

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

Рабочая программа дисциплины:

**«Качественная теория  
дифференциальных уравнений»**

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа

Образовательная программа бакалавриата

направлению **01.03.01 Математика**

Профиль программы:

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Форма обучения: очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП

Махачкала 2022

Рабочая программа дисциплины **«Качественная теория дифференциальных уравнений»** составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению **01.03.01 Математика**, Приказ Минобрнауки от «10» января 2018 № 8

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа, Джабраилова Лейла Мусаевна, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рабочая программа дисциплины одобрена:  
на заседании кафедры ДУ и ФА от «15» марта 2022 г., протокол № 8

Зав. Кафедрой  Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «23» марта 2022 г., протокол № 7

Председатель  Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ  Гасангаджиева А.Г.

## Дисциплина **"Качественная теория дифференциальных уравнений"**

входит в блок дисциплин по выбору образовательной программы **бакалавриата** по направлению (специальности) **01.03.01 Математика**

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с формированием и развитием у студентов профессиональных и специальных компетенций, позволяющих им на базе освоенных теоретических и практических основ математического аппарата осуществлять профессиональную деятельность.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: профессиональных – **УК-1, ОПК -1, ПК-3.**

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: **лекции, практические занятия, самостоятельная работа.**

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме **контрольная работа, коллоквиум и тестирование** и промежуточный контроль в форме **экзамена.**

Объем дисциплины 3 зачетных единиц, в том числе в 108 академических часах по видам учебных занятий

Семес тр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцирова нный зачет, экзамен
	в том числе							
	Контактная работа обучающихся с преподавателем							
	Все го	из них						
Лекц ии		Лабораторн ые занятия	Практическ ие занятия	КСР	консул ьтации			
1	108	32	-	16	36		24	экзамен

### **1. Цели освоения дисциплины.**

**Целями** освоения дисциплины является формирование у будущих специалистов современных теоретических знаний в области классических и неклассических методов исследования решений дифференциальных уравнений и их систем, для чего необходимо знакомство студентов с методами и приемами качественного исследования решений систем дифференциальных уравнений.

### **2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата.**

Дисциплина «Качественная теория дифференциальных уравнений» входит в часть дисциплин по выбору образовательной программы бакалавриата, по направлению (специальности) **01.03.01 – Математика**

Качественная теория дифференциальных уравнений это раздел классической теории дифференциальных уравнений, основным методом которой является изучение качественных свойств поведения дифференциальных уравнений без непосредственного построения самих решений. Настоящий курс посвящен вопросам исследования на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений, изучения качественного поведения траекторий автономных систем в окрестности ее точек покоя.

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях студентами общего курса дифференциальных уравнений и математического анализа. Знание методов качественной теории дифференциальных уравнений дает специалисту набор инструментов профессионального исследования прикладных модельных задач возникающих в различных областях естествознания. Методы исследований с помощью дифференциальных уравнений находят самое широкое применение во многих науках, на первый взгляд, весьма отдаленных

от математики. Эта дисциплины вместе с математическим анализом, теорией функции комплексного и действительного переменного являются фундаментом, на котором строится вся математическая наука.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения и процедура освоения).

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
<p>УК-1. Способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</p>	<p>УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации.</p>	<p><b>Знает:</b> структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, а также базовые составляющие таких задач.  <b>Умеет:</b> анализировать постановку данной математической задачи, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения.  <b>Владеет:</b> навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математических дисциплин</p>	<p>Устный опрос,  письменный опрос;  контрольная работа,  коллоквиум</p>
	<p>УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.</p>	<p><b>Знает:</b> принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации научной информации в области математики и компьютерных наук.  <b>Умеет:</b> системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук.  <b>Владеет:</b> навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок</p>	
	<p>УК-1.3. Имеет практический опыт работы с ин-</p>	<p><b>Знает:</b> современные методы сбора и анализа научного материала с использованием информационных технологий; основные методы работы с</p>	

	<p>формационными источниками, опыт научного поиска, создания научных</p>	<p>ресурсами сети Интернет.  <b>Умеет:</b> применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; практически использовать научно-образовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях и в деятельности педагога.  <b>Владеет:</b> навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками использования современных баз данных; навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах.</p>	
			...
<p>ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.1.Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и естественных наук.</p>	<p><b>Знает:</b> теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а также теоретической механики, физики.  <b>Умеет:</b> решать задачи, связанные с исследованием свойств функций и их производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами.</p>	<p>Устный опрос,  письменный опрос;  контрольная работа,  коллоквиум</p>

