

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Методы оптимизации**

**Кафедра прикладной математики**

**Образовательная программа бакалавриата**

**01.03.01 Математика**

Направленность (профиль) программы:  
**Вещественный, комплексный и функциональный анализ**

Форма обучения  
**очная**

Статус дисциплины: входит в формируемую  
участниками образовательных отношений часть ОПОП

*Махачкала, 2022*

Рабочая программа дисциплины «*Методы оптимизации*» составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО - *бакалавриат* по направлению подготовки *01.03.01 Математика*.  
Приказ Минобрнауки России от 12.01.2018 №8.

Разработчик: кафедра прикладной математики, Ризаев М.К., к.ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:  
на заседании кафедры прикладной математики от «25» февраля 2022 г.,  
протокол №6

Зав. кафедрой Р Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и  
компьютерных наук от «24» марта 2022., протокол №4.

Председатель Р Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим  
управлением «31» 03 2022г.

Начальник УМУ А Гасангаджиева А.Г.  
(подпись)

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина *методы оптимизации* входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

Дисциплина реализуется на факультете *математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики*.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с изучением и освоением следующего материал. Основные элементы теории экстремальных задач: производная отображения, суперпозиции операторов, теоремы о среднем и полном дифференциале, конечномерные теоремы об обратной и неявной функциях; гладкие конечномерные задачи: без ограничений, с ограничениями типа равенств, со смешанными ограничениями; задача выпуклого программирования: элементы выпуклого исчисления, выпуклая задача без ограничений, выпуклая задача с ограничениями, теорема Куна-Таккера; линейное программирование: основные виды задач, геометрический способ решения, симплекс метод решения; классическое вариационное исчисление: задача Больца, простейшая задача, изопериметрическая задача; задача Лагранжа: принцип Лагранжа для задачи Лагранжа, задача с подвижными концами, задача со старшими производными; оптимальное управление: задача оптимального управления, принцип максимума Понтрягина, приложения принципа к решению задач.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: *универсальных – УК-1, общепрофессиональных – ОПК-1, профессиональных – ПК-3.*

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: лекции, практические занятия, самостоятельная работа.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: контрольная работа, коллоквиум промежуточный контроль в форме экзамена.

Объем дисциплины 4 зачетных единиц, в том числе в 144 академических часах по видам учебных занятий:

Семес тр	Учебные занятия						СРС, в том числе экза мен	Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцирован ный зачет, экзамен
	в том числе							
	Контактная работа обучающихся с преподавателем							
	Всег о	из них						
Лекц ии		Лабораторн ые занятия	Практиче ские занятия	КСР	консульта ции			
7	144	34		34			76	экзамен
Ито го	144	34		34			76	

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины (модуля) *методы оптимизации* являются :

-овладение основными понятиями и сведениями теории методов оптимизаций: конечномерные экстремальные задачи, элементы выпуклого и линейного программирования, задачи вариационного исчисления, элементы оптимального управления;

-творческое овладение основными методами и технологиями доказательства теорем и решения задач методов оптимизаций;

-овладеть методами решения, исследования основных классов экстремальных задач как для освоения изучаемой дисциплины, так и для освоения других дисциплин и создания базы последующим курсам, изучаемым на высших ступенях образования.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата.

Дисциплина *методы оптимизации* входит в часть образовательной программы, формируемую участниками образовательных отношений, по направлению 01.03.01 *Математика*. Знания по методам оптимизаций необходимы для данной специальности, они крайне необходимы как основной элемент в совокупности знаний, предусмотренных программой обучения по данному направлению. Изучение методов оптимизаций предполагает знание математического анализа, дифференциальных уравнений, линейной алгебры, функционального анализа и других дисциплин.

Освоение данной дисциплины весьма необходимо при прохождении смежных университетских курсов, таких как методы вычислений. вычислительная математика, теоретическая механика, дополнительные главы уравнений в частных производных и других естественнонаучных дисциплин.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения) .

Код и наименование компетенции из ФГОС ВО	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
УК1.Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять	УК-1.1.Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации.	Знает: структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, методов оптимизации, знает принципы сбора, отбора и обобщения совокупности информации. Умеет: применять принципы сбора и обобщения	Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиум

<p>системный подход для решения поставленных задач.</p>		<p>информации в различных областях естествознания, использовать базовые составляющие задач оптимизации при решении подобных задач.</p> <p>Владеет: методами сбора и отбора информации, а также кругом вопросов <i>методов оптимизации</i>, используемых при решении задач прикладной математики и механики.</p>	<p>мов и контрольных работ</p>
	<p>УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.</p>	<p>Знает: способы и методы сравнения разнородных явлений, систематизации их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.</p> <p>Умеет: анализировать решения основных задач методов оптимизации, рассматриваемых задач естествознания, интерпретировать их, используя экономические знания, выделять решения экстремальных задач, имеющие экономический смысл.</p> <p>Владеет: основными сведениями, теоретическим материалом по дисциплине и может соотносить разнородные явления.</p>	

	<p>УК-1.3. Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.</p>	<p>Знает: методы построения математических моделей различных задач на экстремумы из естествознания, практики, экономики, сравнивать их с известными результатами, приводимыми в информационных источниках. Умеет: работать с информационными источниками, имеет опыт научного поиска, создания научных текстов. Владеет: методами и способами практической работы с информационными источниками, имеет опыт научного поиска, создания научных текстов.</p>	
<p>ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в математических и (или) естественных науках.</p>	<p>Знает: теоретические основы основных базовых математических дисциплин, а также теоретической механики и физики, формулировку и постановку классических задач нелинейного, линейного и выпуклого программирования, вариационного исчисления и оптимального управления. Умеет: воспользоваться базовыми знаниями, полученными в математических и (или) естественных науках при их изучении. Владеет: базовыми знаниями, полученными в математических и (или) естественных науках.</p>	<p>Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов и контрольных работ</p>

