

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

Рабочая программа по дисциплине:

**Дифференциальные уравнения в прикладных задачах  
естествознания.**

Направление :

**01.03.01 Математика**

Профиль подготовки:

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Уровень высшего образования: **бакалавриат**

Форма обучения

***Очная***

Статус дисциплины: *дисциплина по выбору ОПОП*

Махачкала 2022

Рабочая программа дисциплины «Дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания» составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению **01.03.01 Математика**. Приказ Минобрнауки от «26» ноября 2020 г. № 1456.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа, Джабраилова Лейла Мусаевна, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры ДУ и ФА от «15» марта 2022 г.,  
протокол № 8

Зав. Кафедрой



Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и  
компьютерных наук от «23» марта 2022 г., протокол №7.

Председатель



Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим  
управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ



Гасангаджиева А.Г.

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина "Дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания"  
» входит в вариативную часть образовательной программы бакалавриата по направлению

### 01.03.01 Математика

Дисциплина реализуется на математическом факультете кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с формированием и развитием у студентов профессиональных и специальных компетенций, позволяющих им на базе освоенных теоретических и практических основ математического аппарата осуществлять профессиональную деятельность. Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

профессиональных – УК-1, ОПК-1, ПК-3,

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий:  
лекции, практические занятия, самостоятельная работа.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме контрольная работа, коллоквиум и тестирование и промежуточный контроль в форме зачета.

Объем дисциплины 2 зачетных единиц, в том числе в 72 академических часах по видам учебных занятий

Семес тр	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцирова нный зачет, экзамен	
	в том числе							
	Контактная работа обучающихся с преподавателем							зачет
	Все го	из них						
Лекц ии		Лабораторн ые занятия	Практическ ие занятия	СРС	консул ьтации			
8	72	40	-	22	6	-	4	зачет

#### 1. Цели освоения дисциплины.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания» рассматривает использование современной теории и практики дифференциальных уравнений для решения прикладных задач естествознания.

**Целью дисциплины** является изучение основных математических моделей, применяющихся в различных разделах современной биологии, медицины, экологии, физики

,теоретической механики и т.д. , подготовка студентов в области исследования сложных систем и процессов на основе методов математического моделирования, с применением дифференциальных уравнений и их систем.

**Задачами преподавания** дисциплины являются следующие:

- раскрыть содержание базовых понятий, предмета, методов и принципов моделирования; - дать представление о видах моделирования и основных подходах к построению математических моделей систем;
- исследование и оптимизация процессов естествознания и описание их и систем на различных уровнях их организации;
- дать навыки применения точных математических методов в научно-исследовательской работе ;

## **2.Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата.**

Дисциплина «Дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания» входит в часть дисциплина по выбору образовательной программы бакалавриата. Предшествующими курсами ,на которых базируется дисциплина являются «Математический анализ », «Линейная алгебра ».

Особенностью дисциплины является обучение студентов основам построения моделей физических ,биологических и других процессов и проведение вариантных модельных экспериментов.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с дифференциальными уравнениями, системами дифференциальных уравнений , устойчивостью решений дифференциальных уравнений. Применяются в гидродинамике, в теории упругости, статике и динамике, биологии , медицине и химии. Дисциплину "Дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания " необходимо изучить для исследования вопросов связанных с методами математической физики.

## **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения и процедура освоения )**

<b>Код и наименование компетенции из ОПОП</b>	<b>Код и наименование индикатора достижения компетенций</b>	<b>Планируемые результаты обучения</b>	<b>Процедура освоения</b>

УК-1. Способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации.	<p><b>Знает:</b> структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, а также базовые составляющие таких задач.</p> <p><b>Умеет:</b> анализировать постановку данной математической задачи, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения.</p> <p><b>Владеет:</b> навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математических дисциплин</p>	Устный опрос, письменный опрос; контрольная работа, коллоквиум
	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать	<p><b>Знает:</b> принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации научной информации области</p>	

	их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.	<p>математики и компьютерных наук.</p> <p><b>Умеет:</b> системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук.</p> <p><b>Владеет:</b> навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок</p>	
--	--	--	--