		<b>Владеет:</b> базовыми методами современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач	
	ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности  ...	<b>Знает:</b> способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук. <b>Умеет:</b> применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. <b>Владеет:</b> навыками применения методов современного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.	
	ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	<b>Знает:</b> различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. <b>Умеет:</b> корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук. <b>Владеет:</b> навыками выбора методов решения задач современного математического анализа	
ПК-1. Способность демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	ПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.	<b>Знает:</b> основы математического анализа и различные приложения дифференциального и интегрального исчисления в математических и естественных науках; современные языки программирования и современные информационные технологии. <b>Умеет:</b> применять дифференциальное и интегральное исчисления для решения различных задач математических и естественных наук; составлять программы на современных языках программирования. <b>Владеет:</b> базовыми методами дифференциального и интегрального исчислений;	Круглый стол  Устный опрос,  письменный опрос;  контрольная работа, коллоквиум

		навыками программирования на современных языках	
	ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике	<p><b>Знает:</b> области применения дифференциального и интегрального исчисления; различные языки программирования.</p> <p><b>Умеет:</b> решать задачи, связанные: с исследованием свойств функций и их производных, с изучением функциональных рядов, с оценкой погрешности аппроксимации функций; применять различные языки программирования в численном анализе.</p> <p><b>Владеет:</b> методами дифференциального исчисления для исследования функций и навыками приложения интегрального исчисления к геометрии и физике</p>	
	ПК-1.3. Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике и информатике	<p><b>Знает:</b> методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов; методы исследования сходимости рядов; численные методы анализа; современные информационные технологии. <b>Умеет:</b> применять методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов и методы исследования сходимости рядов в численном анализе с использованием современных информационных технологий.</p> <p><b>Владеет:</b> навыками решения задач численного анализа с использованием методов дифференциального и интегрального исчисления</p>	

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 академических часов.

#### 4.2. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц 108 часов.

№	Раздел дисциплины	Сем .	Всего	Виды учебной работы, включая сам.раб. студ-в и трудоемк. (в час.)			Экзамен	Формы текущ.контр. успеv-ти. Форма промежут. аттестации
				лек.	пр. зан.	сам. раб.		
1	<b>Модуль I.</b> Автономные системы	1	36					
2	Раздел 1. Автономные уравнения. Интегральные кривые , фазовый портрет. Автономные системы на плоскости.	1		8	4	6		контр.р.
3	<b>Модуль II.</b> Линейные и нелинейные системы.	1	<b>36</b>					
4	Раздел 2. Простые и непростые канонические системы. Фазовые портреты для канонических систем на плоскости. Оператор эволюции. Линеаризация в окрестности неподвижной точки.	1		8	4	6		контр.р.
5	<b>Модуль III.</b> Теория устойчивости.	1	<b>36</b>					контр.р коллоkv.
6	Раздел 3. Нелинейные системы на плоскости. Непростые неподвижные точки .Их устойчивость.	1		8	4	6		сам.р.
7	Раздел 4. Устойчивость по Ляпунову. Метод функций Ляпунова. Критерий Раусса Гурвица	1		8	4	6		коллоkv.
	Подготовка к экзамену	1						<b>экзамен</b>
	<b>ИТОГО</b>		<b>108</b>	<b>32</b>	<b>16</b>	<b>24</b>	<b>36</b>	

#### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)
	<b>Модуль I.</b> Автономные системы		
1.	Раздел 1. Автономные уравнения. Интегральные кривые , фазовый портрет.	<i>Тема 1.</i> Введение: решение обыкновенного дифференциального уравнения. Геометрическая интерпретация и качественная эквивалентность. Автономные уравнения. Фазовые портреты и динамика. <i>Тема 2.</i> Автономные системы на	КР 1