	<p>ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.</p>	<p>Знает: способы использования теоретических основ <i>методов оптимизации</i> при решении различных задач естествознания. Умеет: применять известные методы решения основных классов экстремальных задач нелинейного, линейного, выпуклого программирования к прикладным задачам естествознания, техники, физики, вариационного исчисления и оптимального управления к задачам теоретической механики и физики. Владеет: методами решения задач современного математического анализа и их использования в профессиональной деятельности.</p>	
	<p>ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.</p>	<p>Знает: методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний <i>методов оптимизации</i> и других естественных наук. Умеет: применять методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний <i>методов оптимизации</i> и других естественных наук к решению конкретных задач практики.</p>	

		<p>Владеет: методами построения математических моделей задач на экстремум, навыками выбора методов решения задач современного математического анализа, корректно ставить задачи на экстремум и научно их излагать, использовать при их решении пакеты прикладных программ, прочие возможности информационных технологий.</p>	
<p>ПК-3.Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>.ПК-3.1. Знает основы современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>Знает: основные методы решения прикладных задач, относящиеся к дисциплине методы оптимизации и исследования операций, смежные с ними методы современных технологий, оптимизирующие решение самих решаемых задач.</p> <p>Умеет: использовать основы современных научных исследований для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p> <p>Владеет: основами современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов и контрольных работ.</p>



	<p>ПК-3.2. Планирует популярные лекции, экскурсии и другие виды деятельности, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>Знает: способы планирования популярных лекций, экскурсов и других видов деятельности, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p> <p>Умеет: грамотно и вполне понятно и корректно оформить выделенный материал в виде лекции, экскурса или научной статьи, решение поставленной и решенной задачи в виде научного труда в соответствии с общепринятыми современными требованиями.</p> <p>Владеет: практическим опытом и соответствующими навыками составления лекций и других продуктов научной деятельности.</p>	
	<p>ПК-3.3. Проводит необходимую работу по сборанию, обработке и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>Знает: методику работы по сборанию, обработке и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p> <p>Умеет: проводить необходимую работу по сборанию, обработке и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	

		<p>Владеет: навыками проведения работы по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим проведенным научным исследованиям, обладает достаточным практическим опытом использования сети интернет для разыскания необходимой информации и сопоставления ее с имеющейся информацией, аннотирования и реферирования в научных целях, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками.</p>	
--	--	---	--

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Лекции	Практические	Лабораторные занятия	Контроль самост. раб.		
<b>Модуль 1. Нелинейное программирование</b>								
Всего по модулю 1	7		10	10			16	Коллоквиум, контрольная

								работа.
1.Задачи методов оптимизации. Основные этапы развития.			2	2			2	
2.Основные элементы теории экстремальных задач.			2	2			4	
3.Конечномерная задача без ограничений.			2	2			4	
4.Конечно мерная задача с ограничениями типа равенств.			2	2			4	
5.Конечномерная задача с ограничениями типа равенств и неравенств.			2	2			4	
<b>Модуль 2. Линейное и выпуклое программирования.</b>								
Всего по модулю 2			12	12			12	Коллоквиум, контрольная работа.
1.Задача линейного программирования.			2	2			2	
2.Геометрический способ решения задачи линейного программирования.			2	2				
3.Симплекс-метод решения задачи линейного программирования.			4	4			4	
4.Элементы выпуклого анализа.			2	2			4	

5.Задача выпуклого программирования.			2	2			2	
<b>Модуль 3. Вариационные исчисления.</b>								
Всего по модулю 3.			12	12			12	Коллоквиум, контрольная работа.
1.Задача Больца			2	2				
2.Простейшая задача классического вариационного исчисления.			2	2				
3.Изопериметрическая задача.			2	2				
4.Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа.			2	2			2	
5.Задача с подвижными концами.							4	
6.Задача со старшими производными.			2	2			2	
7.Задача оптимального управления.			2	2			4	
<b>Модуль 4. Промежуточная аттестация, подготовка к экзамену</b>								
Всего по модулю 3							36	
Самостоятельная подготовка к экзамену							36	
Итого :			34	34			76	

### 4.3. Содержание дисциплины, структурирование по темам(разделам)

#### 4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

#### Модуль1. Нелинейное программирование

**Тема1.** Задачи методов оптимизации. Основные этапы развития.

Предмет методов оптимизаций. Основные этапы развития методов оптимизаций. Основные понятия, связанные с экстремальными задачами.

**Тема2.** Основные элементы теории экстремальных задач.

Дифференцируемость отображений, свойства производных. Теорема о среднем, дифференциалы конечномерных отображений.

**Тема3.** Конечномерная задача без ограничений.

Постановка задачи, необходимые и достаточные условия экстремума в случае гладкости. Знакопеременность квадратичных форм, критерий Сильвестра.

**Тема4.** Конечномерная задача с ограничениями типа равенств. Постановка задачи. Метод множителей Лагранжа. Необходимые условия экстремума в случае гладкости. Правило решения.

**Тема5.** Конечномерная задача с ограничениями типа равенств и неравенств. Постановка задачи, функция Лагранжа. Необходимые условия экстремума в случае гладкости. Правило решения.

**Модуль 2. Линейное и выпуклое программирования.**

**Тема6.** Задача линейного программирования.

Задача оптимального выпуска продукции. Транспортная задача. Постановка задачи линейного программирования. Каноническая и основная задачи линейного программирования.

**Тема7.** Геометрический способ решения задачи линейного программирования. Область допустимых элементов, угловые элементы, точки. Градиент целевой функции, линии уровня, выбор оптимальных решений.

**Тема8.** Симплекс-метод решения задачи линейного программирования. Преобразование общей задачи линейного программирования к каноническому виду, симплекс-таблица. Идея симплекс-метода и его обоснование, симплекс-преобразование.