	<p>УК-1.3.Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных</p>	<p><b>Знает:</b> современные методы сбора и анализа научного материала с использованием информационных технологий; основные методы работы с ресурсами сети Интернет.</p> <p><b>Умеет:</b> применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; практически использовать научно-образовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях и в деятельности педагога.</p> <p><b>Владеет:</b> навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками использования современных баз данных; навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах.</p>	
			...
<p>ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.1.Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и естественных наук.</p>	<p><b>Знает:</b> теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а</p>	<p>Устный опрос, письменный опрос; контрольная работа, коллоквиум</p>

		<p>также теоретической механики, физики.</p> <p><b>Умеет:</b> решать задачи, связанные с исследованием свойств функций и их производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами.</p> <p><b>Владеет:</b> базовыми методами современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач</p>	
	ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности	<p><b>Знает:</b> способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук. <b>Умеет:</b> применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. <b>Владеет:</b> навыками применения методов современного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.</p>	
	ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	<p><b>Знает:</b> различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. <b>Умеет:</b> корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук. <b>Владеет:</b> навыками выбора методов решения задач современного математического анализа</p>	
			...

<p>ПК-3. Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>ПК-3.1. Знает основы современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>Знает: разные подходы к определению основных понятий математики; основные понятия информатики; формулировки математических утверждений при различных изменениях их исходных условий; различные языки программирования;          Умеет: устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики математики и информатики необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.          Владеет: определенными навыками планирования и проведения работы по собиранию, обработке и интерпретированию данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям математики и информатики.</p>	<p>Круглый стол          Устный опрос,          письменный опрос;          контрольная работа,          коллоквиум</p>
	<p>ПК-3.2. Планирует популярные лекции, экскурсии и другие виды деятельности необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>Знает: разнообразные формы пропаганды и популяризации знаний в области математики и информатики.          Умеет: планировать изложение различных базовых вопросов изучения математики и информатики в доступной для данной 46 аудитории форме.          Владеет: определенным опытом планирования и проведения экскурсий для пропаганды и популяризации знаний в области математики и информатики.</p>	



	<p>ПК-3.3. Проводит необходимую работу по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>Знает: современные методы по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p> <p>Умеет: привлечь внимание обучающихся к математическим и компьютерным наукам.</p> <p>Владеет: навыками проведения работы по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 2 зачетных единиц, 72 академических часов.

#### 4.2. Структура и содержание дисциплины

№	Тема	Виды учебной работы и самостоятельная работа, в час.	Итого	Формы контроля
---	------	--	-------	----------------

		Лекции	Семинарские практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа		
1	2	3	4	5	6	7	8
1	<b>Модуль 1.</b>						
2	Дифуравнения в экологии	4	2		1	7	тест
3	Динамика популяций Моделирование микробных популяций	4	2		1	7	тест
4	Периодические процессы .Колебания в биологических системах. Модели распространения эпидемий	4	2		1	7	тест
5	Классические задачи физики решаемые с помощью уравнений в частных производных.	2	2		1	5	тест
6	Модели гидродинамики	2	2			4	тест
	Дифуравнения в химии	4	2			6	тест
7	Итого за 1 модуль	20	12		4	36	
	<b>Модуль 2.</b>						
8	Исследование устойчивости стационарных состояний систем.	6	4		2	12	
9	Исследование устойчивости динамических систем задач медицины.	8	4		2	14	тест
10	Устойчивость состояний динамических систем задач медицины	6	2		2	<b>10</b>	тест
11	Итого за 2 модуль	20	10		6	<b>36</b>	тест
12	итого	40	22		10	72	тест

#### **4.1.Содержание дисциплины (темы лекционных занятий )**

##### **Модуль 1 .Дифференциальные уравнения в биологии и экологии.**

###### **Тема 1 . Дифференциальные уравнения в экологии.**

Основные типы дифуравнений и их приложения к составлению математических моделей биологических задач. Модель взаимодействия Вольтерра. Модель конкурентного взаимодействия двух видов .Модель хищник - жертва .Нормирование выбросов вредных веществ.