	Автономные системы на плоскости.	плоскости. Фазовые потоки и эволюция .Линейная замена переменных. Классы подобия для действительных матриц.	
2.	<b>Модуль II.</b> <i>Линейные и нелинейные системы.</i> <i>Раздел 2. Простые и непростые канонические системы</i>	<i>Тема 1.</i> Фазовые портреты для канонических систем на плоскости. Классификация простых линейных фазовых портретов на плоскости. Оператор эволюции. Аффинные системы. <i>Тема 2.</i> Нелинейные системы на плоскости. Локальное и глобальное поведение. Линеаризация в окрестности неподвижной точки. Теорема о линеаризации.	КР 2
3.	<b>Модуль III.</b> <i>Теория устойчивости.</i> <i>Раздел 3.</i> <i>Нелинейные системы на плоскости.</i> Раздел 4. Устойчивость по Ляпунову. Метод функций Ляпунова. Критерий Раусса Гурвица	<i>Тема 1.</i> Непростые неподвижные точки. Их устойчивость. Обыкновенные точки и глобальное поведение. Первые интегралы. Предельные циклы. Теория Пуанкаре. Механический осциллятор. Уравнение Вольтерра-Лотка и его модификации. <i>Тема 2.</i> Теория устойчивости. Устойчивость по Ляпунову. Основные понятия и определения. Метод функций Ляпунова. Критерий Раусса Гурвица и геометрический критерий устойчивости. <i>Тема 3.</i> Приложения качественной теории к исследованию дифференциальных моделей и конкретных динамических систем. Некоторые дифференциальные модели в биологии и химической кинетике и физике. Примеры полного качественного исследования динамических систем	КР 3
4.	<b>Модуль 4.</b>	Подготовка к экзамену	экзамен

#### 4.4. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	конт роль ные	экзамен	СРС	Всего час.
1.	Раздел 1. Автономные уравнения. Интегральные кривые, фазовый портрет. Автономные системы на плоскости.	8	4	8		6	26
2.	<i>Раздел 2. Простые и непростые</i>	8	4	8		6	26

	<i>канонические системы</i>						
3	Раздел 3. Нелинейные системы на плоскости. Непростые неподвижные точки. Их устойчивость.	8	4	8		6	26
4.	Раздел 4. Устойчивость по Ляпунову. Метод функций Ляпунова. Критерий Раусса Гурвица	8	4	12		6	30
5.	Итого	32	16	36		24	108

#### **4.4. Темы практических занятий.**

##### **Практические занятия**

##### **Модуль 1. Автономные системы .**

*Занятие 1.* Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Существование и единственность решения. Особые решения.

*Занятие 2.* Системы дифференциальных уравнений. Методы их решения. Автономные системы. Построение фазового портрета.

##### **Модуль 2. Линейные и нелинейные системы.**

*Занятие 3.* Линейные и нелинейные системы. Линейная замена переменных.

*Занятие 4.* Простые и непростые канонические системы. Оператор эволюции

##### **Модуль 3. Теория устойчивости.**

*Раздел 3. Нелинейные системы на плоскости.*

*Раздел 2. Простые и непростые канонические системы*

Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений..

Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость.

№	№ РАЗДЕЛА	ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	ТРУДО-
---	-----------	-------------------------------	--------

П/П	ДИСЦИПЛИНЫ	(СЕМИНАРОВ)	ЕМКОСТЬ (ЧАС.)
1.	1	<i>Занятие 1.</i> Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Существование и единственность решения. Особые решения. <i>Занятие 2.</i> Системы дифференциальных уравнений. Методы их решения. Автономные системы. Построение фазового портрета.	4
2.	2	<i>Занятие 3.</i> Линейные и нелинейные системы. Линейная замена переменных. <i>Занятие 4.</i> Простые и непростые канонические системы. Оператор эволюции	2
3.	3	<i>Занятие 5.</i> Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений.. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость.	4
4.	4	<i>Занятие 6.</i> Приложения качественной теории к исследованию дифференциальных моделей и конкретных динамических систем. Основы качественной теории дифференциальных уравнений. <i>Занятие 7.</i> Асимптотическое поведение решений автономных систем дифференциальных уравнений. Фазовый портрет динамической системы	2
5.	5	<i>Занятие 8.</i> Приложения качественной теории к задачам физики. Приложения качественной теории к задачам статики и динамики Приложения качественной теории к задачам гидродинамики. <i>Занятие 9.</i> Приложения качественной теории к задачам аэродинамики. <i>Занятие 10.</i> Приложения качественной теории к задачам биологии и медицины.	4
	Итого		16

## 5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов. По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение

занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы экспертов и специалистов.