**Тема9.** Элементы выпуклого анализа.

Выпуклые множества и функционалы в нормированных пространствах, их свойства. Отделить выпуклых множеств, теорема об отделимости. Субдифференциал функционала.

**Тема 10.** Задача выпуклого программирования.

Выпуклая задача без ограничений, необходимое условие экстремума. Задача выпуклого программирования, теорема Куна–Таккера.

**Модуль3. Вариационное исчисление.**

**Тема 11.** Задача Больца.

Основная лемма вариационного исчисления, лемма Дюбуа – Реймона. Необходимое условие экстремума, правило решения

**Тема 12.** Простейшая задачи классического вариационного исчисления.

Постановка задачи, необходимое условие экстремума. Интегралы уравнения Эйлера, правило решения задачи.

**Тема 13.** Изопериметрическая задача.

Постановка задачи, необходимое условие экстремума, правило решения задачи.

**Тема 14.** Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа.

Постановка задачи Лагранжа, необходимое условие экстремума, теорема Эйлера – Лагранжа.

**Тема 15.** Задачи со старшими производными.

Постановка задачи, необходимое условие экстремума, уравнение Эйлера – Пуассона.

**Тема 16.** Задача оптимального управления.

Постановка задачи, принцип максимума Понтрягина.

#### **4.3.2 Содержание практических занятий по дисциплине**

##### **Модуль 1. Нелинейное программирование**

**Тема 1.** Задачи методов оптимизаций. Основные этапы развития. Текстовые задачи на экстремум, математическое моделирование их и решение с последующим анализом.

**Тема 2.** Основные элементы теории экстремальных задач.

Дифференцируемость отображений, свойства производных. Теорема о среднем, дифференциалы конечномерных отображений.

**Тема 3.** Конечномерная задача без ограничений.

Определение экстремумов функций многих переменных. Достаточные условия, критерий Сильвестра. Решение задач.

**Тема 4.** Конечномерная задача с ограничениями типа равенств. Вычисление экстремумов функций многих переменных при ограничениях задаваемых системой уравнений. Решение задач.

**Тема 5.** Конечномерная задача с смешанными ограничениями.

Определение экстремумов функций многих переменных при смешанных ограничениях. Решение задач.

##### **Модуль 2. Линейное и выпуклое программирования.**

**Тема 6.** Задача линейного программирования.

График и градиент целевой функции. Область допустимых элементов задачи линейного программирования. Решение задач.

**Тема 7.** Геометрический способ решения задачи линейного программирования

Область допустимых элементов, угловые элементы, точки. Градиент целевой функции, линии уровня, выбор оптимальных решений.

**Тема 8.** Симплекс-метод решения задачи линейного программирования.

Преобразование общей задачи к каноническому виду. Решение задач симплекс-методом.

**Тема 9.** Элементы выпуклого анализа.

Выпуклость множеств, их отделимость. Субдифференциал. Решение задач.

**Тема 10.** Задача выпуклого программирования.

Выпуклая задача без ограничений. Решение задач без ограничений, определение точек экстремума.

### Модуль3. Вариационное исчисление.

#### Тема 11. Задача Больца.

Необходимое условие экстремума. Исследование приращения функционала, решение задач.

#### Тема 12. Простейшая задача классического вариационного исчисления.

Решение простейших задач, анализ знакоопределенности приращения целевого функционала в окрестности стационарной кривой.

#### Тема 13. Изопериметрическая задача.

Решение изопериметрических задач вариационного исчисления. Исследование стационарных кривых на предмет существования экстремумов.

#### Тема 14. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа.

Функция Лагранжа, необходимое условие экстремума, решение задач с ограничениями.

#### Тема 15. Задача со старшими производными.

Необходимое условие экстремума, уравнение Эйлера – Пуассона, решение задач с подвижными концами.

#### Тема 16. Задача оптимального управления.

Принцип максимума Понтрягина в частном случае. Приложение к решению задач.

### 5. Образовательные технологии.

В основе преподавания дисциплины *методы оптимизации* лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного осмысливания теоретического материала, содержащего глубокие и фундаментальные понятия, связанные с оптимизационными задачами.

Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Особенно, это касается тех задач оптимизации, в которых наглядные элементы-схемы, рисунки—составляют необходимую составляющую.. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер – классы специалистов.

Самостоятельная работа студентов организована в различных видах и формах, включая подготовку к учебным занятиям и научно-исследовательскую деятельность студентов, обеспечена учебно-методическими материалами. Контроль выполнения самостоятельной работы проводится средствами, соответствующими данному виду работы.

*Коллоквиум* - средство контроля освоения учебного материала темы или раздела, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися. Перед коллоквиумом по каждому модулю студент должен *самостоятельно* повторить и освоить соответствующий теоретический материал по данному модулю:

- *знать* основные понятия и определения, формулировки основных математических утверждений;
- *уметь* давать: общий анализ основных понятий; геометрические и/или естественнонаучные интерпретации базовых теорем по тематике модуля;
- *владеть* навыками доказательства теорем по тематике модуля.

#### *Критерии оценки по коллоквиуму*

По данному модулю студенту выставляются:

- 1) 5 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* их иллюстрировать на различных примерах;
- 2) 15 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* доказывать различные из них;
- 3) 20 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* доказывать их.

Эти баллы учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля

#### *Критерии оценки по контрольной работе*

Если студент *владеет по данному модулю навыками* решения типичных задач, то *по этому модулю* ему выставляются:

- 1) 50 баллов;
- 2) 40 баллов в случае наличия неточностей;
- 3) 20 баллов в случае наличия некоторых допустимых ошибок.

Эти баллы учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.

*Доклад* - продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной темы.

*Реферат* - продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой краткое изложение в письменном виде полученных результатов теоретического анализа определенной научной (учебно-исследовательской) темы, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы, приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее.