###### **Тема 2. Динамика популяций.**

Взаимодействие популяций. Конкуренция. Модели Хэснела. Гипотеза Вольтерра.

###### **Тема3 .Периодические процессы .Колебания в биологических системах.**

Биологические часы. Модели сердца. Стохастический резонанс в биологии .Понятия автоколебаний .Бифуркация Андронова- Хопфа. Модель брусцеллятор.

###### **Тема 4.Модели распространения эпидемии и иммунных реакций .**

Анализ распространения безыммунной эпидемии .Модели развития эпидемии с приобретенным иммунитетом .Математическая модель динамики иммунных реакций .Математические модели в вирусологии.

###### **Тема 5. Нелинейные волны.**

Модель нервного импульса. Нелинейная модель антипорта ионов. Мультистационарная модель. Автоколебательная модель. Динамический хаос.

###### **Тема 6 .Моделирование микробных популяций.**

Микробные популяции как объект моделирования и управления. Непрерывная культура микроорганизмов. Модель Моно. Двухвозрастная модель .Непрерывные возрастные распределения.

###### **Тема 7.Классические задачи физики решаемые с помощью уравнений в частных производных.**

Кривая погони .Задача о брахистохроне. Кривизна плоских кривых.Уравнение цепной линии .Второй закон Ньютона .Закон всемирного тяготения .

Механические колебания . Нелинейный математический маятник .Колебания в электрических цепях.

Уравнение колебаний струны .Уравнение колебаний мембраны.Задача о распределении тепла в стержне.

###### **Тема 8. Модели гидродинамики.**

Дифференциальные уравнения и их системы в задачах гидродинамики.

Модели гидродинамики. Движение рыб. Динамика крови.

#### **Тема 10. Дифференциальные уравнения в химии.**

Скорость реакции. Кинетические уравнения. Каталитические процессы. Необратимая реакция определенного порядка.

#### **Модуль 2. Элементы качественной теории дифуравнений.**

#### **Тема 11. Элементы качественной теории дифуравнений.**

Непрерывные и дискретные модели. Системы дифференциальных уравнений как модели биологических процессов. Устойчивость динамических систем. Модели Мальтуса и Ферхюльста.

#### **Тема 12. Исследование устойчивости стационарных состояний систем.**

Уравнения Лотки и Вольтерра. Стационарные состояния систем. Устойчивость по Ляпунову. Метод Ляпунова линеаризации систем в окрестности стационарного состояния.

#### **Тема 13. Устойчивость состояний динамических систем задач медицины.**

Модели морфогенеза. Рост колоний микробов. Рост раковой опухоли.

Модель лимфоцитарного хориоменингита. Модель Велдона (лейкемии). Модель Оттесена (сердечно-сосудистой системы)

### **4.2. Содержание дисциплины (темы практических занятий)**

#### **Модуль 1**

#### **Тема 1. Дифференциальные уравнения в экологии.**

Приложения дифференциальных уравнений в экологии. Модель «хищник-жертва». Модель взаимодействия Вольтерра. Конкуренция.

#### **Тема 2. Динамика популяций.**

Взаимодействие популяций. Конкуренция. Модели Хэснела. Гипотеза Вольтерра.

#### **Тема 3. Периодические процессы**

Модели сердца. Стохастический резонанс в биологии. Понятия автоколебаний. Бифуркация Андронова-Хопфа. Модель брюсцеллятор.

#### **Тема 4. Модели распространения эпидемии и иммунных реакций**

Математическая модель динамики иммунных реакций .Математические модели в вирусологии .

### **Тема 5. Нелинейные волны.**

Модель нервного импульса. Нелинейная модель антипорта ионов. Мультистационарная модель. Автоколебательная модель. Динамический хаос.

### **Тема 6 .Моделирование микробных популяций.**

Микробные популяции как объект моделирования и управления. Непрерывная культура микроорганизмов. Модель Моно. Двухвозрастная модель .Непрерывные возрастные распределения.

### **Тема 7.Классические задачи физики решаемые с помощью уравнений в частных производных.**

Кривая погони .Задача о брахистохроне. Кривизна плоских кривых.Уравнение цепной линии .  
Второй закон Ньютона .Закон всемирного тяготения .