В ходе освоения дисциплины предусматривается применение следующих активных методов обучения

1. Выполнение практических заданий с элементами исследования.
2. Отчетные занятия по разделам.
3. Выполнение студентами индивидуальной исследовательской работы по анализу заданий с поиском и выбором метода их решения.
4. Лабораторные занятия.
5. Вузовская лекция должна выполнять не только информационную функцию, но также и мотивационную, воспитательную и обучающую.
6. **Информационная функция** лекции предполагает передачу необходимой информации по теме, которая должна стать основой для дальнейшей самостоятельной работы студента.
7. **Мотивационная функция** должна заключаться в стимулировании интереса студентов к науке. На лекции необходимо заинтересовывать, озадачить студентов с целью выработки у них желания дальнейшего изучения той или иной экономической проблемы.
8. **Воспитательная функция** ориентирована на формирование у молодого поколения чувства ответственности, закладку нравственных, этических норм поведения в обществе и коллективе, формирование патриотических взглядов, мотивов социального поведения и действий, финансово-экономического мировоззрения.
9. **Обучающая функция** реализуется посредством формирования у студентов навыков работы с первоисточниками и научной и учебной литературой.

#### **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

1. А.Р. Эфендиев, Дифференциальные уравнения (пособие), ДГУ, 2012 г.
2. А.Р. Эфендиев, Практикум по дифференциальным уравнениям (пособие), ДГУ, 2012 г.
3. Киясов, С.Н.Шурыгин В.В.Дифференциальные уравнения. Основы теории.Учебное пособие./-Казань,КФУ,2011г.
- 4.Мухарлямов Р.К.Панкратьева Т.Н.Системы обыкновенных дифференциальных уравнений./Метод пособие.Казань,КФУ.-2013г

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
Раздел 1. Автономные уравнения . Интегральные кривые и фазовый портрет.	Доклады на тему: 1. Основные типы уравнений первого порядка. Методы решений.
Тема 1. Введение: решение обыкновенного дифференциального уравнения. Геометрическая интерпретация и качественная эквивалентность. Автономные уравнения. Фазовые портреты и динамика.	Доклады на тему: 1. .Задача Коши для уравнений 1 порядка и систем дифуравнений. 2. Фазовый портрет и динамика.
Тема 2. Автономные системы на плоскости	Доклады на тему: 1. Фазовые потоки и эволюция.
Раздел 2. Простые и непростые канонические системы	Доклады на тему: 1. Фазовые портреты для канонических систем на плоскости
Тема 1. Классификация простых линейных фазовых портретов на плоскости	Доклады на тему: 1. Фазовый портрет простой линейной системы. 2. Фазовый портрет динамической системы.
Тема 2. Нелинейные системы на плоскости. Локальное и глобальное поведение.	Доклады на тему: 1. Оператор эволюции. Аффинные системы.
Раздел 3. Нелинейные системы на плоскости.	Доклады на тему: 1. Теория Пуанкаре. Механический осциллятор. 2. Уравнение Вольтерра-Лотка и его модификации.
Тема 1. Непростые неподвижные точки. Устойчивость.	Доклады на тему: 1. Некоторые дифференциальные модели в биологии и химической кинетике и физике. Примеры полного качественного исследования

**7. Фонд оценочных средств, для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

**7.1. Типовые контрольные задания**

1. Решить уравнение  $y = xy' - \frac{1}{2}y'^2$ .
2. Решить систему  $x' = 2x - y + z, y' = x + 2y - z, z' = x - y + 2z, (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$
3. Решите уравнение  $(x - y + 1)dx + (-x + 2y)dy = 0$ .
4. Решите систему  $x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, y' = x + 2y$ .
5. Решить уравнение  $xy' + y = y'^2$ .
6. Решить систему  $x' = x + 2y, y' = x + 5\cos t$ .
7. Решить уравнение  $xy' - y = x^3$ .
8. При каких значениях  $a$  асимптотически устойчиво нулевое решение системы  $x' = ax - 2y + x^2, y' = x + y + xy$ .
9. Решить уравнение  $xy' - y = x^3y^2$ .
10. Исследовать систему  $x' = -x + y + xy, y' = x - 7y + x^2$  на устойчивость.
11. Решить уравнение  $(2x + y + 5)dx + (x - 2y)dy = 0$ .
12. Исследовать на устойчивость  $x' = x - y + xy, y' = x + 2y + y^2$ .
13. Найти особые решения уравнения  $8(y')^3 - 12(y')^2 = 27(y - x)$ .
14. Решить задачу Коши для системы  $\frac{dx}{dt} = 4x - 5y, \frac{dy}{dt} = x, x(0) = 0, y(0) = 1$ .
15. Каждая из функций семейства  $y = Ce^x + \frac{4}{c}$  является решением уравнения  $(y')^2 - yy' + 4e^x = 0$ . Найти особые решения этого уравнения.
16. Решить задачу Коши  $x' = x + y, y' = 4y - 2x, x(0) = 0, y(0) = 1$ .
17. Решить уравнение  $(x - y)dx + (-x + 5y + 4)dy = 0$ .
18. С помощью  $V = x^2 + y^2$  исследовать систему  $x' = y - x^3, y' = -x - 3y^3$  на устойчивость.
19. Решить уравнение  $y''' + y' = x$ .
20. С помощью функции  $V = x^2 + 2y^2$  исследовать на устойчивость тривиальное решение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  системы  $x' = -2y + x^2y^2, y' = x - 0,5y - 0,5x^3y$ .
21. Определить тип особой точки уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{2x + y}$ .

22. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$x' = -2x + x^2 + y^2, y' = -x + 3y + 5x^2$$

23. Найти особые решения уравнения  $(y')^2 - 2xy^2 + y = 0$ .

24. Найти область асимптотической устойчивости системы

$$x' = \ln(e + ax) - e^y, y' = bx + \operatorname{tg} y.$$

25. Решить уравнение  $y = 2xy' - y'^2$ .

26. Найти область асимптотической устойчивости системы  $x' = ax - y, y' = -x + by + x^2$ .

27. Являются ли функции  $x, |x|, 2x + \sqrt{4x^2}$  линейно зависимыми.

28. Решить систему  $x' = y + z, y' = x + z, z' = x + y$ .

29. Найти общее решение уравнения  $(2x^2)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$ , зная два частных решения  $y_1 = 2x, y_2 = (x+1)^2$ .

30. Решить уравнение  $x \frac{\partial u}{\partial x} + 3y \frac{\partial u}{\partial y} + 5z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ .

31. Решить уравнение  $y''' - 2y'' - 3y' = x + e^{-x}$ .

32. Найти решение уравнения  $2x \frac{\partial z}{\partial x} - 3y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , удовлетворяющее условию  $z = 2x$  при  $y = 1$ .

33. Найти  $y_0, y_1, y_2$ , если  $y' = x^2 - y^2, y(0) = 0$ .

34. Решить систему  $x' = -x + y + z, y' = x - y + z, z' = x + y - z$ .

35. Найти особое решение уравнения  $y = x + 2y' - (y')^2$ .

36. Решить задачу Коши  $x' = 4x - 5y, y' = x, x(0) = 1, y(0) = 0$

37. Построить диф. уравнение семейства кривых  $x^2 + c(x - 3y) + c^2 = 0$ .

38. Решить задачу Коши  $x' = x + 2y, y' = 4y + 2x, x(0) = 0, y(0) = 1$ .

39. Найти линии, ортогональные линиям семейства окружностей  $x^2 + y^2 = 2cx$ .

40. Решить систему  $x' = x - y, y' = y - x$ .

41. Определить тип особой точки системы  $x' = 2x - y, y' = x - 3y$ .

42. Решить задачу Коши  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2, z(0, y) = \frac{1}{y^2}$ .

43. Решить задачу Коши  $y'' - 4y' - 5y = x, y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

44. Установить тип особой точки системы  $x' = 2x - 3y, y' = 4x + y$ .

45. Решить задачу Коши  $y'' + 4y = \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 1$ .

46. Решить систему  $x' = x - y - z$ ,  $y' = x + y$ ,  $z' = 3x + z$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$ .

47. Найти расстояние между нулями решений уравнения  $y'' + 6xy = 0$  на  $[6;15]$ .

48. Решить систему  $x' = y - 5\cos t$ ,  $y' = 2x + y$ .

49. Оценить количество нулей любого решения уравнения  $y' + 5xy = 0$  на  $[5;125]$ .

50. Являются ли  $\varphi_1 = t^2 + 2xy$ ,  $\varphi_2 = y^2 - t^2x^2$  первыми интегралами системы уравнений

$$x' = -y, y' = \frac{y^2 - t}{x}.$$

51. Найти решение уравнения  $y'' + 2xy = 0$  в виде степенного ряда.

52. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$x' = -x + \alpha y + \beta z, \quad y' = -\alpha x - y + \alpha z, \quad z' = -\beta x - \alpha y - z.$$

54. Решить уравнение  $y''' - y'' = x + 2$ .

55. Найти область асимптотической устойчивости системы  $x' = ax - y$ ,  $y' = 2x + by$ .

56. Решить уравнение  $y''' + y' = \cos x$ .

57. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$x' = -x + 2xy^2, \quad y' = -y - 2x^2y.$$

### Материалы к зачету и экзамену : Тест №1.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:  $y'' - 4y' + 13y = 0$

1) верный ответ не указан

\*2)  $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

3)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

4)  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

2. Указать вид частного решения дифференциального уравнения:  $y'' + 3y' - 18y = 4 \cdot e^{2x}$

\*1)  $y_{ч.н} = A \cdot e^{2x}$

2)  $y_{ч.н} = A \cdot x \cdot e^{2x}$

3)  $y_{ч.н} = A \cdot x^2 \cdot e^{2x}$

4) верный ответ не указан

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:  $y'' + 3y' - 18y = 4 \cdot e^{2x}$

1)  $y_{o.н} = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{3x} + 2e^{2x}$

2)  $y_{o.н} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{6x} + \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x$



$$3) y_{o.n} = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x^2$$

$$*4) y_{o.n} = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

4. Указать вид частного решения дифференциального уравнения:

$$y'' + 3y' - 18y = 2 \cos 3x + 3 \sin 3x$$

$$1) y = (A \cos 3x + B \sin 3x) \cdot e^x$$

2) верный ответ не указан

$$*3) y = A \cos 3x + B \sin 3x$$

$$4) y = x \cdot e^x (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

5. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1) y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \sin 3x$$

2) верный ответ не указан

$$3) y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \sin 3x$$

$$*4) y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{10} \cos 3x - \frac{7}{90} \sin 3x$$

6. Указать вид частного решения дифференциального уравнения:

$$y'' + 3y' = x + 1$$

$$1) y = e^{3x} (Ax + B)$$

$$2) y = e^{3x} \cdot x (Ax + B)$$

3) верный ответ не указан

$$*4) y = Ax^2 + Bx$$

7. Найти общее решение дифференциального уравнения:  $y'' + 3y' = x + 1$

$$1) y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + 6x^2 + x$$

$$*2) y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{6} x^2 + \frac{2}{9} x$$

$$3) y = c_1 + c_2 \cdot x \cdot e^{-3x} - \frac{1}{6} x + \frac{1}{6}$$

$$4) y = c_1 e^{-3x} + xc_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$$

8. Указать вид частного решения дифференциального уравнения:  $y'' + 4y' = \cos 2x$

1) верный ответ не указан

2)  $y = (A \cos 2x + B \sin 2x)$

3)  $y = x \cdot A \cdot \cos 2x$

**\*4)**  $y = A \cos 2x + B \sin 2x$

9. Найти частное решение дифференциального уравнения  $y'' + 4y' = \cos 2x$ , если

$$y(0) = 1; y'(0) = 2$$

**\*1)**  $y = \frac{5}{4} - \frac{1}{5}e^{-4x} - \frac{1}{20} \cos 2x + \frac{1}{10} \sin 2x$

2) верный ответ не указан

3)  $y = -\frac{1}{5} - \frac{5}{4}e^{-4x} - \frac{1}{20} \cos 2x - \frac{1}{10} \sin 2x$

4)  $y = \frac{1}{5} - \frac{5}{4}e^{-4x} + \frac{1}{20} \cos 2x + \frac{1}{10} \sin 2x$

10. Указать вид частного решения дифференциального уравнения:  $y'' + 4y' = \cos 2x$

1)  $y_{ч.н} = A \sin 2x + B \cos 2x$

2)  $y_{ч.н} = e^{2x}(A \sin 2x + B \cos 2x)$

**\*3)**  $y_{ч.н} = x \cdot (A \sin 2x + B \cos 2x)$

4) верный ответ не указан

11. Найти общее решение дифференциального уравнения:  $y'' + 4y' = \cos 2x$

1) верный ответ не указан

**\*2)**  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x$

3)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - \cos 2x + \sin 2x$

4)  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{5}{4} \sin 2x$

### Контрольная работа № 1

1. Решить уравнения

а)  $y'''(x-1) - y'' = 0$ ;

б)  $yy'' - y'^2 = yy' / \sqrt{1+x^2}$ ;

2. Решить задачу Коши

$$y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x + e^x, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

3. Найти общее решение линейного однородного уравнения.

4. Частное решение искать в виде многочлена или показательной функции.

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0.$$

### Контрольная работа № 2

1. Найти решение системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$\dot{x} = 5x + 5y,$$

$$\dot{y} = -4x + y,$$

$$x(0) = 0, y(0) = 0.$$

2. Решить систему матричным методом

$$\dot{x} = 6x - 12y - z,$$

$$\dot{y} = x - 3y - z,$$

$$\dot{z} = -4x + 12y + 3z.$$

3. Найти общее решение системы

$$\dot{x} = 4x - 3y + t^2,$$

$$\dot{y} = 3x + 4y - e^t.$$

### Вариант №1

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = \ln(3 \exp(y) - 2 \cos x), \\ y' = 2 \exp(x) - (8 + 12y)^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

3. При каких значениях  $a$  устойчив многочлен  $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + a$ ?