#### *Критерии оценки по докладу, реферату*

Если студент *по теме данного модуля* самостоятельно *подготовил доклад и выступил* с этим докладом публично или написал реферат и раскрыл тему реферата, то ему выставляются 10 баллов, которые учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.



## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### 6.1. Учебно-методические пособия для самостоятельной работы

1. Загиров Н.Ш., Ризаев М.К. Вариационное исчисление и методы оптимизации. г.Махачкала, ИПЦ ДГУ, 2010.
2. Загиров Н.Ш., Гаджиева Т.Ю. Методы оптимизации. Методические рекомендации к решению задач. г.Махачкала, ИПЦ ДГУ, 2014.
3. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.
4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М:Высшая школа, 1968.
5. Гончаров В.А. Методы оптимизации: учебное пособие. М:Высшее образование. 2009.

### 6.2. Задание для самостоятельной работы.

#### Модуль 1. Нелинейное программирования.

Исследовать отображение на дифференцируемости по Фреме и найти производные в случае дифференцируемости.

1.  $f: R^2 \rightarrow R^2, f(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2^3, x_1x_2), \vec{x} = (1, 2)$
2.  $f: R^n \rightarrow R^1, f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2$
3.  $f: H \rightarrow R^1, f(x) = \|x\|, H$  – гильбертово пространство.

Решить следующие задачи на экстремумы.

4. Вписать в круг треугольник с максимальной суммой квадратов сторон.
5. Найти наибольшую площадь четырехугольника с заданными сторонами.
6. Вписать в шар пространство  $R^n$  симплекс наибольшего объема.

Решить следующие конечномерные задачи.

7.  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}, \vec{x} \in R^3$ .
8.  $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1 + x_1x_2 + 2x_3 \rightarrow \text{extr}, \vec{x} \in R^3$ .
9.  $4x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{extr}, x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
10.  $x_1x_2^2x_3^3 \rightarrow \text{extr}, x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .
11.  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}, x_1^4 + x_2^4 \leq 1$ .
12.  $x_1^4 + x_2^4 \rightarrow \text{extr}, x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ .

#### Модуль 2. Линейное и выпуклое программирования.

Решить геометрически и симплекс – методом задачи линейного программирования.

13.  $f(x_1, x_2) = -x_1 - 4x_2 \rightarrow \text{min}; x_1 \leq 2, x_1 + 2x_2 \geq 2, x_2 \geq 2, x_1 + x_2 \leq 3, x_1, x_2 \geq 0$ .
14.  $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 \rightarrow \text{min}; -x_1 + x_2 \leq 0, 2x_1 + x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0$ .

$$15. f(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min; 2x_1 + x_2 \geq 1, 3x_1 - x_2 \geq -1, x_1 - 4x_2 \leq 2; x_1, x_2 \geq 0.$$

1. Найти субдифференциал нормы (как выпуклой однородной функции) в нормированном пространстве.
2. Доказать, что если  $f: R^2 \rightarrow R$  и при этом  $f^*(x) = f(x)$ , то  $f(x) = |x|^2/2$ .
3. Вычислить субдифференциал  $f(\vec{x}) = \max_i |x_i|, \vec{x} \in R^n$ .
4.  $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 + 2| \rightarrow \inf$ .
5.  $x_1^2 + x_2^2 + 2\max(x_1, x_2) \rightarrow \inf$ .

### Модуль 3. Вариационное исчисление.

Решить задачи Больца.

6.  $\int_0^2 \dot{x}^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(2) \rightarrow \text{extr}$ .
7.  $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt + 6x^2(1) \rightarrow \text{extr}$ .
8.  $\int_0^3 (\dot{x}^2 + x^2) dt + 10x^2(3) - x(0) \rightarrow \text{extr}$ .

Решить простейшие задачи классического вариационного исчисления.

9.  $\int_1^e (x - t\dot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 1, x(2) = 2$ .
10.  $\int_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 3, x(2) = 1$ .
11.  $\int_0^1 x^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1, x(1) = \sqrt{2}$ .

Решить изопериметрические задачи.

12.  $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^\pi x \cos t dt = \frac{\pi}{2}; x(0) = 1, x(\pi) = -1$
13.  $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x e^{-t} dt = e; x(1) = 2, x(0) = 2e + 1$ .

Решить задачи со старшими производными.

14.  $\int_0^1 (24tx - \ddot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0, \dot{x}(1) = 0, 1$ .
15.  $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 24tx) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \dot{x}(0) = 0, x(1) = 0, 2; \dot{x}(1) = 1$ .

### 6.3. Темы для самостоятельного изучения. Виды и содержание самостоятельной работы.

Согласно учебному плану самостоятельная работа предусмотрена ко всем модулям. Темы для самостоятельной работы расписаны при указании тем лекционных и практических занятий.

#### Модуль 4. Самостоятельная работа, экзамен.

При подготовке к экзамену студентам указывается перечень вопросов подлежащих освоению при самостоятельной работе. Они тождественно отражают содержание лекционных и практических заданий.

**7. Фонд оценочных средств, для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

## **7.1 Перечень компетенций с указанием их формирования в процессе освоения образовательной программы.**

Перечень компетенций с указанием их формирования приведем в описании образовательной программы.