Механические колебания . Нелинейный математический маятник .Колебания в электрических цепях.

Уравнение колебаний струны .Уравнение колебаний мембраны.Задача о распределении тепла в стержне.

### **Тема 8. Модели гидродинамики.**

Дифференциальные уравнения и их системы в задачах гидродинамики.  
Модели гидродинамики. Движение рыб. Динамика крови.

### **Тема 9.Дифференциальные уравнения в химии.**

Скорость реакции. Кинетические уравнения.Каталитические процессы. Необратимая реакция определенного порядка.

### **Модуль 2.Элементы качественной теории дифуравнений.**

### **Тема 11.Элементы качественной теории дифуравнений.**

Непрерывные и дискретные модели. Системы дифференциальных уравнений как модели биологических процессов. Устойчивость динамических систем. Модели Мальтуса и Ферхюльста.

### **Тема 12. Исследование устойчивости стационарных состояний систем.**

Уравнения Лотки и Вольтерра .Стационарные состояния систем. Устойчивость по Ляпунову. Метод Ляпунова линеаризации систем в окрестности стационарного состояния.

### **Тема 13.Устойчивость состояний динамических систем задач медицины.**

Модели морфогенеза. Рост колоний микробов . Рост раковой опухоли.

Модель лимфоцитарного хориоменингита .Модель Велдона (лейкемии).Модель Оттесена (сердечно-сосудистой системы).

## **5. Образовательные технологии**

В основе преподавания дисциплины лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов. По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы экспертов и специалистов.

При изучении дисциплины «Дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания» используются следующие образовательные технологии:

- аудиторные занятия (лабораторные занятия);
- внеаудиторные занятия (самостоятельная работа, индивидуальные консультации).

В соответствии с требованиями ФГОС при реализации различных видов учебной работы в процессе изучения дисциплины «Математическое моделирование биологических процессов» предусматривается использование в учебном процессе следующих активных и интерактивных форм проведения занятий:

- практические занятия в диалоговом режиме;
- компьютерное моделирование и практический анализ результатов;
- научные дискуссии;
- работа в малых группах по темам, изучаемым на занятиях

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

1. А.Р. Эфендиев, Дифференциальные уравнения (пособие), ДГУ, 2012 г.
2. А.Р. Эфендиев, Практикум по дифференциальным уравнениям (пособие), ДГУ, 2012 г. 3. Киясов, С.Н.Шурыгин В.В.Дифференциальные уравнения.Основы теории.Учебное пособие./-Казань,КФУ,2011г.
- 4.Мухарлямов Р.К.Панкратьева Т.Н.Системы обыкновенных дифференциальных уравнений./Метод пособие.Казань,КФУ.-2013

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
--	--

Дифуравнения первого порядка	Доклады на тему: 1.Основные типы уравнений первого порядка.Линейные уравнения и уравнения Бернулли.
Элементы статистического анализа	Доклады на тему: 1.Комбинаторика в генетике. 2.Статистика в генетике..
Дифуравнения в частных производных	Доклады на тему: 1.Фазовые потоки и эволюция.
Элементы качественного анализа в теории дифуравнений	Доклады на тему: 1.Фазовые портреты для канонических систем на плоскости
Исследование устойчивости стационарных состояний систем	Доклады на тему: 1.Модели морфогенеза.
	2.Фазовый портрет динамической системы.
Динамика популяций.Моделирование микробных популяций.	Доклады на тему: 1.Модель Моно.
Задачи статики и динамики .	Доклады тему: 1.Динамика вращательного движения.
Дифференциальные уравнения в химии.	Доклады на тему: 1. Некоторые дифференциальные модели в биологии и химической кинетике и физике. Примеры полного качественного исследования

## **7. Фонд оценочных средств, для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

### **7.1. Типовые контрольные задания**

#### *Примерный список вопросов к зачету :*

- 1.Особенности систем и задач естествознания и как объектов математического моделирования.
2. Кинетические уравнения в химии 3.  
Уравнения материального баланса в химии
4. Экстремум.
5. Дифуравнение экспоненциального роста.
6. Уравнение Лапласа.