4. Построить фазовой портрет системы  $x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x$ .

5. При каких  $k$  и  $\omega$  уравнение  $y'' + k^2y = \sin \omega t$  имеет хотя бы одно периодическое решение?

### Вариант №2

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = tg(-x + y), \\ y' = 2^y - 2\cos\left(\frac{x}{3} - x\right). \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -xy^4 - 2x^3 - y, \\ y' = 2x + 2x^2y^3 - y^7. \end{cases}$$

3. При каких значениях  $a$  и  $b$  устойчив многочлен  $\lambda^4 + b\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda + 2$ ?

4. Построить фазовой портрет системы  $x' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x$ .

5. При каких значениях параметров  $p$  и  $q$  все решения уравнения  $y'' + py' + qy = 0$  ограничены при всех  $x \geq 0$ ?

### Вариант №3

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = 2 - (8 - 6x + 3y)^{1/3}, \\ y' = 1 - \exp(2x + y). \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость системы

$$\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

3. При каких значениях  $a$  и  $b$  устойчив многочлен  $\lambda^4 + a\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + b$ ?

4. Построить фазовой портрет системы  $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров  $p$  и  $q$  все решения уравнения  $y'' + py' + qy = 0$  являются периодическими функциями от  $x$ ?

### Вариант №4

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = 2,5x \exp(x) - 3y + \sin x^2, \\ y' = 2x + y \exp(-y^2/2) - y^4 \cos x. \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость системы

$$\begin{cases} x' = xy - x^3 + y, \\ y' = x^4 - x^2y - x^3. \end{cases}$$

3. При каких значениях  $a$  и  $b$  устойчив многочлен  $a\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b$ ?

4. Построить фазовой портрет системы  $\begin{cases} x' + x + 5y = 0 \\ y' - y - x = 0. \end{cases}$

5. Докажите, что среди всех решений уравнения  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 11x = \cos \omega t$  есть ровно одно периодическое.

**Вариант № 9**

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = \sin(-2x + y), \\ y' = 1 - \exp(x - y). \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x - 2y. \end{cases}$$

3. При каких значениях  $a$  устойчив многочлен  $\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + a\lambda + 6$ ?

4. Построить фазовый портрет системы  $\begin{cases} x' = -2x + \frac{5}{7}y, \\ y' = 7x - 3y. \end{cases}$

5. Найти периодическое решение уравнения  $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = \exp(i\omega t)$ .

**Вариант № 10**

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = (1 + x - 2y)^{-1} - 1, \\ y' = \cos x - \exp(2x - y). \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -2y - x(x - y)^2, \\ y' = 3x - 1.5y(x - y)^2. \end{cases}$$

3. При каких значениях  $a$  и  $b$  устойчив многочлен  $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 6$ ?

4. Построить фазовый портрет системы  $\begin{cases} x' = -5x - y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  все решения уравнения

$$y'' + ay' + by = 0 \text{ стремятся к нулю при } x \rightarrow -\infty?$$

**Вариант № 11**

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = \operatorname{tg}(-2x + y), \\ y' = 1 - (1 - x + y)^{1/3}. \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -4x - y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

3. При каких значениях  $a$  и  $b$  устойчив многочлен  $\lambda^4 + b\lambda^3 + 4\lambda^2 + a\lambda + 6$ ?

4. Построить фазовый портрет системы  $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  уравнение  $y'' + ay' + by = 0$  имеет хотя бы

одно решение  $y(x) \neq 0$ , стремящееся к нулю при  $x \rightarrow -\infty$ ?

**Вариант № 12**

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = \sin(-2x + y), \\ y' = 2 - (8 - 6x + 3y)^{1/3}. \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -3x - 2y, \\ y' = 2x - 3y. \end{cases}$$

3. При каких значениях  $a$  и  $b$  устойчив многочлен  $\lambda^4 + b\lambda^3 + a\lambda^2 + 5\lambda + 7$ ?