### **7.2. Типовые контрольные задания.**

#### **7.2.1. Примерные контрольные вопросы к коллоквиумам.**

##### **Модуль 1. Нелинейное программирование.**

1. Дайте определение производной по Фреше, приведите формулу для производной суперпозиции отображений.
2. Сформулируйте конечномерную теорему об обратной и неявной функции.
3. Приведите теорему о среднем в случае нормированного пространства, разъясните ее смысл.
4. Найдите первую и вторую производные отображения:  $f: R^n \rightarrow R^1$ .
5. Найдите первую производную отображения:  $f: R^n \rightarrow R^m$ .
6. Сформулировать необходимое условие для безусловного экстремума функции многих переменных.
7. Сформулировать достаточное условие безусловного экстремума функции многих переменных.
8. Сформулировать критерий Сильвестра проверки достаточных условий безусловного экстремума функции многих переменных.
9. Приведите постановку гладкой конечномерной задачи с ограничениями типа равенств. Что такое функция и вектор множителей Лагранжа?
10. Сформулировать необходимые условия экстремума в конечномерной задаче с ограничениями типа равенств.
11. Приведите алгоритм решения задачи на экстремум функции многих переменных в случае ограничений типа равенств.
12. Приведите постановку задачи минимизации функции многих переменных при ограничениях типа равенств и неравенств.
13. Сформулировать необходимые условия экстремума в задаче со смешанными ограничениями.
14. В чем состоит условие дополняющей нежесткости в необходимых условиях экстремума задачи с ограничениями типа неравенств?
15. В чем состоит условие неотрицательности множителей Лагранжа в необходимых условиях экстремума задачи с ограничениями типа неравенств?
16. Приведите условие стационарности в задачах минимизации функций многих переменных с ограничениями.

##### **Модуль 2. Линейное и выпуклое программирование.**

1. Сформулируйте задачу об оптимальном выпуске продукции.
2. Приведите постановку транспортной задачи.
3. Напишите общую задачу линейного программирования. Укажите ее частные случаи.

4. В чем состоит эквивалентность основной и канонической задач линейного программирования?
5. Дайте определение области допустимых элементов задачи линейного программирования. Приведите пример в случае размерности  $n = 2, 3$ .
6. Дайте определение угловой точки ОДР. Приведите примеры для случая  $n = 2, 3$ .
7. Сформулируйте критерий угловатости точки в случае канонической задачи линейного программирования.
8. Описать алгоритм графического решения задачи линейного программирования.
9. Объясните алгоритм преобразования основной задачи к каноническому виду.
10. Описать алгоритм выбора базисных переменных, угловой точки и составления первичной симплекс – таблицы.
11. Сформулировать признак оптимальности угловой точки через оценки  $\Delta_i$ .
12. В каком случае задача линейного программирования не имеет решения? Свяжите ответ с оценками  $\Delta_i$ .
13. Сформулировать правила пересчета ограничений, оценок задачи линейного программирования при переходе к новому базису.
14. Всегда ли решение задачи линейного программирования, записанной в канонической форме может быть найдено за конечное число шагов?
15. Дайте определение выпуклого множества. Сформулировать его геометрический смысл. Какое множество называется конусом?
16. Эффективное множество и надграфик. Собственный функционал. Выпуклый однородный функционал.
17. Выпуклые множества в нормированных пространствах, их свойства. Ядро множества.
18. Выпуклые функционалы. Неравенство Йенсена, критерий выпуклости.
19. Отделимость выпуклых множеств в нормированных пространствах. Приведите пример в случае пространства  $R^n$ .
20. Теорема отделимости в конечномерном случае.
21. Субдифференциал функционала. Субдифференциал выпуклой однородной функции.
22. Субдифференциал дифференцируемого функционала.
23. Выпуклая задача без ограничений. Необходимое условие экстремума.
24. Пусть выпуклый функционал  $f$  задан на выпуклом множестве  $U$ . Является ли точка локального минимума точкой его глобального минимума на  $U$ ?
25. Выпуклый функционал  $f$  задан на выпуклом множестве  $U$  и достигает своего минимума в двух различных точках. Достигает ли функционал минимума во всех точках отрезка, соединяющих эти точки?
26. Функционал  $f$  строго выпукл и задан на выпуклом множестве  $U$ . Может ли он достигать своего глобального минимума на  $U$  более чем в одной точке?
27. Сформулируйте задачу выпуклого программирования. В чём состоит принцип максимума для функции Лагранжа.

28. Приведите постановку задачи выпуклого программирования. Приведите условия дополняющей надёжности и не отрицательности множителей Лагранжа из теоремы Куна-Таккера.

29. В каком случае принципы максимума для функции Лагранжа, условия дополняющей надёжности и неотрицательности множителей Лагранжа являются достаточными в теореме Куна-Таккера?

30. В чём состоит условие Слейтера из теоремы Куна-Таккера?

### Модуль 3. Вариационные исчисления.

1. Сформулировать основную лемму вариационного исчисления.
2. Приведите формулировку леммы Дюбуа-Реймона.
3. Сформулируйте задачу Больца, приведите необходимые условия экстремума.
4. Приведите алгоритм, правило решения задачи Больца.
5. Сформулировать простейшую задачу вариационного исчисления, напишите необходимые условия экстремума.
6. Приведите постановку изопериметрической задачи, укажите функцию Лагранжа этой задачи.
7. Сформулируйте необходимые условия экстремума для изопериметрической задачи.
8. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа.
9. Необходимое условие экстремума в задаче Лагранжа, уравнение Эйлера-Лагранжа.
10. Задача с подвижными концами, необходимое условие экстремума.
11. Сформулировать задачу со старшими производными.
12. Необходимые условия экстремума в задаче со старшими производными, правило решения задачи.
13. Привести формулировку задачи оптимального управления.
14. Сформулировать принцип максимума Понтрягина.