7. Уравнение Пуассона.
8. Уравнение Неймана.
9. Частично изолированные популяции
10. Модель Оттесена.
11. Устойчивость систем дифференциальных уравнений.
12. Дифференциальные уравнения в экологии
13. Модель "хищник - жертва"
14. Модели биологической динамики на основе точечных отображений
15. Диаграмма Ламеррея
16. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений
17. Дифференциальные уравнения в частных производных
18. Модели морфогенеза
19. Рост колоний микробов
20. Рост ареала популяции
21. Рост раковой опухоли
22. Устойчивое развитие биологических систем.
23. Периодические процессы
24. Биологические часы
25. Модели сердца
26. Стохастический резонанс в биологии
27. Модели гидродинамики
28. Движение рыб
29. Динамика крови
30. Нелинейные волны

### Примерные задания для контрольных работ

1. Уравнение  $N' = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - H$  представляет простейшую модель рыбной ловли. В отсутствие рыболовов популяция рыб растет предположительно согласно логистической кривой. Влияние рыбаков на численность популяции определяется членом  $-H$ , который говорит о том, что рыба ловится в постоянном объеме  $H$ , не зависящем от  $N$ . Это предполагает, что рыбаки не заботятся об оставшейся рыбе и каждый день ловят одно и то же ее количество. Нарисовать фазовые портреты для различных величин  $h$ . Обсудить поведение популяции при  $h < h_c$  и  $h > h_c$ . Дать биологическую интерпретацию в каждом случае.
2. Рассмотреть модель стимулирования светляков
 
$$\begin{cases} \theta' = \Omega \\ \theta' = w + Af(\theta - \theta) \end{cases}$$
 где



$$f(\varphi) = \begin{cases} \varphi, & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \varphi, & \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

и  $f(\varphi)$  периодически распространяется за пределы указанного промежутка.

Нарисовать график  $f(\varphi)$

. Найти интервал стимуляции. В предположении, что жук и стимулятор находятся в фазовом замке, найти формулу для фазовой разности  $\varphi^*$ .

3. Простейшая модель конкуренции имеет вид

$$\begin{cases} N_1' = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) - b N_1 N_2 \\ N_2' = r_2 N_2 - b N_1 N_2 \end{cases}$$

где  $N_1, N_2 \geq 0$ .

Нарисовать фазовый портрет и дать биологическую интерпретацию.

### Задачи для самостоятельной работы студентов

1.1 Найдите стационарные состояния уравнений:

$$\frac{dx}{dt} - \eta x^4 = \gamma x^2;$$

$$\frac{dx}{dt} - rx = \delta x^2;$$

$$\frac{dx}{dt} - Ax^3 = -Bx;$$

$$(u - x) + \frac{dx}{dt} = 2u - x^2;$$

$$\frac{dx}{dt} + 6x = x^2 + 8;$$

$$\frac{dx}{dt} + 15 = x^2 + 2x.$$

1.2. Разложите функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки 0  $x$  до 4 порядка:

$$f(x) = x^3 + 1, \quad x_0 = 1;$$

$$f(x) = e^{-x}, \quad x_0 = 2;$$

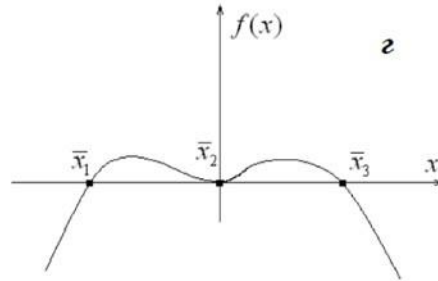
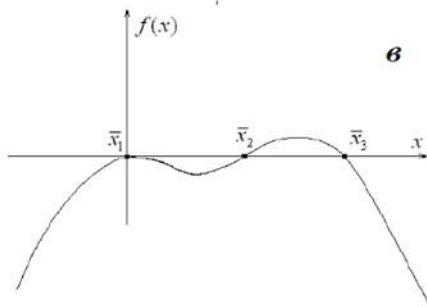
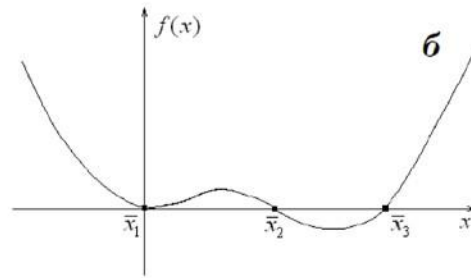
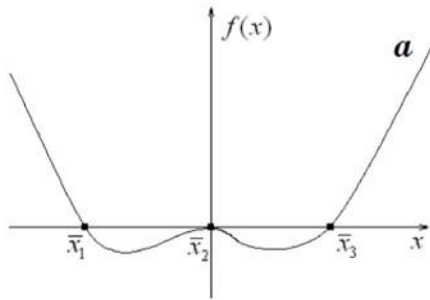
$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 1;$$