4. Построить фазовый портрет системы  $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = 3x - y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  ограничены на всей оси решения уравнения

$$y'' + ay' + by = \sin t?$$

### **Список вопросов к экзамену .**

1. Решения обыкновенного дифференциального уравнения. Геометрическая интерпретация и качественная эквивалентность.
2. Автономные уравнения. Интегральные кривые и фазовый портрет.
3. Автономные уравнения .Фазовые портреты и динамика Автономные системы на плоскости .
- 4.
5. Построение фазовых портретов на плоскости.
6. Потоки и эволюция.
- 7.Линейная замена переменных.
8. Классы подобия для действительных матриц .
- 9.Простые канонические системы.
10. Непростые канонические системы.
11. Классификация простых фазовых портретов на плоскости.
- 12.Оператор эволюции.
13. Аффинные системы.
14. Нелинейные системы на плоскости. Локальное и глобальное поведение.
15. Линеаризация в окрестности неподвижной точки .
16. Теорема о линеаризации.
- 17.Непростые неподвижные точки.
18. Устойчивость неподвижных точек.
19. Обыкновенные точки и глобальные фазовые портреты..
20. Первые интегралы системы дифференциальных уравнений.
- 21.Предельные циклы. Теория Пуанкаре -Бендиксона.
22. Механический осциллятор.
23. Уравнение Лотки- Вольтерра и его модификация.
- 24.Устойчивость решений по Ляпунову. Основные понятия и определения.
25. Метод функций Ляпунова.
26. Критерий Раусса –Гурвица

### **7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум - 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов,

### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.**

а) основная литература

1. Тихонов, Александр Николаевич.

Дифференциальные уравнения : [учеб. для физ. специальностей и специальности "Прикладная математика"] / Тихонов, Александр Николаевич ; А.Б.Васильева,

<p>А.Г.Свешников; под ред. А.Н.Тихонова и др.; [Моск. гос. ун-т им. М.В.Ломоносова]. - 4-е изд., стер. - М. :Физматлит, 2005, 2002. - 253 с. : ил. ; 22 см. - (Курс высшей математики и математической физики. вып.6) (Классический университетский учебник). - Библиогр.: с. 249-250. - Предм. указ.: с. 251-253. - ISBN 5-9221-0134-X : 126-28.</p>
<p>2. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко ; под ред. В.К.Романко. - М. : Лаб. Баз. Знаний: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 255,[1] с. - (Технический университет). - ISBN 5-93208-120-1 : 127-00.</p>
<p>3. Филиппов, Алексей Фёдорович . Введение в теорию дифференциальных уравнений : [учеб. для вузов по группе физ.-мат. направлений и специальностей] / Филиппов, Алексей Фёдорович . - М. :Едиториал УРСС, 2004. - 238,[1] с. : ил. ; 22 см. - Библиогр.: с. 234-236. - Предм. указ.: с. 237-239. - Допущено МО РФ. - ISBN 5-354-00416-0 : 120-70.</p>
<p>4. Дифференциальные уравнения : учебник / . - 4-е изд. - Москва :Физматлит, 2002. - 252 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6). - ISBN 978-5-9221-0277-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=145012">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=145012</a> (17.10.2018).</p>

б) дополнительная литература

<p>Егоров, Александр Иванович.Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / Егоров, Александр Иванович. - М. :Физматлит, 2005. - 384 с. : ил. ; 24 см. - Библиогр.: с.375-376.- Предм. указ.: с.377-380. - ISBN 5-9221-0385-7 : 350-00.</p>
<p>Эльсгольц, Л. Э.Дифференциальные уравнения : учебник / Л. Э. Эльсгольц. - 6-е изд. - М. :КомКнига, 2006. - 309 с. - (Классический учебник МГУ). - Допущено МО. - ISBN 5-484-00409-8 : 134-86.</p>
<p>Матвеев, Павел Николаевич.Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Матвеев, Павел Николаевич. - СПб. [и др.] : Лань, 2008. - 330,[6] с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0571-8 : 278-52.</p>
<p>4. Треногин, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В.А. Треногин. - Москва :Физматлит, 2009. - 312 с. - ISBN 978-5-9221-1063-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=82614">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=82614</a> (17.10.2018).</p>

**9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека
2. [http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rubr=2.2.74.12](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12) – Единое окно доступа к электронным ресурсам
3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer
4. <http://edu.dgu.ru/> - Образовательный сервер ДГУ

5. Moodle [Электронный ресурс]: система виртуального обучением: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: <http://moodle.dgu.ru/>(датаобращения:).

## **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Учебная программа по данной дисциплине распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

## **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по данной дисциплине рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины «Качественная теория дифференциальных уравнений». Кроме того, на факультете 2 компьютерных класса и 2 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.