#### 7.2.2. Примерные тестовые задания для проведения текущего контроля

Правильный ответ	Формулировка тестового задания
1)	Производная отображения $F: C([0,1]) \rightarrow R, F(x(\cdot)) = x^2(1)$ есть отображение: 1) $F'(x(\cdot))[y(\cdot)] = 2x(1)y(1);$ 3) $F'(x(\cdot))[y(\cdot)] = y^2(1);$ 2) $F'(x(\cdot))[y(\cdot)] = 2y(1);$ 4) $F'(x(\cdot))[y(\cdot)] = x^2(1)y^2(1).$
2)	Производная отображения $F: R^n \rightarrow R^m, F(\vec{x}) = A\vec{x}$ , где $A$ – матрица порядка $m \times n$ , есть отображение: 1) $F'(\vec{x})[h] = (\vec{x}, \vec{h});$ 3) $F'(\vec{x})[h] = A\vec{x};$

	2) $F'(\vec{x})[h] = A\vec{h}$ ;                      4) $F'(\vec{x})[h] = \vec{x} + \vec{h}$ .
3)	Величины $A$ и $B$ связаны соотношением $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{30}$ , причём $40 \leq A \leq 60$ , $60 \leq B \leq 120$ . Величина $A$ принимает наименьшее значение при следующем значении величины $B$ : 1) 60;    2) 80;    3) 120;    4) 100.
4)	Функция $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2$ достигает минимальное значение в точке: 1) (0; 1); 2) (1; 1); 3) (2; 1); 4) (1; 0).
1)	Конечномерная задача без ограничений $f(\vec{x}) = x_1x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}$ имеет точку экстремума: 1) (5; 2) $\in$ loc min;                      3) (5; 2) $\in$ loc max; 2) (2; 5) $\in$ loc min;                      4) (2; 5) $\in$ loc max;
2)	Конечномерная задача $4x_1 + 3x_2 \rightarrow extr, x_1^2 + x_2^2 = 1$ имеет следующие стационарные точки: 1) $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ ; 2) $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ 3) $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ ; $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ ;                      4) (0; 1); (1; 0).
3)	Каноническая задача линейного программирования: 1) содержит ограничение типа строгого неравенства; 2) всегда имеет конечное решение; 3) содержит только ограничения типа равенств; 4) содержит ограничения только типа неравенств.
4)	Область допустимых элементов задачи линейного программирования в $R^2$ задана неравенствами $x_1 + x_2 \geq 6, x_1 + x_2 \leq 12, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ . Тогда число угловых точек этой области равно: 1) 3;    2) 5;    3) 6;    4) 4.
1)	Задача линейного программирования $L(\vec{x}) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow min,$ $\begin{cases} x_1 \geq 0, x_1 \leq 3, \\ x_2 \geq 0, x_2 \leq 3 \end{cases}$ имеет решение: 1. $\vec{x}_{\text{ОПТ}} = (+3; +3), L_{\text{min}} = -9$ ;                      2. $\vec{x}_{\text{ОПТ}} = (+3; 0), L_{\text{min}} = -3$ ; 3. $\vec{x}_{\text{ОПТ}} = (0; 3), L_{\text{min}} = -6$ ;                      4. $\vec{x}_{\text{ОПТ}} = (2; 3), L_{\text{min}} = -8$ ;

2)	<p>Для выпуклости собственного функционала <math>f</math> необходимо и достаточно:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) дифференцируемость <math>f</math> во всех точках;</li> <li>2) выполнение неравенства Иенсена;</li> <li>3) ограниченность функционала <math>f</math>;</li> <li>4) непрерывность функционала <math>f</math>.</li> </ol>
3)	<p>Для того чтобы точка <math>\hat{x}</math> доставляла в выпуклой задаче без ограничений <math>f(x) \rightarrow \inf</math> абсолютный минимум, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Существовал субдифференциал <math>\partial f(\hat{x})</math>;</li> <li>2) Функционал <math>f</math> был дифференцируем;</li> <li>3) Выполнялось включение <math>0 \in \partial f(\hat{x})</math>;</li> <li>4) Выполнялось условие <math>\partial f(\hat{x}) = f(\hat{x})</math>.</li> </ol>
1)	<p>Если точка <math>\hat{x}</math> является решением задачи выпуклого программирования, то:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) имеет место принцип минимума для функции Лагранжа;</li> <li>2) не имеет место условие дополняющей нежесткости;</li> <li>3) все множители Лагранжа <math>\lambda_i \leq 0</math>;</li> <li>4) в точке <math>\hat{x}</math> целевой функционал дифференцируем.</li> </ol>
1)	<p>Уравнение Эйлера простейшей задачи вариационного исчисления <math>\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(1) = 0</math> имеет вид:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>x'' + x = 0</math>;    2) <math>x'' - x = 0</math>;</li> <li>3) <math>x'' - 2x = 0</math>;    4) <math>x'' - x^2 = 0</math>;</li> </ol>
1)	<p>Уравнение Эйлера для простейшей задачи классического вариационного исчисления имеет вид:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) = \hat{L}_x(t)</math>;    2) <math>\hat{L}_{\dot{x}}(t) = \frac{d}{dt} \hat{L}_x(t)</math>;</li> <li>3) <math>\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) = -\hat{L}_x(t)</math>;    4) <math>\hat{L}_{\dot{x}}(t) = -\frac{d}{dt} \hat{L}_x(t)</math>;</li> </ol>
2)	<p>Решение простейшей задачи вариационного исчисления <math>\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1, x(1) = 0</math> имеет вид:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>(1+t) \in \text{absmin}</math>;    2) <math>(t-1) \in \text{absmin}</math>;</li> <li>3) <math>(1-t) \in \text{absmin}</math>;    4) <math>(t^2+1) \in \text{absmin}</math></li> </ol>
3)	<p>Условие трансверсальности в задаче Больца задаются выражением:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = \hat{l}_{x_i}, i = 0,1</math>;    2) <math>\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^2 \hat{l}_{x_i}, i = 0,1</math>;</li> <li>3) <math>\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = -\hat{l}_{x_i}, i = 0,1</math>;    4) <math>\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = -t_i \hat{l}_{x_i}, i = 0,1</math>.</li> </ol>
4)	<p>Функция Лагранжа изопериметрической задачи <math>\int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \inf; \int_0^1 x dt = 0, x(1) = x(2) = 0</math> имеет вид:</p>