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x_0 = 1;$$

$$f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1;$$

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0.$$

**1.3.** Пусть  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ . Определите по графику функции  $f(x)$  устойчивость всех стационарных состояний уравнения.

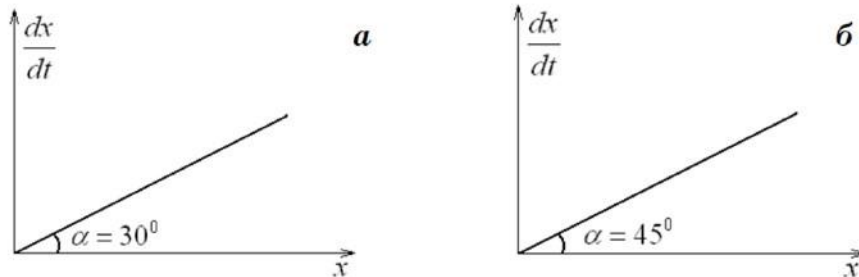


1.4. Пусть  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ . Найти стационарные состояния

уравнения и определить их тип устойчивости с помощью графика функции  $f(x)$ :

1.5. Пусть  $\frac{dx}{dt} = (x-1)(x^2 + bx + 1)$ . Постройте график зависимости величины стационарного значения переменной  $x$  от значений параметра  $b$ . Сколько стационарных состояний имеет уравнение при  $b \in (-\infty, +\infty)$ ?

2.1. График функции, задающей скорость изменения численности микробной популяции, имеет вид:



1) Какое выражение будет описывать динамику роста культуры, если в начальный момент времени ее размер равен  $10^5$ .

2) Какова будет численность культуры через 1 час, если ее размер в начальный момент времени равна  $10^7$ .

2.2. Рост популяции описывается уравнением Ферхюльста. Емкость экологической ниши для нее равна 1000. Постройте график динамики численности популяции, если известно, что начальная численность равна:

а) 10; б) 700; в) 1200.

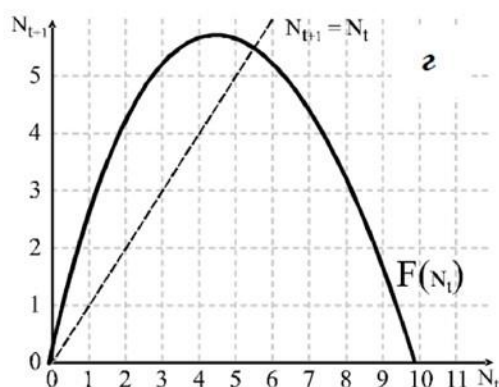
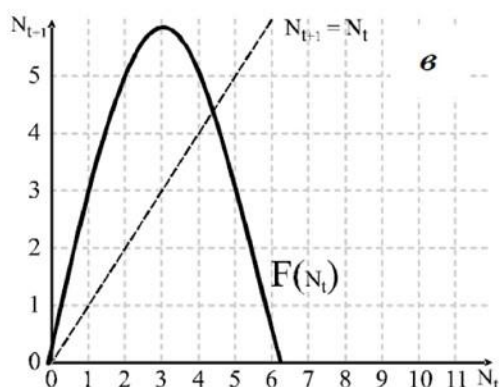
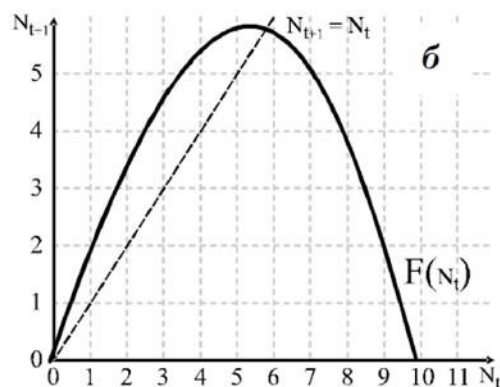
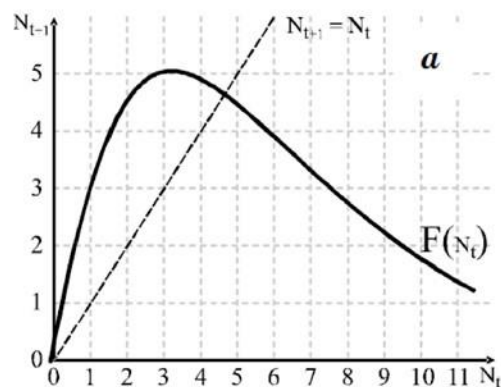
Скорость роста  $r$  равна 0.5. Укажите координаты точки перегиба и асимптоты.

