varepsilon$;
В) $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in X:\|x-a\|<\delta\Longrightarrow\|Ax-Aa\|\geq\varepsilon$;

Г) $\forall\boldsymbol{\varepsilon}>\mathbf{0}\ \exists\boldsymbol{\delta}>\mathbf{0}\ \exists\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\boldsymbol{\delta}\Longrightarrow\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{Aa}\|\geq\boldsymbol{\varepsilon}$.

8. Среди следующих операторов выберите нелинейные:

А) $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{C}[-\mathbf{2};\mathbf{1}]\to\boldsymbol{C}[-\mathbf{2};\mathbf{1}],\ \boldsymbol{Ax}(\boldsymbol{t})=\int_{-\mathbf{2}}^{\mathbf{1}}\mathbf{sin}\,\boldsymbol{s}\,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}(\mathbf{0})$;

Б) $\boldsymbol{A}:\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\to\mathbb{R}^{\mathbf{2}},\boldsymbol{Ax}=(\mathbf{0},\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}},\mathbf{2}\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}),\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}},\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}})$;

В) $\boldsymbol{C}[\mathbf{0};\mathbf{1}]\to\boldsymbol{C}[\mathbf{0};\mathbf{1}],\ \boldsymbol{Ax}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}^{\mathbf{4}})$;

Г) $\boldsymbol{A}:\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\to\mathbb{R},\ \boldsymbol{Ax}=\mathbf{1}-\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}-\mathbf{6}\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}$, где $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}},\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}})$.

9. Норма оператора $\boldsymbol{Ax = 4x_1 - 3x_3, x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{4}}$ равна

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 7.

10. Последовательность элементов пространства $\boldsymbol{L(X, Y)}$, сходящаяся по норме этого пространства, называется

А) сильно сходящейся;

Б) слабо сходящейся;

В) равномерно сходящейся;

Г) поточечно сходящейся.

7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля – 50% и промежуточного контроля – 50%.
Текущий контроль по дисциплине включает:
- посещение занятий – 10 баллов,
- участие на практических занятиях – 10 баллов,
- коллоквиум – 40 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:
- устный опрос – 50 баллов,
- письменная контрольная работа – 50 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1989.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
3. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.
4. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

б) дополнительная литература:

5. Меджидов З.Г. Методические указания и задачи по курсу "Интегральные уравнения". Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1999.
6. Константинов Р.В. Лекции по функциональному анализу. Долгопрудный, 2007.

7. Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р. К. Функциональный анализ. Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2010.
8. Глазырина П.Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Глазырина П.Ю., Дейкалова М.В., Коркина Л.Ф.– Электрон. текстовые данные.– Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016.– 216 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/66213.html. – ЭБС «IPRbooks»

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

2319 http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Дисциплина «Функциональный анализ» является основной базой всех математических дисциплин, изучаемых будущими бакалаврами. Специфика дисциплины состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач из разных разделов высшей математики. Эти задачи служат иллюстрацией отдельных понятий, теорем и методов функционального анализа.

Систематическое изложение научных материалов, освещение главных тем данной дисциплины проводится в ходе лекционного курса. Изучение теоретического курса выполняется самостоятельно каждым студентом по итогам каждой из лекций, используя конспект (электронный) лекций, учебники, представленные в разделе 8 «Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины», результаты контролируются преподавателем на практических занятиях.

Если возникают вопросы, следует обратиться на кафедру к преподавателю, согласно графику консультаций ведущего преподавателя. Обращаясь за консультацией, необходимо указать, каким учебником пользовались и какой раздел, глава, параграф вам не понятен.

Решения задач и самостоятельные работы по заданию (индивидуальному, где требуется) преподавателя сдаются в конце каждой зачетной единицы.

Для сдачи зачетной единицы «Линейные нормированные и гильбертовы пространства» необходимо проанализировать лекционный материал с использованием источников литературы, предварительно повторить темы "Векторы и операции над ними", «Модуль комплексного числа и его свойства».

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить соответствующий теоретический материал из следующих литературных источников:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1989.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Решать задачи и упражнения из учебных и учебно-методических пособий:

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.;
2. Меджидов З.Г. Методические указания и задачи по курсу "Интегральные уравнения". Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1999.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине: «Функциональный анализ» необходимы:
Системное программное обеспечение: ОС Windows 7/8/10;
Прикладное программное обеспечение: MSOffice 2007/2010/2013;
Сетевые приложения: электронная почта, поисковые системы Google, Yandex.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для проведения лекционных занятий на факультете необходима аудитория на 25-35 мест, оборудованная ноутбуком, экраном и цифровым проектором.