	1) $\lambda_0(\dot{x}^2 - x^2) - \lambda_1 x^2$ ;                      2) $\lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x^2$ ; 3) $\lambda_0(\dot{x}^2 + x^2) - \lambda_1 x^2$ ;                      4) $\lambda_0(\dot{x}^2 - x^2) + \lambda_1 x$ .
2)	Уравнение Эйлера-Пуассона для задачи со старшими производными: $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow extr; x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = \dot{x}(1) = 0$ имеет вид: 1) $x^{(3)}(t) = 0$ ;                      2) $x^{(4)}(t) = 0$ ; 3) $x^{(5)}(t) = 0$ ;                      4) $x^{(6)}(t) = 0$ ;
3)	Задача Больца задается в пространстве: 1) $C([t_0; t_1])$ ;                      2) $C^{(4)}([t_0; t_1])$ ; 3) $C^{(1)}([t_0; t_1])$ ;                      4) $C^{(2)}([t_0; t_1])$ ;
4)	Допустимый управляемый процесс $\xi(t)$ является элементом: 1) задачи Больца; 2) изопериметрической задачи; 3) задачи со старшими производными; 4) задачи оптимального управления.

### 7.2.3. Варианты контрольных работ для текущего контроля

#### Контрольная работа №1.

##### Вариант №1.

1. Найти производную по Фреше отображения:  $F(x(\cdot)) = \int_{-1}^1 x^3(t) dt$ ,

$$F: C([-1; 1]) \rightarrow R.$$

2. Решить конечномерную задачу без ограничений:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^3 - 2x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow extr.$$

3. Решить конечномерную задачу с ограничением типа равенства:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 \rightarrow extr; 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 19.$$

##### Вариант №2.

1. Найти производную по Фреше отображения:

$$F(x(\cdot)) = x^2(1)x(-1), F: C([-1; 1]) \rightarrow R.$$

2. Вычислить экстремумы в безусловной конечномерной задаче:

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{2}{3}x_3^3 + 4x_1 + x_2 + 4x_3 \rightarrow extr.$$

3. Решить конечномерную задачу:

$$2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \rightarrow extr, \quad -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 26$$

##### Вариант №3.

1. Найти производную по Фреше

$$\text{отображения: } F(x(\cdot)) = \left( \int_{-1}^1 x(t) dt \right)^2, F: C([-1; 1]) \rightarrow R.$$



2. Решить конечномерную задачу без ограничений:

$$-x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}x_3^3 - 2x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \text{extr.}$$

3. Решить конечномерную задачу с ограничением типа равенства:

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = 24.$$

#### Вариант № 4.

1. Найти производную по Фреше

$$\text{отображения: } F(x(\cdot)) = \int_{-1}^1 x^3(t)e^t dt, F: C([-1; 1]) \rightarrow R.$$

2. Решить конечномерную задачу без ограничений:

$$-2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + \frac{2}{3}x_3^3 + 4x_1 + x_2 + 4x_3 \rightarrow \text{extr.}$$

3. Решить конечномерную задачу с ограничением типа равенства:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 &\rightarrow \text{extr,} \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 42. \end{aligned}$$

#### Контрольная работа №2.

##### Вариант №1.

1. Решить геометрическим способом и симплекс-методом задачу линейного программирования:

$$L(\vec{x}) = -4x_1 - 10x_2 \rightarrow \min; \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 24, & 2x_1 + x_2 \leq 17, \\ 3x_1 - x_2 \leq 18; & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

##### Вариант №2.

1. Решить геометрическим способом и симплекс-методом задачу линейного программирования:

$$L(\vec{x}) = -5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min; \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \geq 20, & x_1 + x_2 \leq 12, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12; & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

##### Вариант №3.

1. Решить геометрическим способом и симплекс-методом задачу линейного программирования:

$$L(\vec{x}) = -6x_1 - 8x_2 \rightarrow \min; \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \leq 30, & x_1 + x_2 \leq 13, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 15; & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

##### Вариант №4.

1. Решить геометрическим способом и симплекс-методом задачу линейного программирования:

$$L(\vec{x}) = -5x_1 - 4x_2 \rightarrow \min; \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \geq 24, & -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14; & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

### Контрольная работа №3.

#### Вариант №1.

1. Найти стационарные кривые в задаче Больца:

$$\int_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt - 2x(1) + x^2(2) \rightarrow \text{extr.}$$

2. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^{3/2} (\dot{x}^3 + 2x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{3}{2}\right) = 1.$$

3. Определить стационарные кривые изопериметрической задачи:

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad \int_0^1 x dt = 2, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

#### Вариант № 2.

1. Найти стационарные кривые в задаче Больца:

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt - 2x(1) \operatorname{sh}(1) \rightarrow \text{extr.}$$

2. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^2 (\dot{x}^2 + 2x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 2.$$

3. Определить стандартные кривые изопериметрической задачи:

$$\int_0^1 x^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad \int_0^1 t x dt = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 2.$$

#### Вариант 3.

1. Найти стационарные кривые в задаче Больца:

$$\int_0^3 (\dot{x}^2 + x^2) dt + 6x^2(3) \rightarrow \text{extr.}$$

2. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^1 (x^2 - x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

3. Определить стационарные кривые изопериметрической задачи:

$$\int_0^\pi x^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad \int_0^\pi x \sin t dt = 1, \quad x(0) = x(\pi) = 0.$$

#### Вариант 4.

1. Найти стационарные кривые в задаче Больца:

$$\int_0^1 e^x \dot{x}^2 dt + 4e^{x(0)} + 32e^{-x(1)} \rightarrow \text{extr.}$$

2. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^1 \dot{x} e^{\dot{x}} dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2.$$

3. Определить стандартные кривые изопериметрической задачи:

$$\int_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad \int_1^2 t x dt = \frac{7}{3}, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 2.$$

### 7.2.3. Вопросы для контроля самостоятельной работы студента

1. Производная по направлению, вариации по Лагранжу.
2. Производные высших порядков операторов. Формула Тейлора.
3. Теорема о полном дифференциале для операторов.
4. Элементы выпуклого анализа, основные сведения.
5. Субдифференциал и его свойства.
6. Достаточные условия экстремума в безусловной задаче.
7. Правило множителей Лагранжа в задачах с ограничениями.
8. Теорема Куна-Таккера в задаче выпуклого программирования.
9. Целочисленное линейное программирование.
10. Принципы Лагранжа в задачах классического вариационного исчисления.
11. Задачи со старшими производными.
12. Задача с подвижными концами, ее особенности.
13. Принципы Лагранжа в задаче оптимального уравнения.
14. Постановка задачи оптимального уравнения, ее частные случаи.
15. Принципы Лагранжа для Ляпуновских задач.