2.3. Рост популяции описывается уравнением, учитывающим нижнюю границу численности и внутривидовую конкуренцию:

$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{1+x} - dx - px^2$ . Определите величины

верхней и нижней границы численности, если известно, что коэффициент смертности равен 0.1, а внутривидовой конкуренции равен 0.4. Постройте графики динамики численности популяций для начальных значений меньших нижней критической границы, лежащих в пределах между нижней и верхней границей, и превышающих верхнюю границу.

**3.1.** С помощью диаграммы Ламерея построить график динамики численности популяции, если зависимость  $N_{t+1} = f(N_t)$  имеет вид:



**6.1.** Модель отбора (выбора одного из равноправных), учитывающая ограниченность в питательных ресурсах и быстрое их поглощение по сравнению с процессами репродукции, в безразмерных величинах имеет вид:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot \left( \frac{7.5}{x+y} - (1+y) \right), \\ \frac{dy}{dt} = y \cdot \left( \frac{7.5}{x+y} - (1+x) \right). \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot \left( \frac{4}{x+y} - (1+y) \right), \\ \frac{dy}{dt} = y \cdot \left( \frac{4}{x+y} - (1+x) \right). \end{cases}$$

Найдите координаты особых точек. Определите тип каждого, из найденных стационарных состояний.

Постройте фазовый портрет системы: а) постройте главные изоклины системы (обязательно укажите уравнения, задающие главные изоклины); б) отметьте стационарные точки на фазовой плоскости; в) постройте несколько фазовых траекторий с различными начальными условиями. Стрелкой укажите направление движения вблизи каждого стационара при  $t \rightarrow \infty$ .

**6.2.** Взаимоотношения типа хищник-жертва или паразит-хозяин могут быть описаны системой уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(6 - 3y - 0.5x), \\ \frac{dy}{dt} = y(5 + 0.8x - y). \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(4 - 3y - x), \\ \frac{dy}{dt} = y(3 + 0.2x - 4y). \end{cases}$$

Найдите координаты особых точек. Определите тип каждого, из найденных стационарных состояний. Постройте фазовый портрет системы: а) постройте главные изоклины системы (обязательно укажите уравнения, задающие главные изоклины); б) отметьте стационарные точки на фазовой плоскости; в) постройте несколько фазовых траекторий с различными начальными условиями. Стрелкой укажите направление движения вблизи каждого стационара при  $t \rightarrow \infty$ .

### Задания для построения моделей:

1. Экспоненциальный рост популяции (решение уравнения, график временной зависимости для численности)
2. Логистический рост (решение уравнения, график временной зависимости для численности, анализ устойчивости стационарных состояний)
3. Модель популяции с наименьшей критической численностью (график временной зависимости для численности, анализ устойчивости стационарных состояний)
4. Дискретное логистическое уравнение. Лестница Ламерея (построение временной зависимости для численности по графику зависимости, анализ устойчивости положения равновесия)
5. Система линейных химических реакций (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
6. Модель Лотки (модель химической реакции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
7. Классическая модель Вольтерра «хищник-жертва» (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
8. Модель отбора одного из равноправных (общая модель для двух видов и модель, учитывающая ограниченность в питательных ресурсах и быстрое их поглощение по сравнению с процессами репродукции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
9. Модель конкуренции (с учетом внутривидовой конкуренции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
10. Модель «хищник-жертва» (с учетом внутривидовой конкуренции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)

11. Модель биохимической регуляции белкового синтеза (генетический триггер Жакоба и Моно) (для  $m = 0$  определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
12. Брюсселятор (определение стационарных состояний, определение типа устойчивости стационарных состояний в зависимости от значений параметров системы, вид фазового портрета в зависимости от значений параметров системы)
13. Модель гликолиза (упрощенная схема) (определение стационарных состояний, определение типа устойчивости стационарных состояний в зависимости от значений параметров системы, вид фазового портрета в зависимости от значений параметров системы)

### **7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%. Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум - 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов,

### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.**

- а) основная литература

1. Тихонов, Александр Николаевич.

Дифференциальные уравнения : [учеб. для физ. специальностей и специальности "Прикладная математика"] / Тихонов, Александр Николаевич ; А.Б.Васильева, А.Г.Свешников; под ред. А.Н.Тихонова и др.; [Моск. гос. ун-т им. М.В.Ломоносова]. - 4-е изд., стер. - М. :Физматлит, 2005, 2002. - 253 с. : ил. ; 22 см. - (Курс высшей математики и математической физики. вып.6) (Классический университетский учебник). - Библиогр.: с. 249-250. - Предм. указ.: с. 251-253. - ISBN 5-9221-0134-X : 126-28.

2. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко ; под ред. В.К.Романко. - М. : Лаб. Баз. Знаний: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 255,[1] с. - (Технический университет). - ISBN 5-93208-120-1 : 12700.

3. Филиппов, Алексей Фёдорович .

Введение в теорию дифференциальных уравнений : [учеб. для вузов по группе физ.-мат. направлений и специальностей] / Филиппов, Алексей Фёдорович . - М. :Едиториал УРСС, 2004. - 238,[1] с. : ил. ; 22 см. - Библиогр.: с. 234-236. - Предм. указ.: с. 237-239. - Допущено МО РФ. - ISBN 5-354-00416-0 : 120-70.

4. Дифференциальные уравнения : учебник / . - 4-е изд. - Москва :Физматлит, 2002. - 252 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6). - ISBN 978-5-9221-0277-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=145012> (17.10.2018).

б) дополнительная литература

Егоров, Александр Иванович.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / Егоров, Александр Иванович. - М. :Физматлит, 2005. - 384 с. : ил. ; 24 см. - Библиогр.: с.375-376.- Предм. указ.: с.377-380. - ISBN 5-9221-0385-7 : 350-00.

Эльсгольц, Л. Э.

Дифференциальные уравнения : учебник / Л. Э. Эльсгольц. - 6-е изд. - М. :КомКнига, 2006. - 309 с. - (Классический учебник МГУ). - Допущено МО. - ISBN 5-484-00409-8 : 134-86.

Матвеев, Павел Николаевич.

Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Матвеев, Павел Николаевич. - СПб. [и др.] : Лань, 2008. - 330,[6] с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0571-8 : 278-52.

4. Треногин, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В.А. Треногин. - Москва :Физматлит, 2009. - 312 с. - ISBN 978-5-9221-1063-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82614> (17.10.2018).

### **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека
2. [http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rubr=2.2.74.12](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12) – Единое окно доступа к электронным ресурсам
3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer

4. <http://edu.dgu.ru/> - Образовательный сервер ДГУ 5. Moodle [Электронный ресурс]: система виртуального обучения: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: <http://moodle.dgu.ru/>(датаобращения:).

## **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Учебная программа по данной дисциплине распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

## **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по данной дисциплине рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины. Кроме того, на факультете 2 компьютерных класса и 2 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.