### 7.3. Примерный перечень вопросов к экзамену по дисциплине

1. Основные этапы развития методов оптимизации. Задачи оптимизации.
2. Конечномерная задача без ограничений. Необходимые и достаточные условия экстремума.
3. Конечномерная задача с ограничениями типа равенств.. Необходимые и достаточные условия экстремума.
4. Конечномерная задача с ограничениями типа равенств и неравенств. Необходимые и достаточные условия экстремума.
5. Задача линейного программирования, основная и канонические задачи.
6. Область допустимых элементов. Угловые точки, критерий угловатости.
7. Графический способ решения задачи линейного программирования.
8. Симплекс метод решения задачи линейного программирования.
9. Выпуклые множества и выпуклые функционалы.
10. Судифференциал функционала и его свойства.
12. Выпуклая задача без ограничений.
13. Задача выпуклого программирования, теорема Куна-Таккера.

14. Основная лемма вариационного исчисления. Лемма Дюбуа-Реймона.
15. Задача Больца, необходимые условия экстремума.
16. Простейшая краевая задача, необходимые условия экстремума.
17. Изопериметрическая задача, необходимые условия экстремума.
18. Задача Лагранжа, необходимые условия экстремума.
19. Задача с подвижными концами, необходимые условия экстремума.
20. Задача со старшими производными, необходимые условия экстремума.
21. Задача оптимального управления, принцип минимума.
22. Принцип Лагранжа в задаче оптимального управления.
23. Игольчатые вариации.
24. Редукция к конечномерной задаче.
25. Принцип максимума Понтрягина.

#### **7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля-50% и промежуточного контроля -50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий-10 баллов,
- участие на практических занятиях-10 баллов,
- коллоквиум-40 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ-40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) – 100 баллов.

#### *Критерии оценивания*

**Оценку "отлично"** заслуживает студент, обнаруживший всестороннее, систематическое и глубокое знание предусмотренного программой материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоивший основную и знакомый с дополнительной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка **"отлично"** выставляется студентам, усвоившим взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии, проявившим творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала. Студент должен уметь примеры и задачи, предложенные к предстоящему экзамену.

**Оценку "хорошо"** заслуживает студент, обнаруживший полное знание учебно-программного материала, успешно выполняющий предусмотренные в программе задания, усвоивший основную литературу, рекомендованную в программе. Как правило, оценка **"хорошо"** выставляется студентам,

показавшим систематический характер знаний по дисциплине и способным к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности. Иными словами, допускается незнание некоторых сложных фактов и доказательств теорем.

**Оценку "удовлетворительно"** заслуживает студент, обнаруживший знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справляющийся с выполнением заданий, предусмотренных программой, знакомый с основной литературой, рекомендованной программой. Удовлетворительной отметкой оценивается ответ, в котором имеются погрешности при выполнении экзаменационных заданий, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.

**Оценка "неудовлетворительно"** выставляется студенту, в ответе которого обнаружены пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий. Как правило, оценка "неудовлетворительно" ставится студентам, которые не могут продолжить обучение или приступить к профессиональной деятельности по окончании вуза без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

*Рекомендуемые границы оценок:*

- «отлично» - не менее 86% правильных ответов,**
- «хорошо» - 66-85% правильных ответов,**
- «удовлетворительно» - 51-65% правильных ответов,**
- «неудовлетворительно» - менее 50% правильных ответов.**

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **а) основная литература:**

1.. Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации : учебное пособие / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. - 2-е изд. - Москва : Физматлит, 2011. - 368 с. - ISBN 978-5-9221-0559-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76629>.

2. Вариационное исчисление и методы оптимизации / [сост.: Н.Ш.Загиров, М.К.Ризаев]; М-во образования и науки РФ, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2010. - 63 с. - 38-00.Первозванский А. А. Поиск. М. Наука. 1970.

3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное уравнение. М.; Наука, 1979.

4. Галеев, Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач : учебное пособие для вузов спец. "Математика" / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. - М. : Изд-во МГУ, 1989. - 203,[1] с. - 00-45.

5. Алексеев, Владимир Михайлович. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи : [Для мат. спец. вузов] / Алексеев, Владимир Михайлович, Галеев, Эльдат Михайлович, Тихомиров, Владимир Михайлович. - М. : Наука, 1984. - 288 с. : ил. ; 21 см. - 00-90.

#### **б) дополнительная литература:**

1. Галеев Э.М. Курс лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению. М.: Изд-во МГУ, 1996.

2. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.И. Методы оптимизации. Минск: Изд-ву БГУ, 1981

3. Пантелеев А.Б., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2005.

4. Карманов, Владимир Георгиевич. Математическое программирование : учебное пособие для студентов вузов / Карманов, Владимир Георгиевич. - Изд. 2-е. - М. : Наука, 1980. - 256 с. ; 21 см. + черт. - 00-44.

### **9. Перечень ресурсов информационно- телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

1. Федеральный портал <http://edu.ru>:

2. Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ <http://elib.dgu.ru>:  
<http://edu.icc.dgu.ru>

### **10. Методические указания для обучающихся на освоению дисциплины.**

Учебная программа по методам оптимизаций распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомандуемых задач, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по методом оптимизации рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники. При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

### **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины методы оптимизации. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами. В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.